デリバティブ論

第 7 回 アメリカン・オプションの評価

岩城 秀樹

京都大学みずほ証券寄附講座

December 27, 2018

2 項モデル: I

- 原資産価格の変動が 2 項モデルに従う場合のアメリカン・オプションの価格評価.
- アメリカン・オプションは，保有者が権利行使時点 $\tau \in \mathcal{T} := \{0, 1, 2, \cdots, T\}$ を決定することによって時点 τ でキャッシュ・フロー $X(\tau, S(\tau))$ が発生するデリバティブ.
- アメリカン・プット・オプションを購入した場合,

$$X(\tau, S(\tau)) = \{K - S(\tau)\}^+.$$

- アメリカン・コール・オプションを購入した場合,

$$X(\tau, S(\tau)) = \{S(\tau) - K\}^+.$$

- 権利行使時点 τ, $\tau = t, t+1, \cdots, T$, $t \in \mathcal{T}$, を所与とするとアメリカン・オプションの時点 t での価値は

$$\mathbb{E}^Q\left[(1+r)^{-(\tau-t)} X(\tau, S(\tau)) \middle| S(t)\right]. \tag{1}$$

$$
\begin{aligned}
A^*(t) \quad &:= \quad \max_{\tau \in \mathcal{T}(t)} \mathbb{E}^Q \left[(1+r)^{-(\tau - t)} X(\tau, S(\tau)) \middle| S(t) \right], \\
&\quad\ \ \tau(t) := \{t, t+1, \cdots, T\},\ t \in \mathcal{T}
\end{aligned} \tag{2}
$$

とすると，アメリカン・オプションの時点 0 での価格は $A^*(0)$.

定理 (1)

$\{A(t) : t \in \mathcal{T}\}$ を

$$
\left\{
\begin{aligned}
A(T) \quad &= \quad X(T, S(T)), \\
A(t) \quad &= \quad \max \left\{ X(t, S(t)), \mathbb{E}^Q \left[(1+r)^{-1} A(t+1) \middle| S(t) \right] \right\}, \\
&\qquad t = 0, 1, \cdots, T-1
\end{aligned}
\right. \tag{3}
$$

によって，時点 T からはじめて，順次 $t = T-1, T-2, \cdots, 0$ として (3) で定義される関数列とすると，$A^*(t) = A(t)$.

証明

権利行使した場合の価値と権利行使しなかった場合の価値を比較して，前者が大きい場合に権利行使するという権利行使政策をとった場合，
当該デリバティブのキャッシュ・フローの各時点 $t \in \mathcal{T}$ 価値 $= A(t)$ を示す．
時点 T では，自明に $A(T) = X(T, S(T))$.
ある 1 時点 $s+1$, $s = 0, 1, 2, \cdots, T-1$，での価値が $A(s+1)$ と与えられていたとすると，この権利行使政策を行った場合の時点 s でのキャッシュ・フローの価値は

$$A(s) = \max\left\{X(s, S(s)), \mathbb{E}^{Q}\left[(1+r)^{-1}A(s+1)\middle| S(s)\right]\right\}.$$

∴帰納法により，この権利行使政策を行った場合の任意の時点 $t \in \mathcal{T}$ での価値は，(3) で定義される $A(t)$.

続いて，$A(t) = A^*(t),\ t \in \mathcal{T}$ を示す. 時点 $t = T$ および時点 $t = T-1$ では自明に $A(t) = A^*(t)$. 時点 $t = 0, 1, \cdots, T-2$ では，$A^*(t) \geq A(t)$ は明らかであるから，$A^*(t) \leq A(t)$ を示せばよい.
いま，ある一時点 $t+1,\ t = 0, 1, \cdots, T-2$，で $A^*(t+1) = A(t+1)$ であったとする．(2) より，

$$A(t+1) = \max_{\tau \in \mathcal{T}(t+1)} \mathbb{E}^Q \left[\frac{X(\tau, S(\tau))}{(1+r)^{\tau-(t+1)}} \middle| S(t+1) \right].$$

これを (3) に代入すると，

$$\begin{aligned}
A(t) &= \max \left\{ X(t, S(t)), \mathbb{E}^Q \left[\frac{1}{1+r} \left(\max_{\tau \in \mathcal{T}(t+1)} \mathbb{E}^Q \left[\frac{X(\tau, S(\tau))}{(1+r)^{\tau-(t+1)}} \middle| S(t+1) \right] \right) \middle| S(t) \right] \right\} \\
&= \max \left\{ X(t, S(t)), \mathbb{E}^Q \left[\max_{\tau \in \mathcal{T}(t+1)} \mathbb{E}^Q \left[\frac{X(\tau, S(\tau))}{(1+r)^{\tau-t}} \middle| S(t+1) \right] \middle| S(t) \right] \right\} \\
&\geq \max \left\{ X(t, S(t)), \max_{\tau \in \mathcal{T}(t+1)} \mathbb{E}^Q \left[\mathbb{E}^Q \left[\frac{X(\tau, S(\tau))}{(1+r)^{\tau-t}} \middle| S(t+1) \right] \middle| S(t) \right] \right\} \\
&= \max \left\{ X(t, S(t)), \max_{\tau \in \mathcal{T}(t+1)} \mathbb{E}^Q \left[\frac{X(\tau, S(\tau))}{(1+r)^{\tau-t}} \middle| S(t) \right] \right\} \\
&= \max_{\tau \in \mathcal{T}(t)} \mathbb{E}^Q \left[\frac{X(\tau, S(\tau))}{(1+r)^{\tau-t}} \middle| S(t) \right] = A^*(t).
\end{aligned}$$

$\therefore\ A^*(t) = A(t)$ が成立. $\square$

系 (1)

$$\begin{cases} AP(T,S(T)) = \{K - S(T)\}_+, \\ AP(t,S(t)) \\ \quad = \max\Big[\{K - S(t)\}_+, \\ \qquad\qquad \frac{1}{R}(q_u AP(t+1,S(t)u) + q_d AP(t+1,S(t)d))\Big], \\ \qquad\qquad t = 0,1,\cdots,T-1, \end{cases} \tag{4}$$

$$q_u := \frac{R-d}{u-d},\ q_d = 1 - q_u,\ R := 1 + r.$$

- $X(t, S(t))$ を時点 t で権利行使を行った場合のアメリカン・オプションのキャッシュ・フローとする．すなわち，コール・オプションであれば,
$$X(t, S(t)) = \{S(t) - K\}^{+}.$$
プット・オプションであれば,
$$X(t, S(t)) = \{K - S(t)\}^{+}.$$
- $\tau \in [0, T]$ を権利行使時点とすると，オプションの現在価格は
$$\mathbb{E}^{Q}\left[\mathrm{e}^{-r\tau} X(S(\tau), \tau)\right]. \tag{5}$$
∴アメリカン・オプションの現在価格は
$$\sup_{\tau\in[0,T]} \mathbb{E}^{Q}\left[\mathrm{e}^{-r\tau} X(\tau, S(\tau))\right]. \tag{6}$$

BS モデル: II

命題 (1)

満期までの残存期間中，配当等の支払いのない場合，アメリカン・コール・オプション価格はヨーロピアン・オプション価格に一致する．

証明　満期前の任意の時点 $\tau \in [0, T]$ で権利行使した場合のキャッシュ・フローと満期時点で権利行使した場合のキャッシュ・フローの時点 τ での価値を比較する．(5) より，両者の価値は次のとおりである．

$$
\begin{array}{lcl}
\text{時点 } \tau \text{ に権利行使した場合} & : & \{S(\tau) - K\}^+, \\
\text{満期に権利行使した場合} & : & \mathbb{E}^Q[\mathrm{e}^{-r(T-\tau)}\{S(T) - K\}^+ | \mathcal{F}_\tau].
\end{array}
$$

ただし，ここで K は行使価格を表わす．

Jensen の不等式とリスク中立確率測度の定義から

$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}^Q[\mathrm{e}^{-r(T-\tau)}\{S(T)-K\}^+|\mathcal{F}_\tau] \\
\geq\ & \left\{\mathbb{E}^Q[\mathrm{e}^{-r(T-\tau)}(S(T)-K)|\mathcal{F}_\tau]\right\}^+ \\
=\ & \left\{\mathbb{E}^Q[\mathrm{e}^{-r(T-\tau)}S(T)|\mathcal{F}_\tau]-\mathrm{e}^{-r(T-\tau)}K\right\}^+ \\
=\ & \left\{S(\tau)-\mathrm{e}^{-r(T-\tau)}K\right\}^+.
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \quad \mathbb{E}^Q\left[\mathrm{e}^{-r(T-\tau)}\{S(T)-K\}^+\middle|\mathcal{F}_\tau\right] \geq \{S(\tau)-K\}^+.
$$

$$
\therefore \quad \sup_{\tau\in\mathbb{S}} \mathbb{E}^Q\left[\mathrm{e}^{-r\tau}\{S(\tau)-K\}^+\right] = \mathbb{E}^Q\left[\mathrm{e}^{-rT}\{S(T)-K\}^+\right].
$$

∴ 題意を得る. □

$AP(t,x)$:= 原資産価格が x のときの時点 t でのアメリカン・プット・オプション価格とする.
アメリカン・オプションも原資産の価値に依存してその価値が決まるデリバティブであるから，権利行使されなければ BS 型偏微分方程式（基本方程式）を満たす.
$f(t,x) := AP(t,x)$ とすると，

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} + rx\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} + \frac{\sigma^2 x^2}{2}\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2} = rf(t,x), \tag{7}$$

$$\begin{cases} f(t, S_P^*(t)) = K - S_P^*(t), \\ \frac{\partial f(t, S_P^*(t))}{\partial x} = -1, \\ f(T,x) = \{K - x\}_+, \\ \lim_{x\to\infty} f(t,x) = 0. \end{cases} \tag{8}$$

２項モデルにおける時点の集合 $\{0, 1, 2, \cdots, T\}$ を，各小時間区間 $[t, t+1]$, $t = 0, 1, \cdots, T-1$，を n 等分割した $\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \cdots, 1, 1+\frac{1}{n}, \cdots, 2, 2+\frac{1}{n}, \cdots, T\}$ で置き換えて

$$\begin{aligned} \hat{S}(0) &= S, \quad \hat{S}(t_{n,i}) = \begin{cases} \hat{S}(t_{n,i-1})u, \\ \hat{S}(t_{n,i-1})d, \end{cases} \quad u := e^{\sigma/\sqrt{n}},\ d := u^{-1}, \\ S_0(0) &= 1, \quad S_0(t_{n,i}) = S_0(t_{n,i-1})R, \quad R := e^{r/n}, \end{aligned}$$

$$t_{n,0} = 0, \quad t_{n,i} = \frac{i}{n},\ i = 1, 2, \cdots, n \times T,$$

という２項モデルを考える．

定理 (2)

$\{X_{n,i} : i = 1, 2, \cdots, n \times T\}$ を

$$X_{n,i} := \ln\left(\frac{\hat{S}(t_{n,i})}{\hat{S}(t_{n,i-1})}\right) = \begin{cases} \ln(u) : & \text{確率 } q_u, \\ \ln(d) : & \text{確率 } 1 - q_u \end{cases},$$

$$q_u := \frac{R-d}{u-d}, \quad i = 1, 2, \cdots, n \times T,$$

で定義される独立な確率変数の列とする．このとき，

$$Z_n := \ln\left(\frac{\hat{S}(T)}{S}\right) = X_{n,1} + X_{n,2} + \cdots + X_{n,nT}$$

は $n \to \infty$ としたとき，平均 $\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T$，分散 $\sigma^2 T$ の正規分布に従う確率変数に法則収束する．

証明

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}^Q[Z_n] = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T, \quad \lim_{n\to\infty}\mathrm{Var}^Q[Z_n] = \sigma^2 T$$

を示す.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^Q[Z_n] &= [\ln(u)q_u + \ln(d)(1-q_u)]nT \\
&= \left[\frac{\sigma}{\sqrt{n}}q_u - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}(1-q_u)\right]nT, \\
\mathrm{Var}^Q[Z_n] &= [(\ln(u)-\ln(d))^2 q_u(1-q_u)]nT \\
&= \frac{4\sigma^2}{n}q_u(1-q_u)nT.
\end{aligned}$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
q_u &= \frac{e^{r/n} - e^{-\sigma/\sqrt{n}}}{e^{\sigma/\sqrt{n}} - e^{-\sigma/\sqrt{n}}} \\
&= \frac{\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{1}{n} + o(n^{-1})}{2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} + o(n^{-1})} \\
&= \frac{\sigma + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{n}} + o(n^{-\frac{1}{2}})}{2\sigma + o(n^{-\frac{1}{2}})}, \\
1 - q_u &= \frac{\sigma - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{n}} + o(n^{-\frac{1}{2}})}{2\sigma + o(n^{-\frac{1}{2}})}
\end{aligned}
$$

であることに注意すると,

$$\mathbb{E}^Q[Z_n] = \frac{2\sigma\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + o(n^0)}{2\sigma + o(n^{-\frac{1}{2}})}T.$$

よって， $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}^Q[Z_n] = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T$ を得る．また，

$$\lim_{n\to\infty} q_u = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n\to\infty}(1 - q_u) = \frac{1}{2}$$

であるから $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}^Q[Z_n] = \sigma^2 T$ となる．

BS モデル: IX(2 項モデルによる近似法 6)

さらに，

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sum_{i=1}^{nT} \mathbb{E}^{Q}[|X_{n,i} - \mathbb{E}^{Q}[X_{n,i}]|^{3}]}{\left(\sum_{i=1}^{nT} \mathbb{E}^{Q}[|X_{n,i} - \mathbb{E}^{Q}[X_{n,i}]|^{2}]\right)^{\frac{3}{2}}} \\
=&\frac{(\ln(u) - \ln(d))^{3} q_u(1 - q_u)(q_u^{2} + (1 - q_u)^{2})n}{((\ln(u) - \ln(d))^{2} q_u(1 - q_u)n)^{\frac{3}{2}}} \\
=&\frac{1}{\sqrt{q_u(1 - q_u)n}} - 2\sqrt{\frac{q_u(1 - q_u)}{n}} \to 0 \ (n \to \infty)
\end{aligned}
\tag{9}
$$

より，リャプノフ条件を満たすので中心極限定理から定理の結論を得る． □

定義

確率変数列 $\{X_n : n = 1, 2, \cdots\}$ と確率変数 X において

$$\lim_{n \to \infty} \Pr[X_n \leq x] = \Pr[X \leq x], \qquad x \in \mathbb{R}$$

となるならば，$\{X_n : n = 1, 2, \cdots\}$ は X に法則収束あるいは分布収束するという.

確率変数列 $X = \{X_{n,1}, X_{n,2}, \cdots, X_{n,k(n)} : n = 1, 2, \cdots\}$ は互いに独立にであるとし，

$$\mathbb{E}[X_{n,i}] = m_{n,i}, \quad \sigma^2_{n,i} := \mathbb{E}[X^2_{n,i}] < \infty, \quad i = 1, 2, \cdots, k(n) \qquad (10)$$

とする．ただし，ここで $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ は $k(n) \to \infty (n \to \infty)$ とする．このとき任意の $\epsilon > 0$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k(n)} \frac{1}{s_n^2} \mathbb{E}\left[(X_{n,i} - m_{i,n})^2 1_{\{|X_{n,i} - m_{i,n}| \geq \epsilon s_n\}}\right] = 0, \quad s_n^2 := \sum_{i=1}^{k(n)} \sigma^2_{n,i}$$

となるとき，X はリンドバーク (Lindeberg) 条件を満たすという．

定理 (中心極限定理)

確率変数列 X が (10) とリンドバーク条件を満たすとする．このとき，

$Z_n := \dfrac{\sum_{i=1}^{k(n)} (X_{n,i} - m_{n,i})}{s_n}$ は標準正規分布確率変数に分布収束する．

定理 (リンドバーグ条件が成立するための十分条件)

確率変数列 X が次のリャプノフ (Liapounov) 条件：

$$\exists h \in \mathbb{N};\ h \geq 3, \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{k(n)} \frac{1}{s_n^h} \mathbb{E}[|X_{n,i} - m_{n,i}|^h] = 0$$

を満たすならば，リンドバーグ条件が成立する．

$$\because \quad |X_{n,i} - m_{i,n}| \geq \epsilon s_n \Longrightarrow \frac{|X_{n,i} - m_{i,n}|^{h-2}}{(\epsilon s_n)^{h-2}} \geq 1 \ \forall\, h \geq 3$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{k(n)} \frac{1}{s_n^2} \mathbb{E}\left[(X_{n,i} - m_{i,n})^2 \mathbf{1}_{\{|X_{n,i} - m_{i,n}| \geq \epsilon s_n\}}\right]$$

$$\leq \sum_{i=1}^{k(n)} \frac{1}{\epsilon^{h-2} s_n^h} \mathbb{E}\left[|X_{n,i} - m_{i,n}|^h \mathbf{1}_{\{|X_{n,i} - m_{i,n}| \geq \epsilon s_n\}}\right] \leq \sum_{i=1}^{k(n)} \frac{1}{\epsilon^{h-2} s_n^h} \mathbb{E}\left[|X_{n,i} - m_{i,n}|^h\right] \qquad \square$$

問題

問 1　式 (9) が成立することを確かめよ．

問 2　時点 t，$t = 0, 1, 2$，での原資産価格を S_t として，原資産価格の変動が，以下の表のとおり与えられている２期間モデルを考える．

根元事象	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$
ω_1	$S_0 = 5$	$S_1 = 8$	$S_2 = 9$
ω_2	$S_0 = 5$	$S_1 = 8$	$S_2 = 6$
ω_3	$S_0 = 5$	$S_1 = 4$	$S_2 = 6$
ω_4	$S_0 = 5$	$S_1 = 4$	$S_2 = 3$

無リスク金利 $r = 0.1$ としたとき，行使価格 $K = 6$ のアメリカン・プット・オプションの現在価格 ($t = 0$ での価格) を求めよ．また，満期前権利行使が最適となるのは，いつか？

問 3　$t \in [0, T]$ で取引可能な連続時間モデルを考える．時点 t での原資産価格を $S_t \geq 0$ とし，$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を凸関数として，時点 $t \in [0, T]$ で権利行使した場合のキャッシュ・フローが $g(S_t)$, $g(0) = 0$ となるアメリカン・タイプのデリバティブがあるとする．このとき，このデリバティブの最適行使時点は時点 T であることを示せ．ただし，無リスク金利は，一定の非負値であるとする．