デリバティブ論

第 9 回 スワップ，キャップとフロアー

岩城 秀樹

京都大学みずほ証券寄付講座

2014 年 7 月 3 日

金利スワップとは

定義 (金利スワップ)

- **金利スワップ**取引とは，将来の一定期間に渡って所定の固定金利と変動金利を定期的に交換することを約束する取引のこと.
- **想定元本**と呼ばれる名目上の架空の元本金額を想定して, 想定元本に所定の固定金利を乗じた利息金額と想定元本に変動金利を乗じた利息金額の交換が行われる.
- スワップ取引では契約約定時点では現金の授受は行われない．契約約定時に決定される固定金利を**スワップ・レート**という.

適正なスワップ・レートを求めることがスワップ取引における価値評価の主たる目的となる.

スワップ取引の例 I

例 (1)

スワップ期間 2 年，利払頻度年 2 回，半年後から

A → B:　固定金利年率 6 %で想定元本金額 5 億円に対して利払，
B → A:　6 ヶ月の LIBOR[a] で同額の想定元本に対して利払

というスワップ取引を行ったとする．
A は B に対して 2 年間にわたり半年ごとに

$$5\text{ 億円} \times 0.06 \times \frac{1}{2} = 15,000,000\text{ 円}$$

支払う一方，

$$5\text{ 億} \times 6\text{ ヶ月 LIBOR} \times \frac{1}{2}\text{円}$$

を受取る．

[a]LIBOR とは London InterBank Offered Rate の略称でロンドンの銀行間ユーロ資金市場における資金の貸手の提示する利率の平均値を表す．

スワップ取引の例 II

例 (1) 続き)

例えば，LIBOR が現時点より半年ごとに 5 % →6 % →4 % →7 %と推移した場合には，キャッシュ・フローは表 5.1 のようになる．

Table: スワップ取引におけるキャッシュ・フロー (金額単位：百万円)

	0.5 年後	1.0 年後	1.5 年後	2.0 年後
Aの支払額 ＝ Bの受取額	15	15	15	15
Aの受取額 ＝ Bの支払額	12.5	15	10	17.5
Aの決済金額 ＝ −Bの決済金額	-2.5	0	-5	2.5

$0 \leq T_0 < T_1 < \cdots < T_n$，$T_{i+1} - T_i = s$（一定），$i = 1, 2, \cdots, n$, として

$$\begin{aligned} T_i \quad &:= \text{金利交換時点}, \\ R_S \quad &:= \text{固定利子率}, \\ I \quad &:= \text{想定元本金額}, \\ R_L(T_i) \quad &:= \text{時間区間 } [T_i, T_{i+1}] \text{ に適用される変動利子率とする}. \end{aligned}$$

スワップ取引を行った場合の時点 T_{i+1}, $i = 0, 1, \cdots, n-1$，のキャッシュ・フローは，

$$I \times s \times (R_L(T_i) - R_S). \tag{1}$$

スワップ・レートの導出 II

仮定 (1)

変動利子率 $R_L(T_i)$ と満期 T_{i+1} 割引債の時点 T_i 価格 $B(T_i, T_{i+1})$ の間には次の関係が成立しているとする．

$$B(T_i, T_{i+1}) = \frac{1}{1 + sR_L(T_i)}, \qquad i = 0, 1, \cdots, n-1. \tag{2}$$

定理 (スワップ・レート)

時点 T_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, に金利を交換するスワップ取引において時点 t, $0 \leq t \leq T_0$, で決定されるスワップ・レート $R_S(t)$ は

$$R_S(t) = \frac{B(t, T_0) - B(t, T_n)}{\sum_{i=1}^{n} sB(t, T_i)}. \tag{3}$$

スワップ・レートの導出 III

証明

$\Pi_S(t)$ を時点 t でのスワップの価値とすると (1) より，$\mathbb{E}^Q$ をリスク中立確率の下での期待値として，

$$\Pi_S(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}^Q \left[e^{-\int_t^{T_i} r(u)du} I s(R_L(T_{i-1}) - R_S(t)) \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

(2) を代入すると，

$$\begin{aligned}
\Pi_S(t) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}^Q \left[e^{-\int_t^{T_i} r(u)du} I \left(\frac{1}{B(T_{i-1}, T_i)} - (1 + sR_S(t)) \right) \middle| \mathcal{F}_t \right] \\
&= I \sum_{i=1}^{n} \left\{ \mathbb{E}^Q \left[e^{-\int_t^{T_{i-1}} r(u)du} e^{-\int_{T_{i-1}}^{T_i} r(u)du} \frac{1}{B(T_{i-1}, T_i)} \middle| \mathcal{F}_t \right] - (1 + sR_S(t)) \mathbb{E}^Q \left[e^{-\int_t^{T_i} r(u)du} \middle| \mathcal{F}_t \right] \right\} \\
&= I \sum_{i=1}^{n} \left\{ \mathbb{E}^Q \left[e^{-\int_t^{T_{i-1}} r(u)du} \mathbb{E}^Q \left[e^{-\int_{T_{i-1}}^{T_i} r(u)du} \middle| \mathcal{F}_{T_{i-1}} \right] \frac{1}{B(T_{i-1}, T_i)} \middle| \mathcal{F}_t \right] - (1 + sR_S(t)) B(t, T_i) \right\} \\
&= I \sum_{i=1}^{n} [B(t, T_{i-1}) - (1 + sR_S(t)) B(t, T_i)] \\
&= I[B(t, T_0) - B(t, T_n) - \sum_{i=1}^{n} sR_S(t) B(t, T_i)].
\end{aligned}$$

スワップ取引の約定時点では現金の授受が行われないので，無裁定ならば
このスワップの価値 $\Pi_S(t)$ はゼロでなければならない．したがって，

$$R_S(t) = \frac{B(t,T_0) - B(t,T_n)}{\sum_{i=1}^{n} sB(t,T_i)}.$$

□

キャップとフロアー

定義 (キャップとフロアー)

- **キャップ**とは，将来のある期間に適用される変動金利があらかじめ決められた値である**キャップ・レート**を超えた場合，キャップ・レートを上回った分の利率をあらかじめ決めた所定の金額である想定元本に乗じた金額を, キャップ取引の売手が買手に対して支払うという契約.
- キャップに対して，将来，利子率が所定の値である**フロアー・レート**を下回った場合に，売手が買手に対して，下回った分の利率を想定元本に乗じた金額を支払う契約を**フロアー**という.
- スワップと異なりキャップおよびフロアーでは買手は売手に対して，各々**キャップ料**，**フロアー料**を支払って契約を約定する.

キャップ取引の例

例 (2)

3 ヶ月後から半年間，想定元本 1 億円，6 ヶ月 LIBOR に対してキャップ・レートを 5 %とするキャップ取引．
この場合, 3 ヶ月後の 6 ヶ月 LIBOR が 5 %以下であった場合には何も起こらないが，3 ヶ月後の 6 ヶ月 LIBOR が 5 %を超えて，例えば，7 %になった場合には，9 ヶ月後，

$$1\,\text{億} \times (0.07 - 0.05) \times \frac{1}{2} = 1,000,000\,\text{円}$$

をキャップの売手は買手に対して支払うことになる． □

キャップの適用される期間を時間 $[T_0, T_1]$ として，I = 想定元本，R_C = キャップ・レート，$R_L(T_0)$ = 時間 $[T_0, T_1]$ のキャップで適用される変動利子率（単利）とする．
キャップの取引を行った場合, 時点 T_1 に発生するキャッシュ・フローは

$$I \times s \times \{R_L(T_0) - R_C\}^+, \quad s := T_1 - T_0.$$

キャップ料の導出 I

定理 (キャップ料)

現時点を契約時点として，時点 T_0, $T_0 \geq 0$, から時点 T_1 に適用されるキャップ・レート R_C のキャップ料 Π_C は，

$$\Pi_C = R_C^* I \mathbb{E}^Q \left[\mathrm{e}^{-\int_0^{T_0} r(u)du} \left\{ \frac{1}{R_C^*} - B(T_0, T_1) \right\}^+ \right], \qquad R_C^* := 1 + sR_C. \quad (4)$$

(4) より，キャップは満期時点 T_1，額面 1 円の割引債を原資産とする満期時点 T_0，行使価格 $\frac{1}{R_C^*}$ のヨーロピアン・プット・オプションと看做すことができる．

証明

$$\Pi_C = \mathbb{E}^Q\left[e^{-\int_0^{T_1} r(u)du} Is\{R_L(T_0) - R_C\}^+\right].$$

ここで (2) を代入すると

$$\begin{aligned}
\Pi_C &= \mathbb{E}^Q\left[e^{-\int_0^{T_1} r(u)du} I\left\{\frac{1}{B(T_0,T_1)} - (1+sR_C)\right\}^+\right] \\
&= \mathbb{E}^Q\left[e^{-\int_0^{T_1} r(u)du} I\left\{\frac{1}{B(T_0,T_1)} - R_C^*\right\}^+\right] \\
&= \mathbb{E}^Q\left[e^{-\int_0^{T_0} r(u)du} e^{-\int_{T_0}^{T_1} r(u)du} I\left\{\frac{1}{B(T_0,T_1)} - R_C^*\right\}^+\right] \\
&= \mathbb{E}^Q\left[e^{-\int_0^{T_0} r(u)du} \mathbb{E}^Q\left[e^{-\int_{T_0}^{T_1} r(u)du}\middle|\mathcal{F}_{T_0}\right] I\left\{\frac{1}{B(T_0,T_1)} - R_C^*\right\}^+\right] \\
&= \mathbb{E}^Q\left[e^{-\int_0^{T_0} r(u)du} B(T_0,T_1) I\left\{\frac{1}{B(T_0,T_1)} - R_C^*\right\}^+\right] \\
&= \mathbb{E}^Q\left[e^{-\int_0^{T_0} r(u)du} I\left\{1 - B(T_0,T_1)R_C^*\right\}^+\right] \\
&= R_C^* I \mathbb{E}^Q\left[e^{-\int_0^{T_0} r(u)du} \left\{\frac{1}{R_C^*} - B(T_0,T_1)\right\}^+\right].
\end{aligned}$$

□

問題

問 1 例 (1) と同じスワップ取引において，金利交換時点 $T_1 = 0.5,\ T_2 = 1,\ T_3 = 1.5,\ T_4 = 2$ に満期となる額面 1 円の割引債価格が次のとおり与えられているとした場合，適正なスワップ・レートはいくらとなるか？

$$B(0, T_1) = 0.97532, \qquad B(0, T_2) = 0.95129,$$
$$B(0, T_3) = 0.92795, \qquad B(0, T_4) = 0.90531.$$

問 2 現時点を契約時点として時点 $T_0,\ T_0 \geq 0,$ から時点 T_1 に適用されるフロアー・レート R_F, 想定元本 I のフロアー料 Π_F が，

$$\Pi_F = R_F^* I \mathbb{E}^Q \left[\mathrm{e}^{-\int_0^{T_0} r(u) du} \left\{ B(T_0, T_1) - \frac{1}{R_F^*} \right\}^+ \right],$$
$$R_F^* := 1 + s R_F$$

と与えられることを示せ.