デリバティブ論

第 8 回 リスク・ヘッジ

岩城 秀樹

京都大学みずほ証券寄付講座

2018 年 1 月 11 日

デルタ・ヘッジ

各時点で
デリバティブ呼値 1 単位の買いに対して，
$\dfrac{\partial S_X(t)}{\partial S(t)}$ 単位の原資産の空売りポジションをとる
この場合，時点 t，$t \geq 0$，でのポジションの価値を $\Pi(t)$ とすると，
定理 2.1 の証明と同様にして

$$\mathrm{d}\Pi(t) = r\Pi(t)\mathrm{d}t \iff \Pi(t) = \Pi(0)\mathrm{e}^{rt}.$$

∴ デリバティブの価格変動リスクはヘッジされる．

デリバティブ呼値 1 単位に対して，その原資産をデルタ単位，デリバティブと反対のポジションをとることによって将来の価格変動リスクをヘッジする方法をデルタ・ヘッジという．

ダイナミック・ヘッジ I

各時点での保有資産のポジションを連続的に変化させてリスク・ヘッジを行う方法をダイナミック・ヘッジという.

時点 t に満期時点 T_f, $T_f \geq t$, の指数先物を呼値 $\theta_f(t)$ 単位買い建てたとして, 時点 $t+\Delta t$ で反対売買を行うことによってポジションを清算する.

$F(t)$ を時点 t における指数先物価格とすると，これら一連の取引によって発生するキャッシュ・フローは，時点 $t+\Delta t$ に

$\theta_f(t)(F(t+\Delta t) - F(t))$ となる.

$$
\begin{aligned}
&\theta_f(t)(F(t+\Delta t) - F(t)) \\
&= \theta_f(t)\left(S(t+\Delta t)\mathrm{e}^{r(T_f-t-\Delta t)} - S(t)\mathrm{e}^{r(T_f-t)}\right) \\
&= \theta_f(t)\mathrm{e}^{r(T_f-t-\Delta t)}\left(S(t+\Delta t) - S(t)\mathrm{e}^{r\Delta t}\right).
\end{aligned}
$$

$\therefore\ \theta_f(t) = \mathrm{e}^{-r(T_f-t-\Delta t)}$ と置くと，時間区間 $[t, t+\Delta t]$ における価値変化量は

$$
S(t+\Delta t) - S(t) - (S(t)\mathrm{e}^{r\Delta t} - S(t)).
$$

ダイナミック・ヘッジ II

∴ 各時点 t での先物の買い建て単位数を呼値 $\lim_{\Delta t \to 0} \theta_f(t) = \mathrm{e}^{-r(T_f - t)}$ 単位とするポジションの価値変化量は

$$\lim_{\Delta t \to 0} [S(t+\Delta t) - S(t) - (S(t)\mathrm{e}^{r\Delta t} - S(t))] = \mathrm{d}S(t) - rS(t)\mathrm{d}t. \quad (1)$$

∴ 原資産でデルタ・ヘッジを掛ける代わりに，デリバティブ呼値 1 単位の買いに対して先物を呼値 $\frac{\partial S_X(t)}{\partial S(t)}\mathrm{e}^{-r(T-t)}$ 単位売り建てたとすると，このポジションの価値変化量は

$$\begin{aligned} & \mathrm{d}S_X(t) - \frac{\partial S_X(t)}{\partial S(t)}(\mathrm{d}S(t) - rS(t)\mathrm{d}t) \\ = & \left(\frac{\partial S_X(t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S_X(t)}{\partial S(t)^2}\sigma^2 S(t)^2\right)\mathrm{d}t + \frac{\partial S_X(t)}{\partial S(t)}\mathrm{d}S(t) \\ & - \frac{\partial S_X(t)}{\partial S(t)}(\mathrm{d}S(t) - rS(t))\,\mathrm{d}t = rS_X(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

となって，確定した値となり，リスク・ヘッジされる.

ポートフォリオ・インシュアランス I

株価指数プット・オプションを購入することによって保有ポートフォリオの価値が所定の値を下回るリスク，すなわち下方リスクをヘッジすることができる．
下方リスクをヘッジするということは，ポートフォリオ価値が一定値を下回ることについて保険を掛けるという意味合いをもつ．∴ このリスク・ヘッジ手法はポートフォリオ・インシュアランスと呼ばれている．
$V_p(t)$ を時点 t，$t \geq 0$，における保有ポートフォリオの価値とし，このポートフォリオの時点 T での価値 $V_p(T)$ が所定の値 Π^* を下回らないようにすることを考える．

$$
\begin{aligned}
S(t) \quad &:= \quad \text{時点 } t \text{ における株価指数の値}, \\
m \quad &:= \quad \text{株価指数オプションの株価指数に対する倍率},
\end{aligned}
$$

とし，時間区間 $[0, T]$ における株価指数の収益率 $\tilde{r}_I$ とポートフォリオ収益率 $\tilde{r}_p$ の間に，

$$
\tilde{r}_p = rT + \beta(\tilde{r}_I - rT) + \tilde{\epsilon}_p \tag{2}
$$

という回帰式が成立しているとする．

$$
\begin{aligned}
\tilde{r}_p \quad &\equiv \quad \frac{V_p(T) - V_p(0)}{V_p(0)} = \frac{V_p(T)}{V_p(0)} - 1. \\
\therefore \quad V_p(T) \quad &= \quad V_p(0)(1 + \tilde{r}_p). \\
\tilde{r}_I \quad &\equiv \quad \frac{S(T) - S(0)}{S(0)} = \frac{S(T)}{S(0)} - 1.
\end{aligned}
$$

$\therefore$ (2) の $\tilde{\epsilon}_p$ を無視すれば，

$$
\begin{aligned}
V_p(T) &= V_p(0)(1+\tilde{r}_p) \\
&= V_p(0)(1+rT(1-\beta)+\beta\tilde{r}_I) \\
&= V_p(0)\left(1+rT(1-\beta)+\beta\left(\frac{S(T)}{S(0)}-1\right)\right) \\
&= V_p(0)(1-\beta)(1+rT)+V_p(0)\beta\frac{S(T)}{S(0)}. \qquad (3)
\end{aligned}
$$

ここで，保有ポートフォリオに加えて満期時点 T，行使価格 K の株価指数のヨーロピアン・プット・オプションを n 枚購入する．時点 T でのオプションを加えたポートフォリオの価値 $\Pi(T)$ は

$$
\begin{aligned}
\Pi(T) &= V_p(T) + n \times m \times \{K - S(T)\}_+ \\
&= \begin{cases} V_p(0)(1-\beta)(1+rT) + \left(V_p(0)\beta\frac{S(T)}{S(0)} - nmS(T)\right) + nmK, & S(T) \le K \\ V_p(0)(1-\beta)(1+rT) + V_p(0)\beta\frac{S(T)}{S(0)}, & S(T) > K \end{cases}.
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad n := \beta \frac{V_p(0)}{m \times S(0)} \tag{4}$$

とすれば,

$$\Pi(T) \quad = \quad \begin{cases} V_p(0)(1-\beta)(1+rT) + V_p(0)\beta \frac{K}{S(0)}, & S(T) \leq K \\ V_p(0)(1-\beta)(1+rT) + V_p(0)\beta \frac{S(T)}{S(0)}, & S(T) > K. \end{cases}$$

$\therefore$ $V_p(T)$ がどのような値になろうとも，ポートフォリオの価値は

$$V_p(0)(1-\beta)(1+rT) + V_p(0)\beta \frac{K}{S(0)}$$

を下回らない.

∴ 時点 T でのポートフォリオ価値が所定の金額 Π^* を下回らないようにするには,

$$\Pi^* = V_p(0)(1-\beta)(1+rT) + V_p(0)\beta\frac{K}{S(0)}$$

となるようにすればよい.
∴ 行使価格が

$$K = [\Pi^* - V_p(0)(1-\beta)(1+rT)]\frac{S(0)}{V_p(0)\beta} \tag{5}$$

のプット・オプションを購入すればよい.

ポートフォリオ・インシュアランス VI

各時点 t, $t \geq 0$, での原資産の保有単位数 $\theta(t)$ と無危険資産の保有単位数 $\theta_0(t)$ を，各々

$$\theta(t) := m \times \frac{\partial P(t)}{\partial S(t)}, \qquad \theta_0(t) := m \times \frac{1}{S_0(t)}\left(P(t) - \frac{\partial P(t)}{\partial S(t)} S(t)\right)$$

とする自己資金調達取引戦略を行えば，希望するプット・オプション 1 枚と等価なポートフォリオを作り出せる.
∴ プット・オプションの代わりにこの等価ポートフォリオを用いることで任意の下限値に対してポートフォリオ・インシュアランスを行うことが可能となる.
しかしながら株価指数を実際に売買することは困難.
∴ 株価指数を取引する代わりに株価指数先物と無危険資産を用いて株価指数の等価ポートフォリオを作り, このポートフォリオの取引を通じてポートフォリオ・インシュアランスを行う.
指数先物と無危険資産を用いて指数の等価ポートフォリオを作ることを指数先物による指数の代替という.

指数先物の指数に対する倍率を m_f として各時点 t で先物の買い建て枚数と無危険資産の保有単位数を各々 $\frac{e^{-r(T_f-t)}}{m_f}$, $\frac{S(t)}{S_0(t)}$ とする自己資金調達取引戦略をとったとする．
このとき，(1) より，原資産 1 単位を保有した場合と同じキャッシュ・フローが得られることになる．
∴ 指数先物の指数の代替によってポートフォリオ・インシュアランスを行うには，ヘッジ期間中のすべての時点 t, $t \geq 0$ で指数先物の買い建て単位数 $\theta_f(t)$，および無危険資産の保有単位数 $\theta_0(t)$ が

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \theta_f(t) & = & n \times m \times \frac{\partial P(t)}{\partial S(t)} \times \frac{e^{-r(T_f-t)}}{m_f}, \\ \theta_0(t) & = & n \times m \times \frac{P(t)}{S_0(t)} \end{array} \right. \tag{6}$$

となる自己資金調達取引戦略を行えばよい.

問題 I

問 1 $\boldsymbol{\Phi}$ を標準正規分布の分布関数とする．次の文章内の $\boldsymbol{d}$ の値を求めよ．

現在, 行使価格 $\mathbf{19,000}$ 円，1 ヶ月後に満期となる日経 225 プット・オプションを 1 枚保有しているとする．このオプションの価格変動リスクをデルタ・ヘッジするには原資産である日経平均を何単位空売りすればよいであろうか? ただし，無危険利子率 $\boldsymbol{r}$ は 1 %，ボラティィリティー $\boldsymbol{\sigma}$ は 20 %とし，現時点での日経平均株価は 19,000 円であるとする．当該オプションのデルタの値を求めると，

$$\frac{\partial P(0)}{\partial S} = -\Phi(d) = -0.506.$$

したがって，日経平均を $\mathbf{-0.506 \times 1,000 = -506}$ 単位空売りする．すなわち，506 単位購入すればよい．

問題 II

問 2　問 1 と同じ数値設定の下で，日経 225 プット・オプションの価格変動リスクを 2 ヶ月後に満期となる日経 225 先物を用いてヘッジするには現時点で日経 225 先物を何枚空売り（あるいは買い建て）すればよいであろうか?

問 3　問 1 と同じ数値設定の下で，現在保有しているポートフォリオの日経平均に対するベータ値が **2**，ポートフォリオの価値が 1 億円であるとする．このとき，日経 225 プット・オプションを用いて，3 ヶ月後のポートフォリオの価値が 9 千万円を下回らないようにするには，行使価格がいくらのプット・オプションを何枚買えば良いか？