デリバティブ論
第 3 回 多期間 2 項モデル

岩城 秀樹

京都大学大学院経営管理研究部

2007 年 10 月 16 日

多期間 2 項モデル

各資産の取引は時点 t, $t = 0, 1, \cdots, T$, で可能.

	$t=0$		$t=1$		$t=2$		$\cdots$		$t=T$
									Su^T
									$Su^{T-1}d$
					Su^2				
			Su						
原資産:	S				Sdu		$\cdots$		$\vdots$
			Sd						
					Sd^2				
									$Sud^{T-1}s$
									Sd^T
無危険資産:	1	$\rightarrow$	R	$\rightarrow$	R^2	$\rightarrow$	$\cdots$	$\rightarrow$	R^T

Figure: 図１：原資産と無危険資産の価格の動き

CRR の２項オプション価格式

$C(0, S) :=$　満期時点 T，行使価格 K のヨーロピアン・コール・オプション現在価格.

$P(0, S) :=$　満期時点 T，行使価格 K のヨーロピアン・プット・オプション現在価格.

定理 (CRR の２項オプション価格式)

$$
\begin{aligned}
C(0, S) &= S\mathrm{B}_c(j_c^*; T, (q_u/R)u) - KR^{-T}\mathrm{B}_c(j_c^*; T, q_u), &(1)\\
P(0, S) &= KR^{-T}\mathrm{B}(j_p^*; T, q_u) - S\mathrm{B}(j_p^*; T, (q_u/R)u), &(2)
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{B}_c(x; T, q) := 1 - \mathrm{B}(x-1; T, q), \quad \mathrm{B}(x; T, q) := \sum_{j=0}^{x} \frac{T!}{j!(T-j)!} q^j (1-q)^{T-j},
$$

$$
j_c^* := \frac{\ln\left(K/(Sd^T)\right)}{\ln(u/d)} \text{以上の最小整数}, \quad j_p^* := \frac{\ln\left(K/(Sd^T)\right)}{\ln(u/d)} \text{以下の最大整数}.
$$

$C(t, S(t)) :=$ 原資産価格が $S(t)$ であったときのコール・オプションの時点 t 価格.

$$
\begin{array}{llcl}
 & \text{時点 } t & & \text{時点 } t+1 \\
\hline
 & & & S(t)u \\
\text{原資産:} & S(t) & \begin{smallmatrix}\nearrow \\ \searrow\end{smallmatrix} & \\
 & & & S(t)d \\
\text{無危険資産:} & S_0(t) & \rightarrow & S_0(t)R
\end{array}
$$

$$\therefore \quad C(t, S(t)) = \frac{C(t+1, S(t)u)}{R} q_u + \frac{C(t+1, S(t)d)}{R} q_d. \tag{3}$$

$$\therefore \quad C(0, S) = \frac{1}{R^T} \sum_{j=0}^{T} \frac{T!}{j!(T-j)!} q_u^j q_d^{T-j} \{S u^j d^{T-j} - K\}^+. \tag{4}$$

さらに

$$\{Su^j d^{T-j} - K\}^+ = \begin{cases} Su^j d^{T-j} - K & ; j \geq \frac{\ln\left(K/(Sd^T)\right)}{\ln(u/d)}, \\ 0 & ; j < \frac{\ln\left(K/(Sd^T)\right)}{\ln(u/d)}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad & C(0, S) \\ = & \sum_{j=j_c^*}^{T} \frac{T!}{j!(T-j)!} q_u^j q_d^{T-j} R^{-T} (Su^j d^{T-j} - K) \\ = & S \sum_{j=j_c^*}^{T} \frac{T!}{j!(T-j)!} \left(\frac{q_u}{R} u\right)^j \left(\frac{q_d}{R} d\right)^{T-j} - KR^{-T} \sum_{j=j_c^*}^{T} \frac{T!}{j!(T-j)!} q_u^j q_d^{T-j}. \end{aligned}$$

$\square$

問題

『売買時点を除いては，時点 T でのみキャッシュ・フロー $X(T, S(T))$ が発生するデリバティブの現在価格の導出.』

$S_X(t, S(t)) :=$ 原資産価格が $S(t)$ であったときのデリバティブの時点 t での価値（価格）.

$S_X(T, S(T)) = X(T, S(T))$ と等価となるポートフォリオを構築できるかどうかについて考える.

$\theta(s) :=$ 時点 $s-1$ から時点 s まで保有する原資産保有単位数.
$\theta_0(s) :=$ 時点 $s-1$ から時点 s まで保有する無危険資産保有単位数.

リスク中立化法 II

時点 t	$t+1$	$t+2$
		$\theta_0(t+2)S_0(t)R^2$ $+\theta(t+2)S(t)u^2$ $= S_X(t+2, S(t)u^2)$
	$\theta_0(t+1)S_0(t)R$ $+\theta(t+1)S(t)u$ $= \theta_0(t+2)S_0(t)R$ $+\theta(t+2)S(t)u$	
$\theta_0(t+1)S_0(t)$ $+\theta(t+1)S(t)$		$\theta_0(t+2)S_0(t)R^2$ $+\theta(t+2)S(t)ud$ $= S_X(t+2, S(t)ud)$
	$\theta_0(t+1)S_0(t)R$ $+\theta(t+1)S(t)d$ $= \theta_0(t+2)S_0(t)R$ $+\theta(t+2)S(t)d$	
		$\theta_0(t+2)S_0(t)R^2$ $+\theta(t+2)S(t)d^2$ $= S_X(t+2, S(t)d^2)$

Figure: 図２：等価ポートフォリオの推移

図 2 を満たすように $\theta_0(s)$ と $\theta(s)$, $s = t+1, t+2$ の値をとれば，

ポートフォリオの価値＝デリバティブの価値.

$$\therefore \quad S_X(t, S(t)) = \theta_0(t+1)S_0(t) + \theta(t+1)S(t). \tag{5}$$

このことを，より一般的に書くと，

$$\left\{\begin{array}{rcl} \theta_0(t+2)S_0(t+2) + \theta(t+2)S(t+2) & = & S_X(t+2, S(t+2)), \\ \theta_0(t+1)S_0(t+1) + \theta(t+1)S(t+1) & = & \theta_0(t+2)S_0(t+1) + \theta(t+2)S(t+1), \\ S_X(t, S(t)) & = & \theta_0(t+1)S_0(t) + \theta(t+1)S(t). \end{array}\right. \tag{6}$$

$$\therefore \quad \left\{\begin{array}{rcl} \theta_0(T)S_0(T) + \theta(T)S(T) & = & X(T, S(T)), \\ \theta_0(t)S_0(t) + \theta(t)S(t) & = & \theta_0(t+1)S_0(t) + \theta(t+1)S(t), \\ & & \qquad t = 1, \cdots, T-1, \\ S_X(0, S) & = & \theta_0(1)S_0(0) + \theta(1)S(0). \end{array}\right. \tag{7}$$

取引戦略 := 各時点で保有するポートフォリオの組合せ.

以上から,
取引戦略 $\theta := \{(\theta_0(t), \theta(t)) : t = 1, \cdots, T\}$ が

$$\begin{aligned} \theta_0(t)S_0(t) + \theta(t)S(t) &= \theta_0(t+1)S_0(t) + \theta(t+1)S(t), \\ & \qquad t = 1, \cdots, T-1 \end{aligned} \tag{8}$$

を満たすとき,

$$\begin{aligned} & \theta \text{ に基づくポートフォリオの時点 } T \text{ 価値} \\ = \;& \text{デリバティブの時点 } T \text{ 価値} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \; S_X(0, S) = \theta_0(1)S_0(0) + \theta(1)S(0), \; (\theta_0(1), \theta(1)) \in \theta.$$

リスク中立化法 V

(8) は,

左辺 = 時点 $t-1$ で購入したポートフォリオの時点 t での価値,
右辺 = 時点 t で購入するポートフォリオの時点 t での価値.

∴各時点でのポートフォリオの改訂は一度，保有しているポートフォリオを清算，その清算した金額で新たなポートフォリオを購入.

∴ 自己資金調達取引戦略 :=(8) を満たす取引戦略.

定理

すべての時点 t, $t = 0, 1, \cdots, T-1$, において

$$S(t) = \mathbb{E}^Q\left[R^{-1}S(t+1)|S(t)\right] \qquad (9)$$

となる確率 Q が存在するならば,

$$S_X(0, S) = \mathbb{E}^Q\left[R^{-T}X(T, S(T))\right], \qquad (10)$$

$\mathbb{E}^Q[\cdot|S(t)] =$ $S(t)$ の値を所与の条件とする確率 Q の下での条件付き期待値.

証明: (7) より

$$
\begin{aligned}
&\frac{X(T,S(T))}{R^T} = \frac{\theta_0(T)}{R^{T-1}}\frac{S_0(T)}{R} + \frac{\theta(T)}{R^{T-1}}\frac{S(T)}{R},\\
&-\left(\frac{\theta_0(T)}{R^{T-1}}S_0(T-1) + \frac{\theta(T)}{R^{T-1}}S(T-1)\right)\\
&+\left(\frac{\theta_0(T-1)}{R^{T-2}}\frac{S_0(T-1)}{R} + \frac{\theta(T-1)}{R^{T-2}}\frac{S(T-1)}{R}\right) = 0,\\
&\vdots\\
&-\left(\frac{\theta_0(2)}{R}S_0(1) + \frac{\theta(2)}{R}S(1)\right)\\
&+\left(\theta_0(1)\frac{S_0(1)}{R} + \theta(1)\frac{S(1)}{R}\right) = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \frac{X(T, S(T))}{R^T} \\
&= \sum_{s=1}^{T-1} \left\{ \frac{\theta_0(s+1)}{R^s} \left(\frac{S_0(s+1)}{R} - S_0(s) \right) + \frac{\theta(s+1)}{R^s} \left(\frac{S(s+1)}{R} - S(s) \right) \right\} \\
&\quad + \theta_0(1) \frac{S_0(1)}{R} + \theta(1) \frac{S(1)}{R} \\
&= \sum_{s=1}^{T-1} \frac{\theta(s+1)}{R^s} \left(\frac{S(s+1)}{R} - S(s) \right) + \theta_0(1) S_0(0) + \theta(1) \frac{S(1)}{R},
\end{aligned}
$$

リスク中立化法 IX

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}^Q\left[R^{-(T)}X(T,S(T))\right] &= \sum_{s=1}^{T-1}\mathbb{E}^Q\left[\frac{\theta(s+1)}{R^s}\left(\frac{S(s+1)}{R}-S(s)\right)\right] \\
&\quad +\mathbb{E}^Q[\theta_0(1)S_0(0)]+\mathbb{E}^Q[\theta(1)R^{-1}S(1)] \\
&= \sum_{s=1}^{T-1}\mathbb{E}^Q\left[\mathbb{E}^Q\left[\frac{\theta(s+1)}{R^s}\left(\frac{S(s+1)}{R}-S(s)\right)\middle| S(s)\right]\right] \\
&\quad +\theta_0(1)S_0(0)+\theta(1)\mathbb{E}^Q[R^{-1}S(1)] \\
&= \sum_{s=1}^{T-1}\mathbb{E}^Q\left[\frac{\theta(s+1)}{R^s}\left(\mathbb{E}^Q\left[\frac{S(s+1)}{R}\middle| S(s)\right]-S(s)\right)\right] \\
&\quad +\theta_0(1)S_0(0)+\theta(1)S(0) \\
&= \theta_0(1)S_0(0)+\theta(1)S(0).
\end{aligned}
$$

∴ (7) より (10) を得る. □

リスク中立化法 X

時点 t での原資産価格を所与の条件としたとき，
(9) を満たす確率 Q の下で

　　原資産とデリバティブの時間区間 $[t, t+1]$ における期待収益率
$=$　無危険利子率.

$\therefore$ (9) を満たす確率 Q をリスク中立確率と呼ぶ.

$q_u(t+1|S(t)) :=$ $S(t)$ の値を所与としたときの $S(t+1) = S(t)u$ となる確率 Q の下での条件付き確率,

$q_d(t+1|S(t)) :=$ $S(t)$ の値を所与としたときの $S(t+1) = S(t)d$ となる確率 Q の下での条件付き確率.

$$(9) \Rightarrow \begin{cases} S(t) = R^{-1}S(t)u \times q_u(t+1|S(t)) + R^{-1}S(t)d \times q_d(t+1|S(t)) \\ 1 = q_u(t+1|S(t)) + q_d(t+1|S(t)). \end{cases}$$

$$\Rightarrow q_u(t+1|S(t)) = \frac{R-d}{u-d} \equiv q_u, \qquad q_d(t+1|S(t)) = \frac{u-R}{u-d} \equiv q_d.$$

∴ $S(t)$ の値を所与としたときの
$\{S(t+1)=S(t)u\}$, $\{S(t+1)=S(t)d\}$ となる確率 Q の下での条件付き確率は,
時点 t と資産価格 $S(t)$ の値とは無関係に q_u, q_d.

∴ (9) を満たすリスク中立確率は,

$$\begin{aligned}\Omega &:= \{S(T)=Sx_1x_2\cdots x_T : x_t=u,d,\ t=1,2,\cdots,T\}\\ &= \text{時点 } T \text{ で起こりうる原資産価格の全体集合},\end{aligned}$$

$$\begin{cases} Q(\{S(T)=Sx_1x_2\cdots x_T\}) := q_1q_2\cdots q_T,\ x_t=u,d,\ t=1,2,\cdots,T,\\ q_t := \begin{cases} q_u;\ x_t=u,\\ q_d;\ x_t=d,\end{cases} \quad t=1,2,\cdots,T\\ Q(\mathcal{A}\cup\mathcal{B}) := Q(\mathcal{A})+Q(\mathcal{B}),\ \mathcal{A}\cap\mathcal{B}=\emptyset,\ \mathcal{A},\mathcal{B}\subset\Omega,\\ Q(\emptyset) := 0\end{cases} \tag{11}$$

によって定義される Q で与えられる.

注

$$Q\left(\{S(T) = Su^j d^{T-j}\}\right) = \frac{T!}{j!(T-j)!} q_u^j q_d^{T-j}$$

□

行使価格 K のヨーロピアン・コール・オプションの場合：
$X(T, S(T)) = \{S(T) - K\}^+$ であるから，

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^Q\left[R^{-T} X(T, S(T))\right] &= \mathbb{E}^Q\left[R^{-T}\{S(T) - K\}^+\right] \\
&= \sum_{j=0}^{T} R^{-T}\{Su^j d^{T-j} - K\}^+ \frac{T!}{j!(T-j)!} q_u^j q_d^{T-j}
\end{aligned}$$

となり，(4) に一致．

問題 I

問題 1　2 項分布は，次で定義される．

$$P(X = k) = {}_nC_k p^k (1 - p)^{n-k},$$
$${}_nC_k := \frac{n!}{k!(n-k)!},\ k = 0, 1, \cdots, n.$$

問 1-1　2 項分布の期待値を計算しなさい．

問 1-1　2 項分布の分散を計算しなさい．

問題 2　2 期間 2 項モデルを考える．いま，$u = 1.2$, $d = 0.9$, $r = 1.05$, $S = 100$, $K = 100$, とする．このとき，2 期期末を満期とするヨーロッパ型コール・オプションのプレミアムを計算しなさい．ただし，株価が上昇する確率は 0.6，下落する確率は 0.4 とする．

問題 3　2 期間モデル (時点 0, 時点 1, 時点 2) において，原資産を株式とするヨーロッパ型コール・オプションを考える．株式の各期首価格を S 円とすると，期末の株価は，上昇して uS 円になるか下落して dS 円になるかの 2 つの可能性があるとする．
各期間で利子率一定の無リスク証券が存在するとして，以下の問に答えなさい．

問 3-1　コール・オプションの等価ポートフォリオ（複製ポートフォリオ）を求めなさい．

問 3-1　リスク中立 (マルチンゲール) 確率を求めなさい．

問 3-1　コール・オプションの価格式を導出しなさい．