デリバティブ論

第 4 回 確率解析のレビュー （その 1 ）

岩城 秀樹

京都大学大学院経営管理研究部

October 25, 2018

標本空間と事象 I

定義

試行 ＝ 前もって結果の分かっていない現象の観測や実験.
標本空間 ＝ 試行の結果として起こり得る全体集合.
根元事象 ＝ 標本空間を成す一つ一つの結果.
事象 ＝ 標本空間の部分集合.
標本空間を全事象，空集合を空事象という.

	記号	意味	集合論での呼称
全事象	Ω		全体集合
根元事象	ω	$\omega \in \Omega$	要素
事象	A，B など	$A \subset \Omega$	部分集合
空事象	$\emptyset$		空集合

Table: 言葉の定義

標本空間と事象 II

例 (1)

明日の日経平均株価の終値が今日の終値に比較して上がるか，下がるかを観測するという試行を考える．

標本空間	:	$\Omega = \{$ 上がる, 下がる $\}$.
根元事象	:	上がる，下がる．
事象	:	Ω, $\{$ 上がる $\}$, $\{$ 下がる $\}$, $\emptyset$.

□

定義

事象に実数を対応させる関数 $\mathcal{P}$ が次の (1)〜(3) を満たすとき関数 $\mathcal{P}$ を確率という.

1. $\mathcal{P}(\Omega) = 1$.
2. 事象 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ に対して, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$ ならば,
$$\mathcal{P}\left(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}\right) = \mathcal{P}(\mathcal{A}) + \mathcal{P}(\mathcal{B}).$$
3. すべての事象 $\mathcal{B}$ に対して, $\mathcal{P}(\mathcal{B}) \geq 0$.

例 (2)(例 (1) の続き)

$$\mathcal{P}(\{\text{ 上がる }\}) = \frac{2}{3}, \ \mathcal{P}(\{\text{ 下がる }\}) = \frac{1}{3}$$

とすれば,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\Omega) &= \mathcal{P}(\{\text{ 上がる }\} \cup \{\text{ 下がる }\}) \\ &= \mathcal{P}(\{\text{ 上がる }\}) + \mathcal{P}(\{\text{ 下がる }\}) = 1 \end{aligned}$$

であるから, $\mathcal{P}$ は確率となる. $\square$

確率変数

定義

関数 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ が，任意の実数 a, b に対して

$$\text{事象 } \{\omega \in \Omega : a < X(\omega) \le b\},$$

に矛盾なく確率が割り当てられるとき，関数 X を**確率変数**と呼ぶ.

所与の $\omega \in \Omega$ に対する $X(\omega)$ の値を確率変数 X の**実現値**と呼び，実現値の全体集合を X の標本空間と呼ぶことがある.

例 (3)(例 2 の続き)

$X : \Omega \to \mathbb{R}$ を

$$X = \begin{cases} 1 & ;\text{上がる} \\ 0 & ;\text{下がる} \end{cases}$$

とすれば，X は確率変数となる (cf. 図 1). □

以下，任意の実数 a，b に対して，

$$\Pr[a < X \leq b] := \mathcal{P}(\{\omega \in \Omega : a < X(\omega) \leq b\}).$$

定義

確率 $\Pr[X \leq x]$ を x の関数と考えたとき

$$F(x) := \Pr[X \leq x], \qquad -\infty < x < \infty$$

を確率変数 X の (累積) 分布関数という．

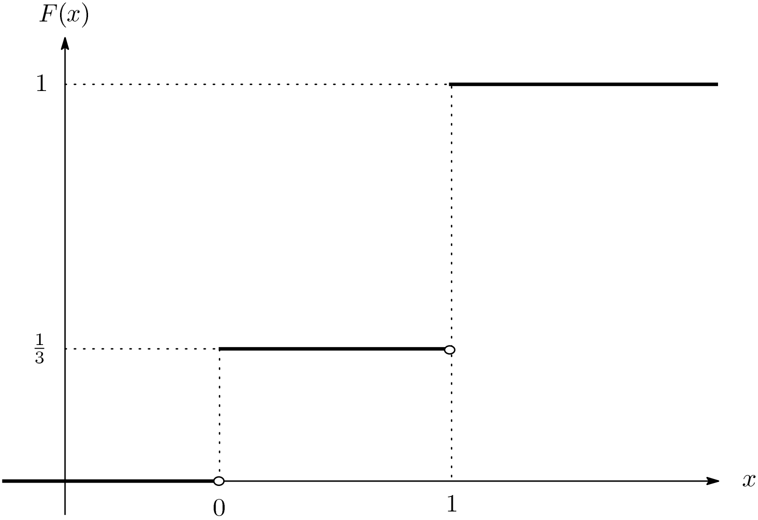

Figure: 図 1：例 3 の確率変数の分布関数

定義

X の実現値が $x_1, x_2, \cdots$ という離散的な値しかとらず，確率 $p_i := \Pr[X = x_i]$，$i = 1, 2, \cdots$ が

$$p_i \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$$

を満たすとき，X を離散的確率変数と呼び，$\{p_i;\ i = 1, 2, \cdots\}$ を X の確率分布と呼ぶ．

例 (4)(ベルヌーイ分布)

$$X = \begin{cases} 1, & \text{確率 } p \\ 0, & \text{確率 } 1-p, \end{cases} \qquad 0 < p < 1$$

であるとき，X はパラメータ p のベルヌーイ分布に従っているといい，記号で　$X \sim Be(p)$ と表わす　$\square$.

例 (5)(２項分布)

X のとりうる値が $\{0, 1, \cdots, n\}$ で，

$$\Pr[X = i] = {}_n\mathrm{C}_i p^i (1-p)^{n-i}, \quad i = 0, 1, \cdots, n$$

であるとする．ただし，$0 < p < 1$，${}_n\mathrm{C}_i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$．このとき，$X$ は
パラメータ (n, p) の**２項分布**にしたがっているといい，記号で
$X \sim B(n, p)$ と表わす． □

連続型確率変数と確率密度関数 I

定義

X の実現値が実数の連続区間上にあり，分布関数 $F(x)$ に対して

$$\int_{-\infty}^{x} f(y)\mathrm{d}y = F(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

となる非負の関数 f が存在するとき，X を連続型確率変数と呼ぶ．また，関数 f を X の確率密度関数あるいは密度関数と呼ぶ．

例 (6)(正規分布)

μ, σ を定数として確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

を満たすとき，確率変数 X は平均 μ，分散 σ^2 の正規分布に従うといい，
$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma)$ と表わす．
特に平均 $\mu = 0$，分散 $\sigma^2 = 1$ の正規分布のことを標準正規分布という．
□

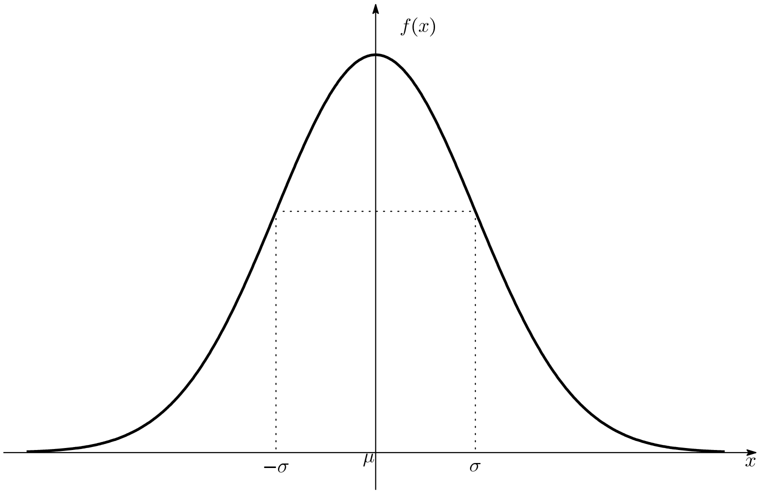

Figure: $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ の密度関数

正規分布の性質

$X \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$ のとき,

$$Z := \frac{X - \mu}{\sigma}$$

とすると $Z \sim \mathrm{N}(0, 1)$. この方法によって，任意の正規分布に従う確率変数を標準正規分布に従う確率変数へ変換することを標準化という.
$\phi(x)$，$\Phi(x)$ を各々標準正規分布の確率密度関数，分布関数とすると

$$\phi(x) = \phi(-x), \quad \Phi(x) = 1 - \Phi(-x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

このことを標準正規分布の対称性という.

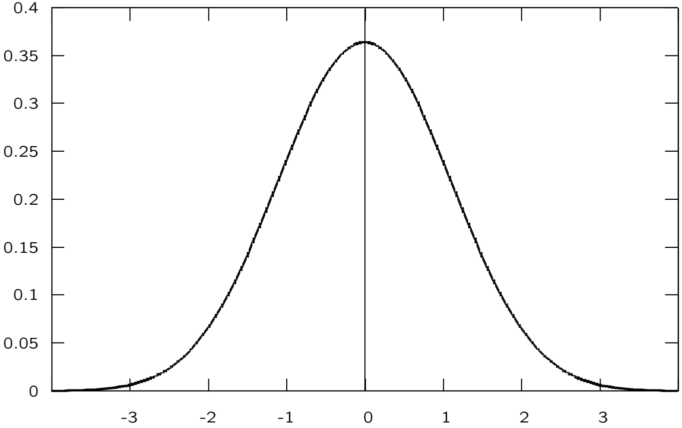

Figure: $\phi(x)$ のグラフ

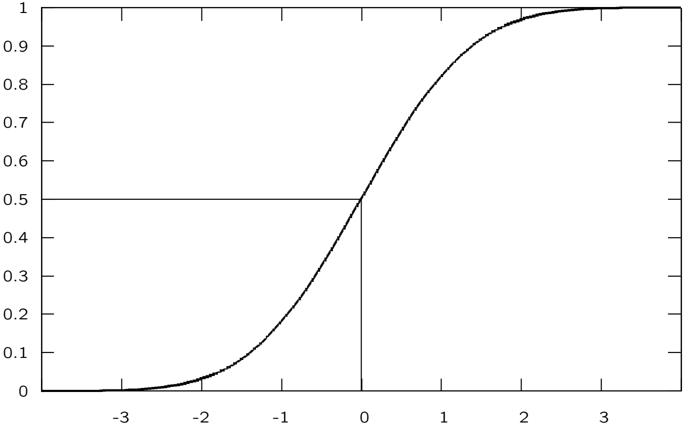

Figure: $\Phi(x)$ のグラフ

期待値

定義

確率変数 X に対して

$$\mathbb{E}[X] := \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} x_i \Pr[X = x_i], & X : \text{離散型} \\ \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \mathrm{d}x, & X : \text{連続型} \end{cases}$$

を X の**期待値**もしくは**平均**という．

定理（期待値の単調性）

$f_1(x) \leq f_2(x), x \in \mathbb{R}$ ならば

$$\mathbb{E}[f_1(X)] \leq \mathbb{E}[f_2(X)].$$

分散と標準偏差

定義

確率変数 X に対して

$$\mathbb{V}[X] := \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]$$

を X の分散,

$$\sigma_X := \sqrt{\mathbb{V}[X]}$$

を X の標準偏差という.

分散の性質

定理

1. $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$
2. 定数 c に対して

$$\mathbb{V}[c] = 0, \quad \mathbb{V}[X + c] = \mathbb{V}[X], \quad \mathbb{V}[cX] = c^2\mathbb{V}[X]$$

3. $\mathbb{V}[X] = 0$ ならば X は定数.

例 (7)

1. $X \sim B(p, n, p) \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{i=0}^{n} i\,{}_n\mathrm{C}_i p^i (1-p)^{n-i} = np.\\ \mathbb{V}[X] &= \sum_{i=0}^{n} (i-np)^2\,{}_n\mathrm{C}_i p^i (1-p)^{n-i} = np(1-p).\end{aligned}$$

2. $X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x = \mu.\\ \mathbb{V}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x = \sigma^2.\end{aligned}$$

□

定義（スティルチェス積分）

関数 $g(x)$ と $F(x)$ と

$$\text{区間 } [a, b] \text{ の分割 } \triangle : \quad a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

に対して，$z_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \cdots, n$，となる z_i をとり，

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ d_\triangle \to 0}} \sum_{i=1}^{n} g(z_i)[F(x_i) - F(x_{i-1})], \qquad d_\triangle := \max_{1\le i\le n}(x_i - x_{i-1})$$

が分割 $\triangle$ と z_i の選び方に無関係に存在するとき，この極限を $g(x)$ の $F(x)$ に関するスティルチェス積分と呼び，次で表わす．

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}F(x)$$

注

$g(x)$ が連続，$F(x)$ が有界非減少 $\Rightarrow$ $^\exists$ スティルチェス積分.

$F(x)$ が微分可能で $F'(x) = f(x)$ のとき，

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}F(x) = \int_a^b g(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

$F(x)$，$x \in [a, b]$ が階段関数のときには

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}F(x) = g(x_1)p_1 + g(x_2)p_2 + \cdots + g(x_n)p_n.$$

$$\therefore \qquad \mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}F(x).$$

積率母関数

定義

確率変数 X に対して，

$$m_X(s) := \mathbb{E}\left[e^{sX}\right]$$

を X の**積率母関数**という．

積率母関数が存在すれば

$$m_X(s) = m_Y(s) \quad \Longleftrightarrow \quad F_X(x) = F_Y(x).$$

ただし，F_X，F_Y は，X，Y の分布関数．

例 (8)

X を平均 μ，分散 σ^2 の正規分布に従う確率変数とすると，

$$m_X(s) = e^{\mu s + \frac{\sigma^2 s^2}{2}}.$$

□

定義

根元事象 ω に対して 2 次元の実数値 $(X(\omega), Y(\omega))$ を対応させることを考える．この対応 (X, Y) に対して事象

$$\{\omega \in \Omega : a < X \leq b,\ \ c < Y \leq d\}\ \forall\, a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

に矛盾なく確率が割り当てられるとき，(X, Y) を 2 変量確率変数と呼び，この事象の確率を

$$\Pr[a < X \leq b,\ \ c < Y \leq d]$$

と書く．

n 変量確率変数 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, $n \in \mathbb{N}$ についても同様に定義される．

例 (9)

Ω を株価を決定するすべての自然の状態の集合,
$X : \Omega \to \mathbb{R}$ を明日の阪神電鉄株株価終値の実数値,
$Y : \Omega \to \mathbb{R}$ を明日の日経平均株価終値の実数値

とする．このとき,

$$\{\omega \in \Omega : a < X \leq b,\ c < Y \leq d\}\ \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

に矛盾なく確率が割り当てられるならば，(X, Y) は 2 変量確率変数と考えられる． □

同時分布関数

定義

2 変量確率変数 (X, Y) に対して，$\Pr[X \leq x,\ Y \leq y]$ を $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ の関数と考えたとき

$$F(x, y) := \Pr[X \leq x,\ Y \leq y],$$

を (X, Y) の同時分布関数という．

定義

２変量確率変数にも離散型と連続型がある．離散型の場合には事象 $\{X = x_i, Y = y_i\}$ の同時確率

$$p_{ij} = \Pr[X = x_i, Y = y_i]$$

を考え，確率に矛盾が無い，すなわち，

$$p_{ij} \geq 0, \qquad \textstyle\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$$

を満たすということである．
連続型の場合には，同時分布関数 $F(x, y)$ に対して

$$F(x, y) = \textstyle\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(u, v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \qquad -\infty < x, y < \infty$$

となる非負の関数 $f(u, v)$ が存在する．関数 $f(u, v)$ を同時確率密度関数という．

周辺分布

定義

2 変量離散的確率変数 (X, Y) において

$$\Pr[X = x_i] = \sum_{j=1}^{\infty} \Pr[X = x_i, Y = y_j] \tag{1}$$

を X の周辺分布と呼ぶ．同様に Y の周辺分布も定義される．
(X, Y) が連続型ならば密度関数を考えて，X の周辺密度関数 $f_X(x)$ は

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\mathrm{d}y$$

で与えられる．Y の周辺密度関数も同様にして得られる．

例 (10)

2 変量確率変数 (X, Y) の確率分布が下表のように与えられているとする.

		Y の実現値	
		0	1
X の実現値	-1	$\frac{1}{3}$	0
	0	0	$\frac{1}{3}$
	1	$\frac{1}{3}$	0

このとき,

$$
\begin{aligned}
\Pr[X=-1] &= \Pr[X=-1, Y=0] + \Pr[X=-1, Y=1] = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}. \\
\Pr[X=0] &= \Pr[X=0, Y=0] + \Pr[X=0, Y=1] = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}. \\
\Pr[X=-1] &= \Pr[X=11, Y=0] + \Pr[X=1, Y=1] = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}. \\
\Pr[Y=0] &= \Pr[X=-1, Y=0] + \Pr[X=0, Y=0] + \Pr[X=-1, Y=0] \\
&= \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}. \\
\Pr[Y=1] &= \Pr[X=-1, Y=1] + \Pr[X=0, Y=1] + \Pr[X=-1, Y=1] \\
&= 0 + \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}. \\
\mathbb{E}[XY] &= (-1 \times 0) \times \frac{1}{3} + (-1 \times 1) \times 0 + (0 \times 0) \times 0 \\
&\quad + (0 \times 1) \times \frac{1}{3} (1 \times 0) \times \frac{1}{3} + (1 \times 1) \times 0 = 0. \\
\mathbb{E}[X] &= -1 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = 0. \quad \mathbb{E}[Y] = 0 \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}. \quad \square
\end{aligned}
$$

期待値の線形性

定理（期待値の線形性）

2 変量確率変数 (X, Y) と $a, b \in \mathbb{R}$ に対して次式が成立する．

$$\mathbb{E}[aX + bY] = a\mathbb{E}[X] + b\mathbb{E}[Y].$$

系

n 変量確率変数 $(X_1, \cdots, X_n)$ と $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, n$ に対して次式が成立する．

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{E}[X_i].$$

共分散と相関係数

定義

2 変量確率変数 (X, Y) に対して

$$\mathrm{Cov}[X, Y] := \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])\right]$$

を X と Y の共分散,

$$\rho_{XY} := \frac{\mathrm{Cov}[X, Y]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

を X と Y の相関係数という.

$\mathrm{Cov}[X, Y] > 0 \iff$ X と Y には正の相関
$\mathrm{Cov}[X, Y] = 0 \iff$ X と Y は無相関　　という.
$\mathrm{Cov}[X, Y] < 0 \iff$ X と Y には負の相関

定理（分散公式）

2 変量確率変数 (X, Y) と $a, b \in \mathbb{R}$ に対して次式が成立する．

$$\mathbb{V}[aX + bY] = a^2\mathbb{V}[X] + b^2\mathbb{V}[Y] + 2ab\mathrm{Cov}[X, Y].$$

系

n 変量確率変数 $(X_1, \cdots, X_n)$ と $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, n$ に対して次式が成立する．

$$\mathbb{V}\left[\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mathbb{V}[X_i] + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} a_i a_j \mathrm{Cov}[X_i, X_j].$$

例 (11)

A証券の投資収益率の期待値 μ_A =10 %，標準偏差 σ_A =8 %，
B証券の投資収益率の期待値 μ_B =14 %，標準偏差 σ_B =10 %，
A証券とB証券の投資収益率の相関係数 ρ =0.2 とする．
A 証券と B 証券をそれぞれ 50%ずつ保有するポートフォリオの投資収益率の期待値 μ と標準偏差 σ は各々次で与えられる．

$$
\begin{aligned}
\mu &= 0.5\mu_A + 0.5\mu_B = 0.5 \times 10 + 0.5 \times 14 = 12(\%), \\
\sigma &= \left(0.5^2\sigma_A^2 + 0.5^2\sigma_B^2 + 2 \times 0.5 \times 0.5\sigma_A\sigma_B\rho\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 0.5 \times \left(8^2 + 10^2 + 2 \times 8 \times 10 \times 0.2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 0.5 \times \sqrt{64 + 100 + 32} = 0.5 \times \sqrt{196} = 7(\%).
\end{aligned}
$$

□

問題 I

問題 1 確率変数 Z が次のように定義されている．

$$Z = \begin{cases} 10 & 1\ \text{または}\ 2 \\ 3 & 3\ \text{または}\ 4 \\ 1 & 5\ \text{または}\ 6 \end{cases}$$

すなわち，サイコロを振って，サイコロの目によって Z の値が決定するルールを考えている．そして，それぞれの目の出る確率は次のとおりとする．

$$P(1\ \text{または}\ 2) = \frac{1}{3},\quad P(3\ \text{または}\ 4) = \frac{1}{3},$$
$$P(5\ \text{または}\ 6) = \frac{1}{3}.$$

問 1-1 平均 $\mathbb{E}[Z]$，分散 $\mathbb{V}[Z]$ を求めよ．

問 1-2 確率変数 Y を $Y := Z - 1$ と定義する．
平均 $\mathbb{E}[Y]$，分散 $\mathbb{V}[Y]$ を求めよ．

問題 2 次が成立することを示しなさい．

(1)

$$\mathbb{V}[aX + bY] = a^2\mathbb{V}[X] + b^2\mathbb{V}[Y] + 2ab\mathrm{Cov}[X, Y].$$

(2)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

問題 3 X を平均 μ，分散 σ^2 の正規分布に従う確率変数とし，$f(x, \mu, \sigma^2)$ をその確率密度関数とする．このとき λ を任意の実数として，次が成立することを示しなさい．

(1)

$$e^{\lambda x} f(x, \mu, \sigma^2) = e^{\lambda\mu + \frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2} f(x, \mu + \lambda\sigma^2, \sigma^2).$$

(2)

$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda X}\right] = e^{\lambda\mu + \frac{1}{2}\lambda^2\sigma^2}.$$