デリバティブ論
第２回 １期間２項モデル

岩城 秀樹

京都大学大学院経営管理研究部

2007 年 10 月 9 日

1 期間 2 項モデル

資産の取引は現時点＝時点 $\mathbf{0}$ と将来時点＝時点 $\boldsymbol{T}$ でのみ可能.

問題

『ある株式を原資産とする満期時点 $\boldsymbol{T}$，行使価格 $\boldsymbol{K}$ のヨーロピアン・コール・オプションの現在価格 $\boldsymbol{C}(\mathbf{0})$ の導出.』

$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{t}) :=$ 時点 $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{t} = \mathbf{0}, \boldsymbol{T}$，での当該オプションの原株価格.
$\boldsymbol{S}_{\mathbf{0}}(\boldsymbol{t}) :=$ 時点 $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{t} = \mathbf{0}, \boldsymbol{T}$，での無危険資産の価格.

時点:	$t = 0$		$t = T$
			Su
原資産:	S	$\nearrow$ $\searrow$	
			Sd
無危険資産:	1	$\rightarrow$	R

Figure: 原株価格と無危資産価格の推移

注

無裁定 $\Rightarrow u > R > d > 0.$

$$\begin{array}{ccc} t = 0 & & t = T \\ \hline & & \{Su - K\}^+ \\ C(0) & \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} & \\ & & \{Sd - K\}^+ \end{array}$$

Figure: オプションの価値の推移

現時点で無危険資産 θ_0 単位，株式 θ 単位購入して，等価ポートフォリオを構築する.

$$\begin{cases} \theta_0 R + \theta S u = C_u := \{Su - K\}^+ \\ \theta_0 R + \theta S d = C_d := \{Sd - K\}^+ \end{cases} \tag{1}$$

$$\iff \quad \theta_0 = \frac{uC_d - dC_u}{R(u-d)}, \quad \theta = \frac{C_u - C_d}{S(u-d)}. \tag{2}$$

$\therefore$ 無裁定 $\Rightarrow$

$$\begin{aligned} C(0) &= \theta_0 S_0(0) + \theta S(0) \\ &= \frac{uC_d - dC_u}{R(u-d)} \times 1 + \frac{C_u - C_d}{S(u-d)} \times S \\ &= \frac{1}{R}[q_u\{Su - K\}^+ + q_d\{Sd - K\}^+], \qquad (3) \\ & \quad q_u := \frac{R-d}{u-d}, \; q_d := 1 - q_u. \end{aligned}$$

□

$$\omega_1 := \text{時点 } T \text{ で原株価格が } S(T) = Su \text{ となる事象},$$
$$\omega_2 := \text{時点 } T \text{ で原株価格が } S(T) = Sd \text{ となる事象},$$
$$\Omega := \{\omega_1, \omega_2\}$$

として,

$$Q(\Omega) := q_u + q_d, \quad Q(\omega_1) := q_u, \quad Q(\omega_2) := q_d, \quad Q(\emptyset) := 0 \tag{4}$$

によって $Q : \Omega \to \mathbb{R}$ を定義 $\Rightarrow$ Q は確率.

$$\because \quad Q(\Omega) = Q(\omega_1) + Q(\omega_2) = 1, \qquad Q(\omega) \geq 0, \quad \omega \in \Omega.$$

$\mathbb{E}^{Q}$:= 確率 Q の下での期待値 ⇒

$$C(0) = \mathbb{E}^{Q}[R^{-1}\{S(T) - K\}^{+}], \tag{5}$$

$$\begin{cases} S_0(0) = \mathbb{E}^{Q}[R^{-1}S_0(T)], \\ S(0) = \mathbb{E}^{Q}[R^{-1}S(T)]. \end{cases} \tag{6}$$

(5) と (6) $\Longleftrightarrow$ 原資産，無危険資産およびオプションの確率 Q の下での期待収益率が無危険利子率 r に等しい.

リスク中立確率 := 任意の資産の期待収益率が無危険利子率に等しくなる確率.

問題

『時点 T でのキャッシュ・フローが

$$X(T,S(T)) = \begin{cases} x_u; \ \{S(T) = Su\} \text{ が実現した場合}, \\ x_d; \ \{S(T) = Sd\} \text{ が実現した場合} \end{cases} \tag{7}$$

となる任意のデリバティブの現在価格 $S_X(0)$ の導出.』

(定理 1.1)

条件 *1:* 時点 T で $X(T,S(T))$ と等価となる等価ポートフォリオが存在.

条件 *2:* 等価ポートフォリオ構成資産の価格情報からリスク中立確率 Q が求められる.

$$\Longrightarrow \qquad S_X(0) = \mathbb{E}^Q[R^{-1}X(T,S(T))]. \tag{8}$$

$$
\begin{cases} 1 = R^{-1}R \times q_1 + R^{-1}R \times q_2, \\ S = R^{-1}Su \times q_1 + R^{-1}Sd \times q_2 \end{cases}
$$
$$
\iff \begin{cases} 1 = 1 \times q_1 + 1 \times q_2, \\ 1 = R^{-1}u \times q_1 + R^{-1}d \times q_2 \end{cases} \tag{9}
$$
$$
\iff q_1 = q_u,\ q_2 = q_d.
$$

∴ (6) を満たすリスク中立確率が求められる.
(1) で $C_u = x_u$, $C_d = x_d$ と置き換えれば,
無危険資産 θ_0 単位，原資産 θ 単位とするポートフォリオは等価ポートフォリオ.

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad C(0) &= \theta_0 S_0(0) + \theta S(0) \\
&= \theta_0 \mathbb{E}^Q[R^{-1}S_0(T)] + \theta \mathbb{E}^Q[R^{-1}S(T)] \\
&= \mathbb{E}^Q[R^{-1}(\theta_0 S_0(T) + \theta S(T))] \\
&= \mathbb{E}^Q[R^{-1}X(T, S(T))]. \quad \square
\end{aligned} \tag{10}
$$

定理 1.1 の経済学的意味

ω_j に対する状態請求権 $:=$ ω_j, $j = 1, 2$，が生起したとき，そのときに限って 1 円が支払われる資産．

$\varphi_j :=$ 事象 ω_j, $j = 1, 2$，に対する状態請求権の現時点価格．

$$\begin{tikzcd}
t = 0 & t = T \\
 & 1;\ \omega_1 \text{ が生起した場合} \\
\varphi_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & 0;\ \omega_2 \text{ が生起した場合} \\
 & 0;\ \omega_1 \text{ が生起した場合} \\
\varphi_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & 1;\ \omega_2 \text{ が生起した場合}
\end{tikzcd}$$

Figure: 状態請求権の価値の推移

$$\therefore \text{無裁定} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} R \times \varphi_1 + \ R \times \varphi_2 & = \ 1, \\ Su \times \varphi_1 + Sd \times \varphi_2 & = \ S. \end{cases} \tag{11}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \varphi_1 = \frac{1}{R}\frac{R-d}{u-d} = \frac{q_u}{R}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{R}\frac{u-R}{u-d} = \frac{q_d}{R}.$$

∴ 無裁定 ⇒

$$\begin{aligned} S_X(0) &= \varphi_1 \times x_u + \varphi_2 \times x_d \\ &= R^{-1} q_u \times x_u + R^{-1} q_d \times x_d. \end{aligned} \tag{12}$$

以上から，
将来生起する状態に対する状態請求権の現在価値（価格）がわかる
⇒

デリバティブの現在価格＝「生起状態におけるデリバティブのキャッシュ・フロー × 状態請求権の現在価格」の生起状態に関する和．

□

$\varphi(\omega)$:= $\omega \in \Omega$ に対する状態請求権の価格.

無裁定 $\Rightarrow$

$$\varphi(\omega_1) = \varphi_1 > 0, \quad \varphi(\omega_2) = \varphi_2 > 0,$$
$$\varphi(\emptyset) = 0, \quad \varphi(\Omega) = \varphi(\omega_1) + \varphi(\omega_2),$$
$$\varphi(\Omega) = \varphi(\omega_1) + \varphi(\omega_2) = R^{-1}.$$

リスク中立確率 $Q(\omega) \equiv \varphi(\omega)/\varphi(\Omega), \quad \omega \in \Omega.$

$\therefore$

状態請求権の価格 $\Rightarrow$ リスク中立確率を導出可,
リスク中立確率 $\Rightarrow$ 状態請求権価格を導出可.

$\square$

問題 1 1 期間 2 項モデルを考える．ある株式の現在価値が 100 円であり，この株式は上昇か下落のいずれかの状態をとるものとする．1 期間の上昇率が 40%，下落率が 30%であり，無リスク資産の利子率が 5%である．また，上昇する確率は $\mathbf{0.6}$，下落する確率は $\mathbf{0.4}$ とする．このとき，次の各問に答えなさい．

問 1-1 リスク中立確率を計算しなさい．

問 1-2 株式を原資産とする権利行使価格 100 円のコールオプション価格を計算しなさい．

問 1-3 問 2 と同一の計算をリスク中立確率ではなく，実確率で計算しなさい．割り切れない場合は，小数点第 3 位を四捨五入しなさい．また，求めた価格は，問 2 で求めた価格と比べて大きくなるか，あるいは小さくなるか答えなさい．

問題 II

問題 2 1 期間 2 項モデルを考える．いま，$u = 1.4$, $d = 0.9$, $r = 1.2$, $S = 100$, $K = 100$, 原資産が上昇/下落する確率をそれぞれ 0.5 とする．このとき，以下の問に答えなさい．

問 2-1 満期において原資産価格が行使価格を上回ったらその差額の金額，そうでなければゼロ円の利益となる通常のコール・オプションのプレミアムを計算しなさい．

問 2-2 満期において原資産価格が行使価格を上回ったら L 円，そうでなければゼロ円の利益となるデジタル・オプションのプレミアムを計算しなさい．ただし $L = 30$ 円とする．

問題 III

問題 3　行使価格 **100** 円のプットオプションを **1** 単位購入（プレミアム $\boldsymbol{p_1}$ 円），行使価格 **90** 円のプットオプションを **1** 単位売却（プレミアム $\boldsymbol{p_2}$ 円）した場合のペイオフ関数のグラフを，プレミアムの影響を考慮して（プレミアムの大小を考えて）描きなさい．