デリバティブ論

第 6 回 ブラック・ショールズ式

岩城 秀樹

京都大学みずほ証券寄附講座

November 15, 2018

ブラック・ショールズモデル I

時点 0 から時点 T の間の任意の時点で取引が可能な無摩擦，無裁定の完全競争的市場.

仮定 (1)

$S(t) :=$ 時点 $t \in [0, T]$ での原資産価格,

$$S(t) = S \times \exp(\hat{\mu} t + \sigma W(t)), \qquad S > 0. \tag{1}$$

ただし，S，$\hat{\mu}$，σ は定数，$\{W(t) : t \in [0, T]\}$ は標準ブラウン運動.

伊藤の公式 $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}S(t) &= \mu S(t)\mathrm{d}t + \sigma S(t)\mathrm{d}W(t); \\ S(0) &= S, \qquad \mu := \hat{\mu} + \sigma^2/2. \end{aligned} \tag{2}$$

(2) を離散近似すると

$$S(t + \Delta t) - S(t) = \mu S(t)\Delta t + \sigma S(t)[W(t + \Delta t) - W(t)].$$

仮定 (2)

時点 $t \in [0, T]$ での価格が
$$S_0(t) = \mathrm{e}^{rt} \tag{3}$$
となる資産がある．ただし，r は正の定数とする．

(3) の意味

この資産を連続時間モデルにおける無危険資産と呼ぶ．
利子率を $\frac{r}{n}$ として 1 単位時間に複利計算で $n \to \infty$ 回利息が付く資産に 1 円投資
$\Rightarrow$ 単位時間後の元利合計は $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$.
$\Rightarrow$ $x := \frac{n}{r}$ とすると，$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{xr}$.
$\Rightarrow$ e の定義から，$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = \mathrm{e}^r$.
$\Rightarrow$ 連続複利利子率 := 単位時間後の元金 1 円あたりの元利合計が e^r 円となるときの r. □

問題

『 時点 T にそのときに限り $X(T, S(T))$ のキャッシュ・フローをもたらすデリバティブの現在価格の導出.』

定義 (1)

$(\theta_0, \theta) := \{(\theta_0(t), \theta(t)) : t \in [0, T]\}$ が

$$\begin{aligned}&\theta_0(t)S_0(t) + \theta(t)S(t)\\&\quad = \theta_0(0)S_0(0) + \theta(0)S(0) + \int_0^t \theta_0(s)\mathrm{d}S_0(s) + \int_0^t \theta(s)\mathrm{d}S(s),\\&\qquad t \in [0, T]\end{aligned} \tag{4}$$

を満たすとき，(θ_0, θ) を $\{(S_0(t), S(t)) : t \in [0, T]\}$ に関する自己資金調達取引戦略あるいは自己充足取引戦略と呼ぶ.

自己資金調達取引戦略 II

(4) 右辺の $\int_0^t \theta_0(s)\mathrm{d}S_0(s) + \int_0^t \theta(s)\mathrm{d}S(s)$ は， $0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k = t$ を時間区間 $[0, t]$ の適当な小分割としたときの

$$\sum_{j=0}^{k-1} \theta_0(t_{j+1})(S_0(t_{j+1}) - S_0(t_j)) + \sum_{j=0}^{k-1} \theta(t_{j+1})(S(t_{j+1}) - S(t_j))$$

の適当な意味での極限.

$\therefore\ \ 0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = T$ を時間区間 $[0, T]$ の適当な小分割として (4) を離散近似すると,

$$\begin{aligned} \theta_0(t_i)S_0(t_i) + \theta(t_i)S(t_i) &= \theta_0(t_{i+1})S_0(t_i) + \theta(t_{i+1})S(t_i), \\ & \quad i = 0, 1, \cdots, n-1. \end{aligned}$$

基本方程式 I

$S_X(t) :=$ デリバティブの時点 $t \in [0,T]$ での価格 $S_X(t)$.

定理 (1)(デリバティブ基本方程式)

$$\frac{\partial S_X(t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S_X(t)}{\partial S(t)^2}\sigma^2 S(t)^2 + \frac{\partial S_X(t)}{\partial S(t)} r S(t) = r S_X(t). \tag{5}$$

証明

各時点 t で，デリバティブ 1 単位，原資産 $-\frac{\partial S_X(t)}{\partial S(t)}$ 単位保有するという $\{(S_X(t), S(t)) : t \in [0,T]\}$ に関する自己資金調達取引戦略をとる．

$$\Pi(t) := \text{この取引戦略に基づくポートフォリオの時点 } t \text{ での価値.}$$

$$\mathrm{d}\Pi(t) = \mathrm{d}S_X(t) - \frac{\partial S_X(t)}{\partial S(t)}\mathrm{d}S(t).$$

伊藤の公式より，

$$\mathrm{d}S_X(t) = \left(\frac{\partial S_X(t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S_X(t)}{\partial S(t)^2}\sigma^2 S(t)^2\right)\mathrm{d}t + \frac{\partial S_X(t)}{\partial S(t)}\mathrm{d}S(t).$$

$$\therefore \qquad \mathrm{d}\Pi(t) = \left(\frac{\partial S_X(t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S_X(t)}{\partial S(t)^2}\sigma^2 S(t)^2\right)\mathrm{d}t.$$

$\therefore$ 微小時間を考えた場合,

ポートフォリオの価値増加量＝各時点 t で確定した値.

$\therefore$ 無裁定 $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} & \text{ポートフォリオの価値増加量} \\ = \quad & \text{無危険利子率 } r \text{ で運用した場合の増加量.} \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \mathrm{d}\Pi(t) = \Pi(t) r \mathrm{d}t, \quad t \in [0, T].$$

$\Rightarrow$ (5). $\square$

$S^* := \left\{ S^*(t) := \frac{S(t)}{S_0(t)} : \ t \in [0,T] \right\}$ を原資産の割引価格過程と呼ぶ.

定義 (2)

確率 Q に関して，割引価格過程 S^* がマルチンゲールとなるとき，確率 Q をリスク中立確率と呼ぶ.

$$\text{定義} \Longrightarrow \quad S(t) = \mathbb{E}^Q\left[\mathrm{e}^{-r(s-t)} S(s) \middle| \mathcal{F}_t \right] \qquad s > t, \ s,t \in [0,T].$$

定理 (2)

$$\eta := \frac{r-\mu}{\sigma}, \qquad \xi := e^{\eta W(T) - \frac{\eta^2}{2}T}.$$

$\Rightarrow$ すべての事象 $\mathcal{B}$ に対して，

$$Q(\mathcal{B}) := \mathbb{E}[\xi 1_{\{\mathcal{B}\}}], \qquad 1_{\{\mathcal{B}\}} := \begin{cases} 1, & \omega \in \mathcal{B} \\ 0, & \omega \notin \mathcal{B} \end{cases} \tag{6}$$

で定義される Q はリスク中立確率となる.

リスク中立確率 II

証明　Q が確率となることは明らか．

$$\begin{aligned} S^*(t) &= \mathrm{e}^{-rt}S(t) = S\mathrm{e}^{(\mu-\frac{\sigma^2}{2}-r)t+\sigma W(t)}, \\ \hat{W}(t) &:= W(t) - \eta t, \quad t \in [0,T] \\ \Longrightarrow \quad S^*(t) &= S\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2}{2}t+\sigma \hat{W}(t)}. \end{aligned} \tag{7}$$

ギルサノフの定理から確率 Q の下で，$\{\hat{W}(t) : t \in [0,T]\}$ は標準ブラウン運動．

$$\begin{aligned} \therefore \quad \mathbb{E}^Q[S^*(s)|\mathcal{F}_t] &= \mathbb{E}^Q\left[S\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2}{2}s+\sigma\hat{W}(s)} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= \mathbb{E}^Q\left[S\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2}{2}t-\frac{\sigma^2}{2}(s-t)+\sigma\hat{W}(t)+\sigma(\hat{W}(s)-\hat{W}(t))} \middle| \mathcal{F}_t \right] \\ &= S^*(t)\mathbb{E}^Q\left[\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2}{2}(s-t)+\sigma(\hat{W}(s)-\hat{W}(t))} \right] \\ &= S^*(t)\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2}{2}(s-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\sigma x}\mathrm{d}N(x;0,(s-t)) \\ &= S^*(t)\mathrm{e}^{-\frac{\sigma^2}{2}(s-t)}\mathrm{e}^{\frac{\sigma^2}{2}(s-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}N(x;\sigma(s-t),(s-t)) = S^*(t). \end{aligned}$$

ただし，$N(x;m,s)$ は平均 m，分散 s の正規分布分布関数．　□

定理 (1)⇒

$$\begin{cases} \theta_0(t) & := & \frac{1}{rS_0(t)}\left(\frac{\partial S_X(t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 S_X(t)}{\partial S(t)^2}\sigma^2 S(t)^2\right), \\ \theta(t) & := & \frac{\partial S_X(t)}{\partial S(t)} \end{cases} \tag{9}$$

$$\Longrightarrow \quad S_X(t) = \theta_0(t)S_0(t) + \theta(t)S(t), \quad t \in [0,T].$$

$\therefore \ \{\theta_0(t) + \theta(t)S^*(t) : t \in [0,T]\}$ がリスク中立確率 Q の下でマルチンゲールとなれば,

$$\begin{aligned} S_X(0) &= \theta_0(0)S_0(0) + \theta(0)S(0) \\ &= \theta_0(0) + \theta(0)S^*(0) \\ &= \mathbb{E}^Q[\theta_0(T) + \theta(T)S^*(T)] \\ &= \mathbb{E}^Q\left[S_0(T)^{-1}(\theta_0(T)S_0(T) + \theta(T)S(T))\right] \\ &= \mathbb{E}^Q\left[\mathrm{e}^{-rT}X(T,S(T))\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

デリバティブ価格 II

補題 (1)

(θ_0, θ) が (S_0, S) に関する自己資金調達取引戦略
$\iff$ (θ_0, θ) は $(1, S^*)$ に関する自己資金調達取引戦略.

証明

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(t) \quad &:= \quad \theta_0(0)S_0(0) + \theta(0)S(0) \\ &\quad + \int_0^t \theta_0(s)\mathrm{d}S_0(s) + \int_0^t \theta(s)\mathrm{d}S(s),\ t \in [0, T]. \end{aligned}$$

$$\Lambda(t) := S_0(t)^{-1}, \qquad \mathcal{W}^*(t) := \mathcal{W}(t) \times \Lambda(t).$$

$\mathcal{W}(t) = \theta_0(t)S_0(t) + \theta(t)S(t)$,
すなわち (θ_0, θ) は (S_0, S) に関する自己資金調達取引戦略とする.

$$
\begin{aligned}
& \mathrm{d}\mathcal{W}^*(t) \\
= \;& \Lambda(t)\mathrm{d}\mathcal{W}(t) + \mathcal{W}(t)\mathrm{d}\Lambda(t) \\
= \;& \Lambda(t)(\theta_0(t)\mathrm{d}S_0(t) + \theta(t)\mathrm{d}S(t)) + (\theta_0(t)S_0(t) + \theta(t)S(t))\mathrm{d}\Lambda(t) \\
= \;& \theta_0(t)(\Lambda(t)\mathrm{d}S_0(t) + S_0(t)\mathrm{d}\Lambda(t)) + \theta(t)(\Lambda(t)\mathrm{d}S(t) + S(t)\mathrm{d}\Lambda(t)) \\
= \;& \theta_0(t) \times 0 + \theta(t)\mathrm{d}S^*(t),
\end{aligned}
$$

$$
\mathcal{W}^*(0) = \mathcal{W}(0)\Lambda(0) = \theta_0(0) + \theta(0)S^*(0).
$$

$$
\begin{aligned}
\iff \quad & \mathcal{W}^*(t) = \mathcal{W}^*(0) + \int_0^t \mathrm{d}\mathcal{W}^*(s) \\
\iff \quad & \theta_0(t) + \theta(t)S^*(t) \\
& = \theta_0(0) + \theta(0)S^*(0) + \int_0^t \theta(s)\mathrm{d}S^*(s), \; t \in [0, T].
\end{aligned}
$$

$\therefore \quad (\theta_0, \theta)$ は $(1, S^*)$ に関する自己資金調達取引戦略.

逆の場合も同様.

定理 (3)

$\{\theta_0(t)+\theta(t)S^*(t) : t\in[0,T],\ (\theta_0,\theta)\in\Theta(S_0,S)\}$ はリスク中立確率 Q の下でマルチンゲールとなる.

証明　補題 (1) より，$(\theta_0,\theta)\in\Theta(S_0,S)\Rightarrow(\theta_0,\theta)\in\Theta(1,S^*)$.
∴ 定義 (1) より，$s\geq t,\ s,t\in[0,T]$ に対して，

$$\theta_0(s)+\theta(s)S^*(s)=\theta_0(t)+\theta(t)S^*(t) + \int_0^s \theta(u)\mathrm{d}S^*(u)-\int_0^t \theta(u)\mathrm{d}S^*(u). \tag{11}$$

デリバティブ価格 V

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad & \mathbb{E}^Q[\theta_0(s) + \theta(s)S^*(s)|\mathcal{F}_t] \\
= \; & \mathbb{E}^Q\Big[\theta_0(t) + \theta(t)S^*(t) \\
& + \int_0^s \theta(u)\mathrm{d}S^*(u) - \int_0^t \theta(u)\mathrm{d}S^*(u)\Big|\mathcal{F}_t\Big] \\
= \; & \theta_0(t) + \theta(t)S^*(t) \\
& + \mathbb{E}^Q\left[\int_0^s \theta(u)\mathrm{d}S^*(u)\middle|\mathcal{F}_t\right] - \int_0^t \theta(u)\mathrm{d}S^*(u).
\end{aligned}
$$

(7) と伊藤の公式から

$$
\mathrm{d}S^*(t) = \sigma S^*(t)\mathrm{d}\hat{W}(t) = \mathrm{e}^{-rt}\sigma S(t)\mathrm{d}\hat{W}(t).
$$

$\therefore$ $\left\{\int_0^t \theta(s)\mathrm{d}S^*(s) : t \in [0,T]\right\}$ は Q の下でマルチンゲール. $\square$

ブラック・ショールズ式

以上の議論から，ブラック・ショールズモデルでは，

定理 (4)

$$S_X(0) = \mathbb{E}^Q\left[\mathrm{e}^{-rT} X(T, S(T))\right].$$

定理 (5)(ブラック・ショールズ式)

$$\begin{aligned} C(0) &= S\Phi(d) - \mathrm{e}^{-rT} K\Phi\left(d - \sigma\sqrt{T}\right), & (12) \\ P(0) &= \mathrm{e}^{-rT} K\Phi\left(-d + \sigma\sqrt{T}\right) - S\Phi(-d). & (13) \end{aligned}$$

$$d := \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$\Phi(\cdot)$ は標準正規分布の分布関数.

ブラック・ショールズ式の導出 I

ヨーロピアン・コール・オプションの時点 T でのキャッシュ・フローは，$X(T, S(T)) = \{S(T) - K\}_+$．∴ 定理 (4) と (10) より，

$$C(0) = \mathbb{E}^Q\left[\mathrm{e}^{-rT} X(T, S(T))\right] = \mathbb{E}^Q\left[\mathrm{e}^{-rT}\{S(T) - K\}^+\right].$$

$$S(T) = S\mathrm{e}^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W(T)} = S\mathrm{e}^{rT - \frac{\sigma^2}{2}T + \sigma \hat{W}(T)}.$$

∴ $\tilde{x} := Q$ の下で，平均 $rT - \frac{\sigma^2}{2}T$，分散 $\sigma^2 T$ の正規分布に従う確率変数

$$\Rightarrow S(T) = S\mathrm{e}^{\tilde{x}}.$$

$$\therefore\ C(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-rT}\{S\mathrm{e}^x - K\}^+ \mathrm{d}N\left(x; rT - \frac{\sigma^2}{2}T, \sigma^2 T\right).$$

$$\{S\mathrm{e}^x - K\}^+ = \begin{cases} S\mathrm{e}^x - K & ;\ x \geq \ln(K/S), \\ 0 & ;\ x < \ln(K/S). \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ C(0) &= \mathrm{e}^{-rT}\int_{\ln(K/S)}^{\infty}(S\mathrm{e}^{x}-K)\mathrm{d}N\left(x; rT-\frac{\sigma^2}{2}T, \sigma^2 T\right) \\
&= S\mathrm{e}^{-rT}\int_{\ln(K/S)}^{\infty}\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}N\left(x; rT-\frac{\sigma^2}{2}T, \sigma^2 T\right) \\
&\qquad -\mathrm{e}^{-rT}K\int_{\ln(K/S)}^{\infty}\mathrm{d}N\left(x; rT-\frac{\sigma^2}{2}T, \sigma^2 T\right) \\
&= S\mathrm{e}^{-rT}e^{rT-\frac{\sigma^2}{2}T+\frac{\sigma^2}{2}T}\int_{\ln(K/S)}^{\infty}\mathrm{d}N\left(x; rT-\frac{\sigma^2}{2}T+\sigma^2 T, \sigma^2 T\right) \\
&\qquad -\mathrm{e}^{-rT}K\int_{\ln(K/S)}^{\infty}\mathrm{d}N\left(x; rT-\frac{\sigma^2}{2}T, \sigma^2 T\right) \\
&= S\int_{-d}^{\infty}\mathrm{d}\Phi(x)-\mathrm{e}^{-rT}K\int_{-d+\sigma\sqrt{T}}^{\infty}\mathrm{d}\Phi(x) \\
&= S\int_{-\infty}^{d}\mathrm{d}\Phi(x)-\mathrm{e}^{-rT}K\int_{-\infty}^{d-\sigma\sqrt{T}}\mathrm{d}\Phi(x) \\
&= S\Phi(d)-\mathrm{e}^{-rT}\Phi(d-\sigma\sqrt{T}).
\end{aligned}
$$

$P(0)$ についても同様. $\square$

問題

問題 1 伊藤公式を用いて式 (1) $\iff$ 式 (2) を示せ[1].

問題 2 デリバティブ基本方程式 (5) の証明にある $\mathrm{d}\Pi(t) = \Pi(t) r \mathrm{d}t$ より，式 (5) が成立することを確認せよ.

問題 3 式 (6) で定義される Q が確率（測度）となることを示せ.

問題 4 補題 (1) について $\Longleftarrow$ を証明せよ.

問題 5 ブラック・ショールズ式においてオプション・デルタ $\frac{\partial C(0)}{\partial S}$, $\frac{\partial P(0)}{\partial S}$ を求めよ.

[1] 式 (1) $\Longleftarrow$ 式 (2) を示すには，$\log(S(t))$ を用いる.