デリバティブ論
第 10 回 金利派生資産

岩城 秀樹

京都大学みずほ証券寄付講座

2014 年 7 月 10 日

スポット・レート・モデル

定義 (短期利子率と無危険資産)

確率過程 $\{r(t) : t \geq 0\}$ を所与として時点 $t \geq 0$ における価格が

$$S_0(t) = \mathrm{e}^{\int_0^t r(s)ds} \tag{1}$$

と表される資産が存在したとする．
$\{r(t) : t \geq 0\}$ を **短期利子率過程**と呼び，価格の変動が (1) で記述される資産を**無危険資産**と呼ぶ．

定義 (スポット・レート・モデル)

短期利子率過程 $\{r(t) : t \geq 0\}$ が

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(t, r(t))dW(t), \qquad t \geq 0; \qquad r(0) = r \tag{2}$$

という伊藤過程に従っているモデルを**スポット・レート・モデル**と呼ぶ.

金利派生資産の価格付け I

各時点での価値が短期利子率過程 $\{r(t) : t \geq 0\}$ によって決まる任意の金利派生資産を考える．
価格評価を行う金利派生資産については，売買時点を除いて時点 s, $s \geq 0$ に，そのときに限りキャッシュ・フローが発生するとして，時点 s におけるキャッシュ・フローが２変数関数によって $X(s, r(s))$ と与えられるとする．

定義 (リスク中立確率測度)

金利派生資産の時点 t での価格を $S_X(t)$ としたとき，割引価格過程 $\left\{e^{-\int_0^t r(s)ds} S_X(t) : t \geq 0\right\}$ をマルチンゲールとする確率測度 Q をリスク中立確率測度と呼ぶ．

このとき価格評価を行う金利派生資産の時点 t での価格 $S_X(t)$ は

$$S_X(t) = \mathbb{E}^Q\left[e^{-\int_t^s r(u)du} X(s, r(s)) \middle| \mathcal{F}_t\right], \qquad t \in [0, s]. \tag{3}$$

ある２変数関数 $g(x, y)$ によって金利派生資産の価格が

$$S(t) = g(t, r(t)), \qquad t \geq 0$$

と表されるとする．このとき，この資産の価格過程は伊藤の公式から

$$\begin{aligned} \mu_S(t, x) &:= \frac{\partial g(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial g(t, x)}{\partial x}\mu(t, x) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g(t, x)}{\partial x^2}\sigma^2(t, x), \\ \sigma_S(t, x) &:= \frac{\partial g(t, x)}{\partial x}\sigma(t, x) \end{aligned}$$

として，$\{\mu_S(t) := \mu_S(t, r(t)) : t \geq 0\}$ と $\{\sigma_S(t) := \sigma_S(t, r(t)) : t \geq 0\}$ によって

$$dS(t) = \mu_S(t)dt + \sigma_S(t)dW(t), \qquad t \geq 0$$

と表される．

金利派生資産の価格付け III

$$\eta(t) := \frac{r(t)S(t) - \mu_S(t)}{\sigma_S(t)}, \qquad t \geq 0 \tag{4}$$

として任意の正の実数 T に対して,

$$\xi := \exp\left(\int_0^T \eta(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^T \eta^2(s)ds\right)$$

とし，すべての $\mathcal{B} \in \mathcal{F} := \mathcal{F}_T(\xi)$[1] に対して

$$Q(\mathcal{B}) := \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{\mathcal{B}\}}\xi]$$

とすれば Q はリスク中立確率測度．

[1] $\mathcal{F}_T(\xi)$ は ξ から生成される可算加法族を表すとする．

金利派生資産の価格付け IV

ギルサノフの定理から

$$\hat{W}(t) := W(t) - \int_0^t \eta(s)ds, \qquad t \geq 0 \tag{5}$$

とすると，確率測度 Q **の下で** $\{\hat{W}(t) : t \in [0, T]\}$ **は標準ブラウン運動．**(2) **と** (5) **からリスク中立確率測度** Q **の下で**

$$dr(t) = (\mu(t, r(t)) + \eta(t)\sigma(t, r(t)))dt + \sigma(t, r(t))d\hat{W}(t). \tag{6}$$

∴ (4) **によって** $\{\eta(t) : t \geq 0\}$ **を求めた後，**(6) **から** $r(t)$ **の確率分布が求められるならば，**(3) **の期待値によって金利派生資産の価格が求められる**. □

定義 (Vasicek **モデル**)

$a,\ \bar{r},\ \sigma$ を正の定数として

$$dr(t) = a(\bar{r} - r(t))dt + \sigma dW(t), \qquad t \geq 0; \qquad r(0) = r \tag{7}$$

となるスポット・レート・モデルを Vasicek **モデル**という．

$\bar{r}$ が利子率の長期的趨勢を表しているとすると利子率はこの長期的趨勢から乖離した場合，この長期的趨勢の値に戻ろうとする傾向を持つことになる．このような傾向を持つ確率過程を一般に**平均回帰過程**という．

Vasicek モデル II

リスク中立確率測度 Q の下で

$$dr(t) = a(\hat{r} - r(t))dt + \sigma d\hat{W}(t), \qquad t \geq 0, \qquad r(0) = r \tag{8}$$

と表されるとする[2]．ただし，$\hat{r}$ は定数とする.
(8) の解は

$$r(t) = \hat{r} + (r - \hat{r})\mathrm{e}^{-at} + \sigma \int_0^t \mathrm{e}^{-a(t-u)} d\hat{W}(u), \qquad t \in [0, T] \tag{9}$$

となる．

---

[2] (4) で定義される $\eta(t)$, $t \geq 0$ が利子率 $r(t)$ の値と時点に依存しない，すなわち,

$$\eta(t) = \eta, \ t \geq 0$$

とすると，(6) より $\hat{r} := \bar{r} + \frac{\sigma}{a}\eta$ と置けば, (8) を得る．

補題 (1)

$Y(t) := \int_0^t r(s)ds$ とする．Vasicek モデルでは，$(r(t), Y(t))^\top$, $t \geq 0$，は リスク中立確率測度の下で

$$\begin{aligned} \text{平均ベクトル } \nu(t) &:= (\mu_r(t), \mu_Y(t))^\top, \\ \text{共分散行列 } \Sigma(t) &:= \begin{pmatrix} \sigma_r(t)^2 & \sigma_{rY}(t) \\ \sigma_{rY}(t) & \sigma_Y(t)^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

の 2 次元正規分布に従う．ただし，

$$\begin{aligned} \mu_Y(t) &:= \hat{r}t + (r - \hat{r})\frac{1 - e^{-at}}{a}, \quad \mu_r(t) := \hat{r} + (r - \hat{r})e^{-at}, \\ \sigma_Y(t)^2 &:= \sigma^2 \left[\frac{1}{a^2}\left(t - \frac{1 - e^{-at}}{a} \right) - \frac{1}{2a}\left(\frac{1 - e^{-at}}{a} \right)^2 \right], \\ \sigma_r(t)^2 &:= \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}), \quad \sigma_{rY}(t) := \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{1 - e^{-at}}{a} \right)^2. \end{aligned}$$

証明 (9) より，

$$
\begin{aligned}
Y(t) &= \hat{r}t + (r - \hat{r})\int_0^t \mathrm{e}^{-as} ds + \sigma \int_0^t \int_0^s \mathrm{e}^{-a(s-u)} d\hat{W}(u) ds \\
&= \hat{r}t + (r - \hat{r})\frac{1 - \mathrm{e}^{-at}}{a} + \frac{\sigma}{a}\int_0^t (1 - \mathrm{e}^{-a(t-u)}) d\hat{W}(u). \qquad (10)
\end{aligned}
$$

ここで，最右辺は積分の順序交換による．$\{r(t) : t \in [0, T]\}$ はガウス過程となるから，$(r(t), Y(t))$ は２次元正規分布に従う．あとは期待値，分散，共分散を求めればよい. □

$B(t,s)$, $s \geq t \geq 0$ を満期時点 s，額面 1 円の割引債の時点 t における価格とする.
(3) **より，割引債価格 $B(t,s)$ は**

$$B(t,s) = \mathbb{E}^Q\left[\mathrm{e}^{-\int_t^s r(u)du} \middle| \mathcal{F}_t\right] \tag{11}$$

となる.

定理 (1)

Vasicek モデルでは，時点 τ にそのときに限り $X(\tau, r(\tau))$ のキャッシュ・フローをもたらすデリバティブの現在価格 $S_X(0)$ は，

$$S_X(0) = B(0,\tau)\mathbb{E}^Q[X(\tau, r'(\tau))] \tag{12}$$

で与えられる. ただし，$r'(\tau)$ は平均 $\mu_r(\tau) - \sigma_{rY}(\tau)$，分散 $\sigma_r(\tau)$ の正規分布に従う確率変数.

証明　補題 (1) と (3) より

$$\begin{aligned} S_X(0) &= \mathbb{E}^Q[e^{-Y(\tau)}X(\tau, r(\tau))] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y}X(\tau, x)dN_2(x, y; \nu(\tau), \Sigma(\tau)). \end{aligned}$$

ただし，$N_2(x, y; \nu(\tau), \Sigma(\tau))$ は平均ベクトル $\nu(\tau)$，共分散行列 $\Sigma(\tau)$ の２次元正規分布の分布関数．

$$\begin{aligned} S_X(0) &= e^{-\mu_Y(\tau)+\frac{\sigma_Y(\tau)^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X(\tau, x)dN_2(x, y; \nu(\tau) + \Sigma(\tau)(0, -1)^\top, \Sigma(\tau)) \\ &= \mathbb{E}^Q\left[e^{-Y(\tau)}\right]\int_{-\infty}^{\infty} X(\tau, x)dN(x; \mu_r(\tau) - \sigma_{rY}(\tau), \sigma_r(\tau)^2). \end{aligned}$$

さらに，(3) より $B(0, \tau) = \mathbb{E}^Q\left[e^{-Y(\tau)}\right]$ となることを用いると (12) を得る．
□

系 (1)

Vasicek モデルでは満期時点 T，額面 1 円の割引債の時点 t での価格 $B(t,T)$ は次式で与えられる．

$$B(t,T) = H_{V1}(T-t)\mathrm{e}^{-H_{V2}(T-t)r(t)}, \tag{13}$$

$$\begin{aligned} H_{V2}(t) &:= \frac{1-\mathrm{e}^{-at}}{a}, \\ H_{V1}(t) &:= \exp\left(\frac{(H_{V2}(t)-t)(a^2\hat{r}-\sigma^2/2)}{a^2} - \frac{\sigma^2 H_{V2}(t)^2}{4a}\right), \quad t \in [0,T]. \end{aligned}$$

証明　(3) より

$$B(t,T) = \mathbb{E}^{Q}\left[\mathrm{e}^{-\int_t^T r(s)ds} \middle| \mathcal{F}_t \right]$$

を求めればよい. (9) より

$$r(s) = r(t)e^{-a(s-t)} + \hat{r}(1 - e^{-a(s-t)}) + \sigma \int_t^s e^{-a(s-u)} d\hat{W}(u), \qquad s \in [t,T].$$

$$\therefore \int_t^T r(s)ds = r(t)\frac{1-\mathrm{e}^{-a(T-t)}}{a} + \hat{r}\left((T-t) - \frac{1-\mathrm{e}^{-a(T-t)}}{a}\right) + \sigma \int_t^T \frac{1-\mathrm{e}^{-a(T-u)}}{a} d\hat{W}(u).$$

∴ 補題 (1) の $Y(t)$ と同様にして $r(t)$ の値を所与とすると $\int_t^T r(s)ds$ は,

$$\text{平均} \qquad r(t)H_{V2}(T-t) + \hat{r}\left((T-t) - H_{V2}(T-t)\right),$$

$$\begin{aligned} \text{分散} \qquad & \sigma^2 \int_t^T \left(\frac{1-\mathrm{e}^{-a(T-u)}}{a}\right)^2 du \\ & = \sigma^2 \left(\frac{(T-t) - H_{V2}(T-t)}{a^2} - \frac{H_{V2}(T-t)^2}{2a}\right) \end{aligned}$$

の正規分布に従うことが示せる．したがって，(13) を得る．　□

例 (1)

単位時間を 1 年として (8) のパラメータを
$a = 0.01,\ \hat{r} = 0.05,\ \sigma = 0.02,\ r = 0.05$ とする.
額面 1 円の割引債で，1 年後に満期となる割引債と 7 年後に満期となる割引債の現在価格を (13) によって求める.

$$
\begin{aligned}
H_{V2}(1) &= \frac{1 - \mathrm{e}^{-0.01\times 1}}{0.01} = 0.995017, \\
H_{V1}(1) & \\
&= \exp\left(\frac{(0.995017 - 1)(0.01^2 \times 0.05 - 0.02^2/2)}{0.01^2} - \frac{0.02^2 \times 0.995017^2}{4 \times 0.01}\right) \\
&= 0.999816, \\
H_{V2}(7) &= \frac{1 - \mathrm{e}^{-0.01\times 7}}{0.01} = 6.760618, \\
H_{V1}(7) & \\
&= \exp\left(\frac{(6.760618 - 7)(0.01^2 \times 0.05 - 0.02^2/2)}{0.01^2} - \frac{0.02^2 \times 6.760618^2}{4 \times 0.01}\right) \\
&= 1.009783.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad B(0,1) &= 0.999816 \times \mathrm{e}^{-0.995017\times 0.05} = 0.95129, \\
B(0,7) &= 1.009783 \times \mathrm{e}^{-6.760618\times 0.05} = 0.72015.
\end{aligned}
$$

□

系 (1)

Vasicek モデルでは，満期時点 T，額面１円の割引債を原資産とする満期時点 τ, $0 \le \tau \le T$，行使価格 K のヨーロピアン・コール・オプションの現在価格 $C(0)$ とヨーロピアン・プット・オプションの現在価格 $P(0)$ は次式で与えられる.

$$\begin{aligned} C(0) &= B(0,T)\Phi(d) - KB(0,\tau)\Phi(d-\sigma'_Y), \qquad (14) \\ P(0) &= KB(0,\tau)\Phi(-d+\sigma'_Y) - B(0,T)\Phi(-d), \qquad (15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d &:= \frac{\ln B(0,T) - \ln(KB(0,\tau))}{\sigma'_Y} + \frac{\sigma'_Y}{2}, \\ \sigma'_Y &:= \frac{(1-\mathrm{e}^{-a(T-\tau)})}{a}\sqrt{\frac{\sigma^2}{2a}(1-\mathrm{e}^{-2a\tau})}. \end{aligned}$$

証明定理 5.1 と (13) より，$B(\tau,T;r'(\tau)) := H_{V1}(\tau,T)e^{-H_{V2}(\tau,T)r'(\tau)}$ と置くと，

$$
\begin{aligned}
C(0) =& B(0,\tau)\mathbb{E}^Q[\{B(\tau,T;r'(\tau)) - K\}_+] = B(0,\tau)\mathbb{E}^Q[\{e^{-Y'} - K\}_+],\\
Y' :=& -\ln H_{V1}(T-\tau) + H_{V2}(T-\tau)r'(\tau).
\end{aligned}
$$

ここで，リスク中立確率測度の下で $r'(\tau)$ は正規分布に従っていたことに注意すると Y' も正規分布に従う．そこで Y' のリスク中立確率測度の下での期待値 $\mu_{Y'}$ と分散 $\sigma^2_{Y'}$ を求めてみる．(3) と定理 5.1 より

$$
\begin{aligned}
B(0,T) &= \mathbb{E}^Q\left[e^{-\int_0^T r(t)dt}\right]\\
&= \mathbb{E}^Q\left[e^{-\int_0^\tau r(t)dt}e^{-\int_\tau^T r(t)dt}\right]\\
&= \mathbb{E}^Q\left[e^{-\int_0^\tau r(t)dt}\mathbb{E}^Q\left[e^{-\int_\tau^T r(t)dt}\middle|\mathcal{F}_\tau\right]\right]\\
&= B(0,\tau)\mathbb{E}^Q[B(\tau,T;r'(\tau))] = B(0,\tau)\mathbb{E}^Q[e^{-Y'}] = B(0,\tau)e^{-\mu_{Y'}+\frac{\sigma^2_{Y'}}{2}}
\end{aligned}
$$

$\therefore \mu_{Y'} = -\ln\left(\frac{B(0,T)}{B(0,\tau)}\right) + \frac{\sigma^2_{Y'}}{2}$. 一方，$\sigma^2_{Y'} = H_{V2}(T-\tau)^2\sigma_r(\tau)^2$. したがって

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}^Q[\{e^{-Y'} - K\}_+] &= \int_{-\infty}^{-\ln K}(e^{-x} - K)dN(x;\mu_{Y'},\sigma^2_{Y'})\\
&= e^{-\mu'_Y+\frac{\sigma'^2_Y}{2}}\int_{-\infty}^{-\ln K}dN(x;\mu_{Y'}-\sigma^2_{Y'},\sigma^2_{Y'}) - K\int_{-\infty}^{-\ln K}dN(x;\mu_{Y'},\sigma^2_{Y'})\\
&= \frac{B(0,T)}{B(0,\tau)}\Phi\left(\frac{-\ln K - \mu_{Y'} + \sigma^2_{Y'}}{\sigma_{Y'}}\right) - K\Phi\left(\frac{-\ln K - \mu_{Y'}}{\sigma_{Y'}}\right). \qquad \square
\end{aligned}
$$

例 (2)

例 (1) と同じ設定の下で 7 年後に満期償還となる額面 1 円の割引債を原資産とする 1 年後に満期となる行使価格 0.7 円のヨーロピアン・コール・オプションの現在価格を (14) によって求める.
この場合，$a = 0.01$, $\hat{r} = 0.05$, $\sigma = 0.02$, $r = 0.05$, $\tau = 1$, $T = 7$，さらに例 (1) より，$B(0, 1) = 0.95129$, $B(0, 7) = 0.72015$ であるから

$$
\begin{aligned}
\sigma'_Y &= \frac{(1 - \mathrm{e}^{-0.01\times(7-1)})}{0.01}\sqrt{\frac{0.02^2}{2\times 0.01}(1-\mathrm{e}^{-2\times 0.01\times 1})} = 0.115891,\\
d &= \frac{\ln 0.72015 - \ln(0.7\times 0.95129)}{0.115891} + \frac{0.115891}{2} = 0.733694
\end{aligned}
$$

となり，

$$
\begin{aligned}
C(0) &= 0.72015\times\Phi(0.733694)\\
&\quad -0.7\times 0.95129\times\Phi(0.733694 - 0.115891)\\
&= 0.066179.
\end{aligned}
$$

□

問題

問 1 (9) を確かめよ．

問 2 補題 (1) の平均ベクトル $\nu(t)$ と共分散ベクトル $\Sigma(t)$ が，ただし書きのとおりとなることを確かめよ．

問 3 系 (1) の証明において，$\int_t^T r(s)ds$ の平均と分散が証明のとおりとなることを確かめよ．