デリバティブ論

第 5 回 確率解析のレビュー （その 2）

岩城 秀樹

京都大学大学院経営管理研究部

October 31, 2018

確率変数の独立性 I

定義 (1)

1. 離散的確率変数 (X, Y) において，X と Y が独立であるとは
$$\Pr[X = x_i, Y = y_j] = \Pr[X = x_i] \Pr[= y_j]$$
がすべての x_i と y_j について成立することである．
2. 連続的確率変数 (X, Y) において，X と Y が独立であるとは
$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$
がすべての x と y について成立することである．

確率変数の独立性 II

定義 (2)

多変量の確率変数の独立性も 2 変量の場合の自然な拡張として定義される．すなわち，n 個の離散的な確率変数 $X_1, \cdots, X_n$ が独立であるとは，

$$\Pr[X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n] = \prod_{i=1}^{n} \Pr[X_i = x_i]$$

がすべての $x_1, \cdots, x_n$ について成立することである．連続的な確率変数の独立性も同様である．

確率変数の独立性 III

定理（1）

$X_1, \cdots, X_n$ を独立で同一の確率分布に従う確率変数の列とし，
$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ とする．このとき，

$$X_i \sim Be(p) \Rightarrow X \sim B(n, P).$$

定理（2）

X と Y が独立ならば

$$m_{X+Y}(s) = m_X(s) m_Y(s).$$

確率変数の独立性 IV

定理 (3)

X と Y が独立ならば

$$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

注 (1)

定理 3 の逆は一般に成立しない（例 1 参照）．しかし，X と Y が正規分布ならば逆も成立する．

例 (1)

2 変量確率変数 (X, Y) の確率分布が下表のように与えられているとする.

		Y の実現値 0	Y の実現値 1	X の周辺分布
X の実現値	-1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
Y の周辺分布		$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	

このとき，$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$，すなわち無相関であるが，

$$
\begin{aligned}
\Pr(X=-1, Y=0) = \frac{1}{3} &\neq \Pr(X=-1)\Pr(Y=0) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}, \\
\Pr(X=-1, Y=1) = 0 &\neq \Pr(X=-1)\Pr(Y=1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}, \\
\Pr(X=0, Y=0) = 0 &\neq \Pr(X=0)\Pr(Y=0) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}, \\
\Pr(X=0, Y=1) = \frac{1}{3} &\neq \Pr(X=0)\Pr(Y=1) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}, \\
\Pr(X=1, Y=0) = \frac{1}{3} &\neq \Pr(X=1)\Pr(Y=0) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}, \\
\Pr(X=1, Y=1) = \frac{1}{3} &\neq \Pr(X=1)\Pr(Y=1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

すなわち，X と Y は独立ではない. □

例 (2)(2 次元正規分布)

$$\boldsymbol{\mu} := (\mu_1, \mu_2)^\top, \quad \boldsymbol{\Sigma} := \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

として $\boldsymbol{X} := (X_1, X_2)$ の同時確率密度関数 $f(\boldsymbol{x})$ が

$$f(\boldsymbol{x}) = (2\pi)^{-1}|\boldsymbol{\Sigma}^{-1}|^{\frac{1}{2}} \exp\left\{ \frac{-(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})}{2} \right\},$$

$$\boldsymbol{x} := (x_1, x_2)^\top \in \mathbb{R}^2$$

を満たすとき，$\boldsymbol{X}$ は平均ベクトル $\boldsymbol{\mu}$，共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ の 2 次元正規分布に従うという． □

多変量正規分布 II

定理 (4)

$f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})$ を平均ベクトル $\boldsymbol{\mu}$，共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ の 2 次元正規分布に従う確率変数の確率密度関数とする．
このとき $\boldsymbol{\lambda} := (\lambda_1,\lambda_2)^\top \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}) = \mathrm{e}^{\boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\lambda}} f(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\mu}+\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\Sigma}),\quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2.$$

注 (2)

2 次元正規分布の定義において X，x，μ，Σ を n 次元とすることによって，n，$n \geq 2$，次元正規分布を定義できる．同様に定理 4 も n 次元へ一般化できる．

定義 (3)

2 つの事象 A と B に対して，B のもとでの A の条件付き確率を

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \tag{1}$$

で定義する．ただし，$P(B) > 0$.

(1) より

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B)$$

が成立する．これを乗法公式と呼ぶ．

条件付き分布と条件付き期待値 II

全事象 Ω が事象列 $A_1, A_2, \cdots$ によって分割されている．すなわち

$$\Omega = A_1 \cup A_2 \cup \cdots, \qquad A_i \cap A_j = \emptyset$$

とする．このとき，

$$P(B) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)P(B|A_i) \tag{2}$$

が成立する．これを全確率の公式と呼ぶ．

条件付き分布と条件付き期待値 III

２変量確率変数 (X, Y) は離散的とする．事象 $\{Y = y_j\}$ のもとでの X の条件付き確率は，(1) より

$$\Pr[X = x_i | Y = y_j] := \frac{\Pr[X = x_i, Y = y_j]}{\Pr[Y = y_j]}.$$

ただし，$\Pr[Y = y_j] > 0$.

注 (3)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Pr[X = x_i | Y = y_j] = 1$$

$\therefore$ $\Pr[X = x_i | Y = y_j]$ は x_i に関して確率分布．

条件付き分布と条件付き期待値 IV

(X, Y) が連続型の場合には，事象 $\{Y = y\}$ のもとでの X の**条件付き密度関数**

$$f(x|y) := \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

を考える．

注 (4)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x|y)\mathrm{d}x = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\mathrm{d}x}{f_Y(y)} = \frac{f_Y(y)}{f_Y(y)} = 1$$

$\therefore$ $f(x|y)$ が x に関して密度関数.

定義 (4)

$\{Y = y\}$ という条件の下での X の**条件付き期待値**を

$$\mathbb{E}[X|Y=y] := \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} x_i \Pr[X = x_i|Y=y], & (X,Y) \text{ が離散的} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x|y) \mathrm{d}x, & (X,Y) \text{ が連続的} \end{cases} \tag{3}$$

で定義する．

(3) より $\mathbb{E}[X|Y=y]$ は y の関数と考えられるので，y の値を明示する必要の無い場合には，$\mathbb{E}[X|Y=y]$ を $\mathbb{E}[X|Y]$ と書く．

定理 (5)(条件付き確率における全確率の公式)

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]].$$

定義 (5)

非負の実数の集合 $\mathcal{T}$ は時点の集合を表すとする.
関数 $X : \mathcal{T} \times \Omega \to \mathbb{R}$ において

$$X(t, \cdot) : \Omega \to \mathbb{R}, \qquad {}^{\forall}t \in \mathcal{T}$$

が確率変数となっているとき, X を**確率過程**あるいは単に**過程**と呼ぶ .

$X(t, \omega)$ は状態 $\omega \in \Omega$ が生じたときの時点 $t \in \mathcal{T}$ における実現値.
$X(t, \cdot) : \Omega \to \mathbb{R}$ を $X(t)$ と略記.

定義 (6)

確率過程 X がすべての時点 $t \in \mathcal{T}$ において $\mathbb{E}[|X(t)|] < \infty$ ならば X は**可積分**であるという.

以下，確率過程 X に対して $\mathcal{F}_t$, $t \in \mathcal{T}$, を
$\{\omega \in \Omega : a < X(s) \leq b\}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $s \in [0, t]$, を含む最小の事象の集合とする.

定義（7）

可積分な確率過程 X が

$$\mathbb{E}[X(s)|\mathcal{F}_t] = X(t) \quad {}^{\forall}s > t,\ s, t \in \mathcal{T}$$

を満たすとき X はマルチンゲール.

以下，$T \in \mathbb{R}$ を所与として $\mathcal{T} = [0, T]$ とする.

ブラウン運動

定義 (8)

次の (1)〜(3) によって定義される確率過程 $\{W(t) : t \in \mathcal{T}\}$ を標準ブラウン運動またはウィーナー過程と呼ぶ.

1. $\Pr[W(0) = 0] = 1$.
2. (正規増分性) $s > t \geq 0$ となる時点 $s, t \in \mathcal{T}$ に対して,
   $W(s) - W(t)$ は平均 0, 分散 $s - t$ の正規分布に従う.
3. (独立増分性) $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ となる時点 $t_i \in \mathcal{T}$, $i = 0, 1, \cdots, n$ に対して,
   $W(t_0), W(t_1) - W(t_0), \cdots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ は互いに独立.

定数 μ と σ に対して $X(t) = \mu t + \sigma W(t)$, $t \in \mathcal{T}$ によって定義される確率過程 $\{X(t) : t \in \mathcal{T}\}$ をドリフト係数 μ, 拡散係数 σ のブラウン運動と呼ぶ.

定義 (9)

$\mathcal{T}$ を $\{(t_0, t_1], (t_1, t_2], \cdots, (t_{k-1}, t_k]\}$, $t_0 = 0$, $t_k = T$ というように適当に小分割したとき,

$$\theta(t) = \theta(t_i), \quad t \in (t_{i-1}, t_i], \ i = 1, 2, \cdots, k$$

となる確率過程 $\{\theta(t) : t \in \mathcal{T}\}$ を単純過程という.

単純過程 $\theta := \{\theta(t) : t \in \mathcal{T}\}$ に対して θ の $\{W(t) : t \in \mathcal{T}\}$ による確率積分 $\int_0^t \theta(s)\mathrm{d}W(s)$, $t \in \mathcal{T}$, を次で定義.

$$\int_0^t \theta(s)dW(s)$$

$$:= \sum_{i=0}^{n-1} \theta(t_{i+1})[W(t_{i+1}) - W(t_i)] + \theta(t_{n+1})[W(t) - W(t_n)].$$

確率積分 II

定理 (6)

$\mathbb{E}\left[\int_0^T \theta(t)^2 \mathrm{d}t\right] < \infty$ となる任意の $\{\theta(t) : t \in \mathcal{T}\}$ に対して

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t (\theta_n(s) - \theta(s))^2 \mathrm{d}s\right] \to 0 \ (n \to \infty), \quad t \in \mathcal{T}$$

となる単純過程の列 $\{\theta_n(t) : t \in \mathcal{T}, n = 1, 2, \cdots\}$ が存在し，
その列 $\{\theta_n(t) : t \in \mathcal{T}, n = 1, 2, \cdots\}$ に対して

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t \theta_n(s) \mathrm{d}W(s) - Y(t)\right)^2\right] \to 0 \ (n \to \infty), \quad t \in \mathcal{T}$$

となる確率過程 $\{Y(t) : t \in \mathcal{T}\}$ が唯一存在する．

確率積分 III

定義 (10)

定理 6 の $\{Y(t) : t \in \mathcal{T}\}$ を $\{\theta(t) : t \in \mathcal{T}\}$ の $\{W(t) : t \in \mathcal{T}\}$ による確率積分と定義し，$Y(t)$ を $\int_0^t \theta(s)\mathrm{d}W(s)$ と表記. □

定理 (7)

- $\left\{\int_0^t \theta(s)\mathrm{d}W(s) : t \in \mathcal{T}\right\}$ はマルチンゲール.
- $\mathbb{E}[\int_0^t \theta(s)\mathrm{d}W(s)] = 0$.
- $\mathbb{E}[\int_0^t \theta_1(s)\mathrm{d}W(s) \int_0^t \theta_2(s)\mathrm{d}W(s)] = \int_0^t \mathbb{E}[\theta_1(s)\theta_2(s)]\mathrm{d}s$, $t \in \mathcal{T}$.

定義 (11)

$\{\mu(t) : t \in \mathcal{T}\}$ を t によって積分可能，$\{\sigma(t) : t \in \mathcal{T}\}$ を $\{W(t) : t \in \mathcal{T}\}$ によって確率積分可能とする．このとき，

$$S(t) = S(0) + \int_0^t \mu(s)\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s)\mathrm{d}W(s), \qquad t \in \mathcal{T}. \tag{4}$$

で定義される $\{S(t) : t \in \mathcal{T}\}$ を伊藤過程と呼ぶ．

(4) において μ をドリフト関数，σ を拡散関数と呼ぶ．(4) は，形式的に

$$\mathrm{d}S(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)\mathrm{d}W(t), \qquad t \in \mathcal{T}$$

と表記される．

伊藤過程 II

$\{\theta(t)\mu(t) : t \in \mathcal{T}\}$ を t で積分可能，$\{\theta(t)\sigma(t) : t \in \mathcal{T}\}$ を $\{W(t) : t \in \mathcal{T}\}$ によって確率積分可能とする．
$\{\theta(t) : t \in \mathcal{T}\}$ の伊藤過程 $\{S(t) : t \in \mathcal{T}\}$ による確率積分 $\int_0^t \theta(s)\mathrm{d}S(s)$，$t \in \mathcal{T}$，を

$$\int_0^t \theta(s)\mathrm{d}S(s) := \int_0^t \theta(s)\mu(s)\mathrm{d}s + \int_0^t \theta(s)\sigma(s)\mathrm{d}W(s), \qquad t \in \mathcal{T}$$

で定義．定義から $\left\{\int_0^t \theta(s)\mathrm{d}S(s) :\ t \in \mathcal{T}\right\}$ も伊藤過程．

定理 (8)(テイラー展開)

関数 $f(x)$ が $n+1$ 回まで微分可能ならば

$$f(x+h) = f(x)+f'(x)h+\frac{f''(x)}{2!}h^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n+o(h^n)$$

テイラー展開の式は，多変数関数にも拡張できる． 2 変数関数 $f(x,t)$ が 2 次の連続な偏導関数をもつならば，

$$\begin{aligned} f(x+h,t+k) \;&\approx\; f(x,t)+f_x(x,t)h+f_t(x,t)k \\ &\quad +\frac{f_{xx}(x,t)h^2+2f_{xt}(x,t)hk+f_{tt}(x,t)k^2}{2!}. \end{aligned}$$

ただし，下付きの添え字は，偏導関数を表わす．

伊藤公式 I

定理 (9)(伊藤公式)

$\{X(t) : t \in \mathcal{T}\}$ を

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t), \quad t \in \mathcal{T}$$

という伊藤過程とする．関数 $f(t, x)$，$f : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，が t に関して連続微分可能，x に関して 2 階連続微分可能ならば，
$Y(t) := f(t, X(t))$ と置くと，

$$\begin{aligned}
& dY(t) \\
= \; & \frac{\partial f}{\partial t}(t, X(t))dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X(t))dX(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X(t))(dX(t))^2 \\
= \; & \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, X(t)) + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X(t))\mu(t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X(t))\sigma(t)^2\right)dt \\
& \quad + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X(t))\sigma(t)dW(t)
\end{aligned}$$

となり，$\{Y(t) : t \in \mathcal{T}\}$ も伊藤過程．

伊藤公式 II

注 (5)

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{d}X(t))^2 &= (\mu(t)dt + \sigma(t)\mathrm{d}W(t))^2 \\
&= \mu(t)^2\mathrm{d}t^2 + 2\mu(t)\sigma(t)\mathrm{d}W(t) + \sigma(t)^2\mathrm{d}W(t)^2 \\
&= \sigma(t)^2\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

$$
\because\ \mathrm{d}W(t)^2 = \mathrm{d}t.
$$

ギルサノフの定理

定理 (10)(ギルサノフの定理)

η を定数として，

$$\xi(t) := \exp\left(\eta W(t) - \frac{1}{2}\eta^2 t\right), \quad t \in \mathcal{T}$$

とする．このとき，確率変数 $\xi(\mathcal{T})$ は正，かつ $\mathbb{E}[\xi(\mathcal{T})] = 1$ であるから，

$$Q(\mathcal{A}) := \mathbb{E}[\xi(\mathcal{T})1_{\{\mathcal{A}\}}], \quad \mathcal{A} \in \mathcal{F} \tag{5}$$

とすると，Q は Ω 上の確率となる．さらに

$$\hat{W}(t) = W(t) - \eta t, \quad t \in \mathcal{T}$$

によって定義される $\hat{W}$ は確率 Q の下で標準ブラウン運動．

ギルサノフの定理の証明 I

はじめに，確率 Q の下で $\widehat{W}(t)$，$t \in \mathcal{T}$，が平均 0，分散 t の正規分布に従うことを示す．
$\widehat{W}(t)$ の確率測度 Q の下での積率母関数を求める．$\lambda \in \mathbb{R}$ とすると

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^Q\left[e^{\lambda \widehat{W}(t)}\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{\lambda \widehat{W}(t)}\xi(T)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[e^{\lambda(W(t)-\eta t)} \times e^{\eta W(T)-\frac{1}{2}\eta^2 T}\right] \\
&= e^{-\lambda\eta t-\frac{1}{2}\eta^2 T}\mathbb{E}\left[e^{\lambda W(t)+\eta W(T)}\right].
\end{aligned}$$

ギルサノフの定理の証明 II

標準ブラウン運動の定義にある (b), (c) の性質より,

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}[W(t), W(T)] &= \mathrm{Cov}[W(t), W(T) - W(t) + W(t)] \\ &= \mathbb{V}(W(t)) = t\end{aligned}$$

となるから, $(W(t), W(T))^\top$ は

$$\text{平均ベクトル } \mathbf{0} := (0, 0)^\top, \qquad \text{共分散行列 } \boldsymbol{\Sigma} := \begin{pmatrix} t & t \\ t & T \end{pmatrix}$$

の 2 次元正規分布に従っている.
$\therefore$ $N_2(x, y; \mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma})$ をこの正規分布の分布関数とすると

$$\mathbb{E}^Q\left[\mathrm{e}^{\lambda \widehat{W}(t)}\right] = \mathrm{e}^{-\lambda\eta t - \frac{1}{2}\eta^2 T} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\lambda x + \eta y} \mathrm{d}N_2(x, y; \mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}).$$

$\boldsymbol{\lambda} := (\lambda, \eta)^\top$ とすると定理 4 より

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\lambda x+\eta y} \mathrm{d}N_2(x, y; \mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}) \\
= \;& \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}N_2(x, y; \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\Sigma}) \\
= \;& \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\lambda}},
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\lambda} = \lambda^2 t + 2\lambda\eta t + \eta^2 T.$$

$$\therefore \qquad \mathbb{E}^Q\left[\mathrm{e}^{\lambda \widehat{W}(t)}\right] = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lambda^2 t}. \tag{6}$$

積率母関数の一意性から確率 Q の下で $\widehat{W}(t)$, $t \in \mathcal{T}$, は平均 0, 分散 t の正規分布に従う.

ギルサノフの定理の証明 IV

次に，独立増分性を示す．
$T \geq t_2 \geq t_1 \geq s_2 \geq s_1 \geq 0$ として

$$
\begin{aligned}
\widehat{W}(t_2) - \widehat{W}(t_1) &\equiv W(t_2) - W(t_1) - \eta(t_2 - t_1) \\
&\stackrel{\mathrm{d}}{=} W(t) - \eta t, \quad t := t_2 - t_1, \\
\widehat{W}(s_2) - \widehat{W}(s_1) &\equiv W(s_2) - W(s_1) - \eta(s_2 - s_1) \\
&\stackrel{\mathrm{d}}{=} W(s) - \eta s, \quad s := s_2 - s_1, \\
\log \xi(T) &= \eta W(T) - \frac{1}{2}\eta^2 T,
\end{aligned}
$$

$$
X := W(t) - \eta t, \quad Y := W(s) - \eta s, \quad Z := \log \xi(T)
$$

とおくと，

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}^Q\left[\mathrm{e}^{\lambda(\widehat{W}(t_2)-\widehat{W}(t_1))+(\widehat{W}(s_2)-\widehat{W}(s_1)))}\right] &= \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\lambda(X+Y)}\xi(T)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\lambda X+\lambda Y+Z}\right]
\end{aligned}
$$

ギルサノフの定理の証明 V

(X, Y, Z) は平均ベクトル $\boldsymbol{\mu}$，分散共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}$ が

$$\boldsymbol{\mu} = \left(-\eta t, -\eta s, -\frac{1}{2}\eta^2 T\right)^\top, \quad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} t & 0 & \eta t \\ 0 & s & \eta s \\ \eta t & \eta s & \eta^2 T \end{pmatrix}$$

の正規分布に従うから，$\boldsymbol{\lambda} := (\lambda, \lambda, 1)^\top$ とおくと定理 4 より，

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[e^{\lambda X + \lambda Y + Z}\right] \\
= \; & \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
= \; & e^{\boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\lambda}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\Sigma}) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
= \; & e^{\boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{\mu} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\lambda}^\top \boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\lambda}} \\
= \; & \exp\left(\frac{1}{2}\lambda^2 t + \frac{1}{2}\lambda^2 s\right).
\end{aligned}$$

さらに，(6) から

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{\lambda X+\lambda Y+Z}\right]=\mathbb{E}^{Q}\left[\mathrm{e}^{\lambda\widehat{W}(t)}\right]\mathbb{E}^{Q}\left[\mathrm{e}^{\lambda\widehat{W}(s)}\right],$$

$$\begin{aligned}\therefore\qquad & \mathbb{E}^{Q}\left[\mathrm{e}^{\lambda(\widehat{W}(t_2)-\widehat{W}(t_1))+(\widehat{W}(s_2)-\widehat{W}(s_1)))}\right]\\ = \; & \mathbb{E}^{Q}\left[\mathrm{e}^{\lambda(\widehat{W}(t_2)-\widehat{W}(t_1))}\right]\mathbb{E}^{Q}\left[\mathrm{e}^{\lambda(\widehat{W}(s_2)-\widehat{W}(s_1))}\right].\end{aligned}$$

∴ 定理 3 と注 1 より独立増分性が示せた. □

問題 I

問題 1 $Z := \{Z(t);\ t \geq 0\}$ を $(Z(t) \sim N(0, \sigma^2 t))$ のブラウン運動とする．このとき，以下の各問に答えよ．

問 1-1 $t > 0,\ s > 0$ に対して，

$$\mathrm{Cov}[z(t), z(s)] = \sigma^2 \min\{t, s\}$$

を示しなさい．

問 1-2 $s > t > 0$ に対して，

$$\rho[z(t), z(s)] = \sqrt{\frac{t}{s}}$$

を示しなさい．ただし ρ は相関係数を表す．

問 1-3 Z はマルチンゲールであることを示しなさい．

問題 II

問 1-4 $\{Z(t)^2 - \sigma^2 t;\ t \geq 0\}$ はマルチンゲールであることを示しなさい．

問 1-5 θ を定数とすると，$\left\{\exp\left(\theta Z(t) - \frac{1}{2}\theta^2\sigma^2 t\right);\ t \geq 0\right\}$ はマルチンゲールであることを示しなさい．

問題 2 次の関数を $x = 0$ でテイラー展開することにより，次が成立することを確認しなさい．

1. $\log(1 + x) = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$
2. $e^{\theta x} = 1 + \theta x + \frac{1}{2!}\theta^2 x^2 + \frac{1}{3!}\theta^3 x^3 + \cdots$

ただし θ は定数とする．

問題 3 次の伊藤過程を考える．

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}X(t) &= \mu_x X(t)\mathrm{d}t + \sigma_x X(t)\mathrm{d}W(t),\\
\mathrm{d}Y(t) &= \mu_y Y(t)\mathrm{d}t + \sigma_y Y(t)\mathrm{d}W(t),\ \ t \geq 0.
\end{aligned}
$$

ただし $\{W(t);\ t \geq 0\}$ は標準ブラウン運動，μ_i，σ_i，$i = x, y$，は定数とする．このとき，次の各問に答えなさい．

問 3-1 $f(X(t), Y(t)) = X(t)Y(t)$ として，確率微分 $\mathrm{d}f$ を伊藤の公式を用いて導出しなさい．

問 3-2 $f(X(t), Y(t)) = \frac{X(t)}{Y(t)}$ として，確率微分 $\mathrm{d}f$ を伊藤の公式を用いて導出しなさい．

問題 4 次の伊藤過程を考える．

$$\mathrm{d}X(t) = \mu X(t)\mathrm{d}t + \sigma X(t)\mathrm{d}W(t), \quad t \geq 0.$$

ただし $\{W(t);\ t \geq 0\}$ は標準ブラウン運動，μ と σ は定数である．このとき，$f(X(t)) := \log X(t)$ として，確率微分 $\mathrm{d}f$ を伊藤の公式を用いて導出しなさい．