

デリバティブ論
第2回 1 期間 2 項モデル

岩城 秀樹

京都大学大学院経営管理研究部

2007 年 10 月 9 日

1 期間 2 項モデル

資産の取引は現時点=時点 0 と将来時点=時点 T でのみ可能.

問題

『ある株式を原資産とする満期時点 T , 行使価格 K のヨーロッパ・コール・オプションの現在価格 $C(0)$ の導出.』

$S(t) :=$ 時点 $t, t = 0, T$, での当該オプションの原株価格.

$S_0(t) :=$ 時点 $t, t = 0, T$, での無危険資産の価格.

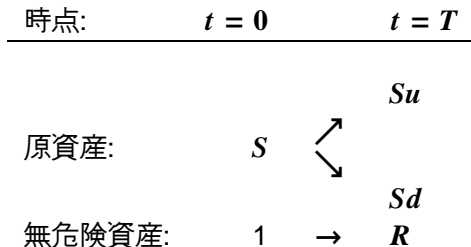


Figure: 原株価格と無危険資産価格の推移

注

無裁定 $\Rightarrow u > R > d > 0$.

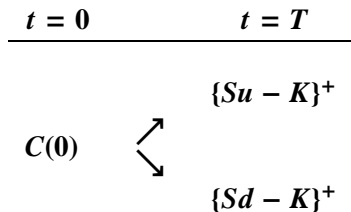


Figure: オプションの価値の推移

現時点で無危険資産 θ_0 単位, 株式 θ 単位購入して, 等価ポートフォリオを構築する.

$$\begin{cases} \theta_0 R + \theta Su = C_u := \{Su - K\}^+ \\ \theta_0 R + \theta Sd = C_d := \{Sd - K\}^+ \end{cases} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \theta_0 = \frac{uC_d - dC_u}{R(u - d)}, \quad \theta = \frac{C_u - C_d}{S(u - d)}. \quad (2)$$

\therefore 無裁定 \Rightarrow

$$\begin{aligned} C(0) &= \theta_0 S_0(0) + \theta S(0) \\ &= \frac{uC_d - dC_u}{R(u - d)} \times 1 + \frac{C_u - C_d}{S(u - d)} \times S \\ &= \frac{1}{R} [q_u \{Su - K\}^+ + q_d \{Sd - K\}^+], \quad (3) \\ q_u &:= \frac{R - d}{u - d}, \quad q_d := 1 - q_u. \end{aligned}$$

□

$\omega_1 :=$ 時点 T で原株価格が $S(T) = Su$ となる事象,
 $\omega_2 :=$ 時点 T で原株価格が $S(T) = Sd$ となる事象,
 $\Omega := \{\omega_1, \omega_2\}$

として,

$$Q(\Omega) := q_u + q_d, \quad Q(\omega_1) := q_u, \quad Q(\omega_2) := q_d, \quad Q(\emptyset) := 0 \quad (4)$$

によって $Q : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ を定義 $\Rightarrow Q$ は確率.

$$\because \quad Q(\Omega) = Q(\omega_1) + Q(\omega_2) = 1, \quad Q(\omega) \geq 0, \quad \omega \in \Omega.$$

\mathbb{E}^Q := 確率 Q の下での期待値 \Rightarrow

$$C(\mathbf{0}) = \mathbb{E}^Q[R^{-1}\{S(T) - K\}^+], \quad (5)$$

$$\begin{cases} S_0(\mathbf{0}) = \mathbb{E}^Q[R^{-1}S_0(T)], \\ S(\mathbf{0}) = \mathbb{E}^Q[R^{-1}S(T)]. \end{cases} \quad (6)$$

(5) と (6) \iff 原資産, 無危険資産およびオプションの確率 Q の下での期待収益率が無危険利子率 r に等しい.

リスク中立確率 := 任意の資産の期待収益率が無危険利子率に等しくなる確率.

問題

『時点 T でのキャッシュ・フローが

$$X(T, S(T)) = \begin{cases} x_u; \{S(T) = Su\} \text{ が実現した場合,} \\ x_d; \{S(T) = Sd\} \text{ が実現した場合} \end{cases} \quad (7)$$

となる任意のデリバティブの現在価格 $S_X(\mathbf{0})$ の導出.』

(定理 1.1)

- 条件 1: 時点 T で $X(T, S(T))$ と等価となる等価ポートフォリオが存在.
- 条件 2: 等価ポートフォリオ構成資産の価格情報からリスク中立確率 Q が求められる.

$$\Rightarrow S_X(\mathbf{0}) = \mathbb{E}^Q[R^{-1}X(T, S(T))]. \quad (8)$$

定理 1.1 の証明

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} 1 &= R^{-1}R \times q_1 + R^{-1}R \times q_2, \\ S &= R^{-1}Su \times q_1 + R^{-1}Sd \times q_2 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 1 &= 1 \times q_1 + 1 \times q_2, \\ 1 &= R^{-1}u \times q_1 + R^{-1}d \times q_2 \end{cases} \quad (9) \\
 \Leftrightarrow & q_1 = q_u, q_2 = q_d.
 \end{aligned}$$

∴ (6) を満たすリスク中立確率が求められる。

(1) で $C_u = x_u$, $C_d = x_d$ と置き換えれば,
 無危険資産 θ_0 単位, 原資産 θ 単位とするポートフォリオは等価
 ポートフォリオ。

$$\begin{aligned}
 \therefore C(0) &= \theta_0 S_0(0) + \theta S(0) \\
 &= \theta_0 \mathbb{E}^Q[R^{-1}S_0(T)] + \theta \mathbb{E}^Q[R^{-1}S(T)] \\
 &= \mathbb{E}^Q[R^{-1}(\theta_0 S_0(T) + \theta S(T))] \\
 &= \mathbb{E}^Q[R^{-1}X(T, S(T))]. \quad \square \quad (10)
 \end{aligned}$$

定理 1.1 の経済学的意味

ω_j に対する状態請求権 $:= \omega_j, j = 1, 2$, が生起したとき, そのときに限って 1 円が支払われる資産.

$\varphi_j :=$ 事象 $\omega_j, j = 1, 2$, に対する状態請求権の現時点価格.

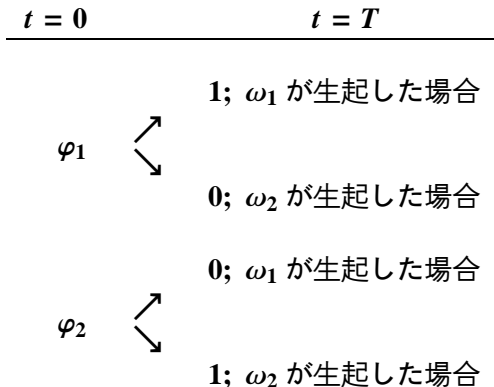


Figure: 状態請求権の価値の推移

$$\begin{aligned} \therefore \text{無裁定} &\Rightarrow \begin{cases} R \times \varphi_1 + R \times \varphi_2 = 1, \\ Su \times \varphi_1 + Sd \times \varphi_2 = S. \end{cases} & (11) \\ &\Leftrightarrow \varphi_1 = \frac{1}{R} \frac{R - d}{u - d} = \frac{q_u}{R}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{R} \frac{u - R}{u - d} = \frac{q_d}{R}. \end{aligned}$$

\therefore 無裁定 \Rightarrow

$$\begin{aligned} S_X(0) &= \varphi_1 \times x_u + \varphi_2 \times x_d \\ &= R^{-1} q_u \times x_u + R^{-1} q_d \times x_d. \end{aligned} \quad (12)$$

以上から,

将来生起する状態に対する状態請求権の現在価値（価格）がわかる

\Rightarrow

デリバティブの現在価格 = 「生起状態におけるデリバティブのキャッシュ・フロー \times 状態請求権の現在価格」の生起状態に関する和。

□

$\varphi(\omega) := \omega \in \Omega$ に対する状態請求権の価格.

無裁定 \Rightarrow

$$\begin{aligned}\varphi(\omega_1) &= \varphi_1 > 0, & \varphi(\omega_2) &= \varphi_2 > 0, \\ \varphi(\emptyset) &= 0, & \varphi(\Omega) &= \varphi(\omega_1) + \varphi(\omega_2), \\ \varphi(\Omega) &= \varphi(\omega_1) + \varphi(\omega_2) &= R^{-1}.\end{aligned}$$

リスク中立確率 $Q(\omega) \equiv \varphi(\omega)/\varphi(\Omega)$, $\omega \in \Omega$.

\therefore

状態請求権の価格 \Rightarrow リスク中立確率を導出可,
リスク中立確率 \Rightarrow 状態請求権価格を導出可.

□

問題 I

問題 1 1 期間 2 項モデルを考える。ある株式の現在価値が 100 円であり、この株式は上昇か下落のいずれかの状態をとるものとする。1 期間の上昇率が 40%、下落率が 30%であり、無リスク資産の利子率が 5%である。また、上昇する確率は 0.6、下落する確率は 0.4 とする。このとき、次の各問に答えなさい。

問 1-1 リスク中立確率を計算しなさい。

問 1-2 株式を原資産とする権利行使価格 100 円のコールオプション価格を計算しなさい。

問 1-3 問 2 と同一の計算をリスク中立確率ではなく、実確率で計算しなさい。割り切れない場合は、小数点第 3 位を四捨五入しなさい。また、求めた価格は、問 2 で求めた価格と比べて大きくなるか、あるいは小さくなるか答えなさい。

問題 II

- 問題 2 1 期間 2 項モデルを考える．いま， $u = 1.4$ ， $d = 0.9$ ， $r = 1.2$ ， $S = 100$ ， $K = 100$ ，原資産が上昇/下落する確率をそれぞれ 0.5 とする．このとき，以下の問に答えなさい．
- 問 2-1 満期において原資産価格が行使価格を上回ったらその差額の金額，そうでなければゼロ円の利益となる通常のコール・オプションのプレミアムを計算しなさい．
- 問 2-2 満期において原資産価格が行使価格を上回ったら L 円，そうでなければゼロ円の利益となるデジタル・オプションのプレミアムを計算しなさい．ただし $L = 30$ 円とする．

問題 III

問題 3 行使価格 100 円のプットオプションを 1 単位購入 (プレミアム p_1 円), 行使価格 90 円のプットオプションを 1 単位売却 (プレミアム p_2 円) した場合のペイオフ関数のグラフを, プレミアムの影響を考慮して (プレミアムの大小を考えて) 描きなさい.