p.3. 下 l.2.

誤

$$\forall\epsilon>0,\ \exists\,\text{区間列}\ \langle I_n\subset\mathbb{R};\ n\in\mathbb{N}\rangle;\ E\subset\cup_{n=1}^{\infty}I_n,\ \sum_{n=1}^{\infty}l(I_n)<\epsilon$$

正

$$\forall\epsilon>0,\ \exists\,\text{区間列}\ \langle I_n\subset\mathbb{R};\ n\in\mathbb{N}\rangle;\ E\subseteq\cup_{n=1}^{\infty}I_n,\ \sum_{n=1}^{\infty}l(I_n)<\epsilon$$

p.4. l.1–13.

誤　$E\subset\mathbb{R}$ が零集合とは，E を覆う区間列の中に区間列の長さの総和を限りなく零に近づけれるものが存在するということである．空集合は定義により零集合となる．

【問 1.1】 一点集合 $\{x\}$, $x\in\mathbb{R}$, および任意の可算集合 $E:=\{x_n\in\mathbb{R};\ n\in\mathbb{N}\}$ が，零集合となることを示せ．

【定理 1.1】 $\langle E_n;\ n\in\mathbb{N}\rangle$ を零集合の列とすると，

$$E:=\cup_{n=1}^{\infty}E_n$$

も零集合である．

証明　E_n は零集合であるから，

$$\exists\,\text{区間列}\left\langle I_k^{(n)}\subset\mathbb{R};\ k\in\mathbb{N}\right\rangle;\ E_n\subset\cup_{k=1}^{\infty}I_k^{(n)},\ \sum_{k=1}^{\infty}l\left(I_k^{(n)}\right)<\frac{\epsilon}{2^n}.$$

$$\therefore\quad\exists\,\text{区間列}\left\langle I_k^{(n)}\subset\mathbb{R};\ k\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{N}\right\rangle;$$

$$E=\cup_{n=1}^{\infty}E_n\subset\cup_{n=1}^{\infty}\cup_{k=1}^{\infty}I_k^{(n)},\ \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}l\left(I_k^{(n)}\right)<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\epsilon}{2^n}=\epsilon.\qquad\square$$

可算集合は，零集合であったが，非可算集合にも零集合が存在する．

正　$E\subset\mathbb{R}$ が Lebesgue 零集合とは，E を覆う区間列の中に区間列の長さの総和を限りなく零に近づけれるものが存在するということである．$\mathbb{R}$ 上の空集合は定義により Lebesgue 零集合となる．

【問 1.1】

① $-\infty\le a\le a_n<b_n\le a_{n+1}<b_{n+1}\le b\le\infty$, $n\in\mathbb{N}$ として，$I_n:=(a_n,b_n]$, $n\in\mathbb{N}$, $I:=(a,b]$ としたとき，

$$I=\cup_{n=1}^{\infty}I_n\implies l(I)=\sum_{n=1}^{\infty}l(I_n)$$

を示せ．

② 一点集合 $\{x\}$, $x \in \mathbb{R}$, および任意の可算集合 $E := \{x_n \in \mathbb{R};\ n \in \mathbb{N}\}$ が，Lebesgue 零集合となることを示せ．

【定理 1.1】 $\langle E_n;\ n \in \mathbb{N}\rangle$ を Lebesgue 零集合の列とすると，

$$E := \cup_{n=1}^{\infty} E_n$$

も Lebesgue 零集合である．

証明 E_n は Lebesgue 零集合であるから，

$$\exists\ \text{区間列} \left\langle I_k^{(n)} \subset \mathbb{R};\ k \in \mathbb{N} \right\rangle;\ E_n \subseteq \cup_{k=1}^{\infty} I_k^{(n)},\ \sum_{k=1}^{\infty} l\left(I_k^{(n)}\right) < \frac{\epsilon}{2^n}.$$

$\therefore$ $\exists$ 区間列 $\left\langle I_k^{(n)} \subset \mathbb{R};\ k \in \mathbb{N},\ n \in \mathbb{N} \right\rangle;$

$$E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} \cup_{k=1}^{\infty} I_k^{(n)},\ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} l\left(I_k^{(n)}\right) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon. \qquad \square$$

$\mathbb{R}$ 上の可算集合は，Lebesgue 零集合であったが，$\mathbb{R}$ 上の非可算集合にも Lebesgue 零集合が存在する．

p.4. **【命題 1.1】** l.1.

誤 Cantor 集合は非可算集合かつ零集合である．

正 Cantor 集合は非可算集合かつ Lebesgue 零集合である．

p.6. **【定義 1.3 – Lebesgue 外測度】** l.1.

誤 任意の $E \subset \mathbb{R}$ に対して，

正 任意の $E \subseteq \mathbb{R}$ に対して，

p.6. **【定義 1.3 – Lebesgue 外測度】** l.3.

誤

$$Z_E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n);\ \langle I_n;\ n \in \mathbb{N}\rangle = \text{区間列};\ E \subset (\cup_{n=1}^{\infty} I_n) \right\}$$

正

$$Z_E := \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n);\ \langle I_n;\ n \in \mathbb{N}\rangle = \text{区間列};\ E \subseteq (\cup_{n=1}^{\infty} I_n) \right\}$$

p.6. **【定理 1.2】証明** l.2.

誤

$$\forall \epsilon > 0\ \exists\ 区間列\ \langle I_n;\ n \in \mathbb{N}\rangle;\ E \subset \cup_{n=1}^{\infty} I_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) < \epsilon$$

正

$$\forall \epsilon > 0\ \exists\ 区間列\ \langle I_n;\ n \in \mathbb{N}\rangle;\ E \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} I_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) < \epsilon$$

p.7. l.2.

誤

$$\forall \epsilon > 0\ \exists\ 区間列\ \langle I_n \subset \mathbb{R};\ n \in \mathbb{N}\rangle;\ \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) < \epsilon,\ E \subset \cup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

正

$$\forall \epsilon > 0\ \exists\ 区間列\ \langle I_n \subset \mathbb{R};\ n \in \mathbb{N}\rangle;\ \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) < \epsilon,\ E \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

p.7. **【命題 1.2 – 外測度の単調性】** l.2. – l.5.

誤

$$E_1 \subset E_2 \Longrightarrow \ell^*(E_1) \leq \ell^*(E_2), \quad E_i \subset \mathbb{R},\ i = 1, 2.$$

証明 $E_1 \subset E_2$ のとき

$$\{I_n;\ n \in \mathbb{N}\};\ E_2 \subset \cup_{n=1}^{\infty} I_n \implies E_1 \subset \cup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

$\therefore\ Z_{E_2} \subset Z_{E_1}$ であるから，$\ell^*(E_1) \equiv \inf Z_{E_1} \leq \inf Z_{E_2} \equiv \ell^*(E_2)$. □

正

$$E_1 \subseteq E_2 \Longrightarrow \ell^*(E_1) \leq \ell^*(E_2), \quad E_i \subseteq \mathbb{R},\ i = 1, 2.$$

証明 $E_1 \subseteq E_2$ のとき

$$\{I_n;\ n \in \mathbb{N}\};\ E_2 \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} I_n \implies E_1 \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

$\therefore\ Z_{E_2} \subseteq Z_{E_1}$ であるから，$\ell^*(E_1) \equiv \inf Z_{E_1} \leq \inf Z_{E_2} \equiv \ell^*(E_2)$. □

p.7. **【定理 1.3】** l.1.

誤 $I \subset \mathbb{R}$ を区間とすると

正 $I \subseteq \mathbb{R}$ を区間とすると

p.8. **【定理 1.4 – 外測度の劣加法性】** l.1.

誤 任意の集合列 $\langle E_n \subset \mathbb{R};\, n \in \mathbb{N}\rangle$ に対して，

正 任意の集合列 $\langle E_n \subseteq \mathbb{R};\, n \in \mathbb{N}\rangle$ に対して，

p.9. l.1–3.

誤 となる区間列 $\langle I_{nm} \subset \mathbb{R};\, m \in \mathbb{N}\rangle$ が存在する．

$$\begin{aligned} \therefore \ell^*(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) &\leq \ell^*(\cup_{n=1}^{\infty} \cup_{m=1}^{\infty} I_{nm}) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \ell^*(I_{nm}) \end{aligned}$$

正 となる区間列 $\langle I_{nm} \subseteq \mathbb{R};\, m \in \mathbb{N}\rangle$ が存在する．

$$\begin{aligned} \therefore \ell^*(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) &\leq \ell^*(\cup_{n=1}^{\infty} \cup_{m=1}^{\infty} I_{nm}) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} l(I_{nm}) \end{aligned}$$

p.9. **【問 1.2】** l.1.

誤 任意の $E_i \subset \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, に対して次が成立することを示せ．

正 任意の $E_i \subseteq \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, に対して次が成立することを示せ．

p.9. **【命題 1.3 – 外測度の平行移動不変性】証明** l.1.

誤 区間列 $\{I_n;\, n \in \mathbb{N}\}$; $E \subset \cup_{n=1}^{\infty} I_n$，に対して，$E + x \subset \cup_{n=1}^{\infty}(I_n + x)$ で

正 区間列 $\{I_n;\, n \in \mathbb{N}\}$; $E \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} I_n$，に対して，$E + x \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} (I_n + x)$ で

p.10. **【定義 1.4 – Lebesgue 可測集合】** l.1–2.

誤 $E \subset \mathbb{R}$ が

$$\ell^*(X) = \ell^*(E \cap X) + \ell^*(E^c \cap X) \quad \forall X \subset \mathbb{R} \tag{1.2}$$

正 $E \subseteq \mathbb{R}$ が

$$\ell^*(X) = \ell^*(E \cap X) + \ell^*(E^c \cap X) \quad \forall X \subseteq \mathbb{R} \tag{1.2}$$

p.10. **【注 1.1】** l.1–5.

誤 $X = (\mathbb{E} \cap X) \cup (E^c \cap X)$ であるから定理 1.4 の外測度の劣加
法性より

$$\ell^*(X) \leq \ell^*(E \cap X) + \ell^*(E^c \cap X) \quad \forall X,\, E \subset \mathbb{R}$$

が成立する．したがって，

$$E \in \mathfrak{M} \iff \ell^*(X) \geq \ell^*(E \cap X) + \ell^*(E^c \cap X) \quad \forall X \subset \mathbb{R}.$$

正　$X=(E\cap X)\cup(E^c\cap X)$ であるから定理 1.4 の外測度の劣加法性より

$$\ell^*(X)\leq\ell^*(E\cap X)+\ell^*(E^c\cap X)\quad\forall X,\,E\subseteq\mathbb{R}$$

が成立する．したがって，

$$E\in\mathfrak{M}\iff\ell^*(X)\geq\ell^*(E\cap X)+\ell^*(E^c\cap X)\quad\forall X\subseteq\mathbb{R}.$$

p.11. l.3–4.

誤　さらに，$I^c=(-\infty,a)\cup(b,\infty)$ より，区間列 $\{I_n\cap(-\infty,a);\,n\in\mathbb{N}\}$ と $\{I_n\cap(b,\infty);\,n\in\mathbb{N}\}$ は，$X\cap I^c$ を被覆するので，

正　さらに，$I^c=(-\infty,a)\cup(b,\infty)$ より，区間列 $\langle I_n\cap(-\infty,a);\,n\in\mathbb{N}\rangle$ と $\langle I_n\cap(b,\infty);\,n\in\mathbb{N}\rangle$ は，$X\cap I^c$ を被覆するので，

p.12. l.7–p.13 l.17.

誤　③ はじめに $E_n\in\mathfrak{M}$，$n\in\mathbb{N}$, が互いに素のとき，$\cup_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathfrak{M}$ を数学的帰納法によって示す．

このためには，$E_n\in\mathfrak{M}$，$n\in\mathbb{N}$，が互いに素ならば，

$$\ell^*(X)=\sum_{n=1}^{k}\ell^*(X\cap E_n)+\ell^*(X\cap(\cup_{n=1}^{k}E_n)^c),\quad k\in\mathbb{N}\tag{1.4}$$

を示せばよい．(1.4) が成立するならば，

$$\begin{aligned}\ell^*(X)&=\sum_{n=1}^{k}\ell^*(X\cap E_n)+\ell^*(X\cap(\cup_{n=1}^{k}E_n)^c)\\&\geq\sum_{n=1}^{k}\ell^*(X\cap E_n)+\ell^*(X\cap(\cup_{n=1}^{\infty}E_n)^c)\ (\because\ \text{単調性}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ell^*(X)&\geq\sum_{n=1}^{\infty}\ell^*(X\cap E_n)+\ell^*(X\cap(\cup_{n=1}^{\infty}E_n)^c)\\&\geq\ell^*(X\cap(\cup_{n=1}^{\infty}E_n))+\ell^*(X\cap(\cup_{n=1}^{\infty}E_n)^c)\\&\qquad(\because\ \text{劣加法性}).\end{aligned}\tag{1.5}$$

となるからである．

さて，(1.4) を示す．$k=1$ のとき明らかに (1.4) は成立．次に $k=i$, $i=2,3,\cdots$, のと

きに (1.4) が成立していると仮定すると，

$$
\begin{aligned}
\ell^*(X) &= \sum_{n=1}^{i-1} \ell^*(X \cap E_n) + \ell^*(X \cap (E_i \cup E_{i+1})) \\
&\quad + \ell^*(X \cap (\cup_{n=1}^{i+1} E_n)^c) \\
&= \sum_{n=1}^{i-1} \ell^*(X \cap E_n) + \ell^*(X \cap (E_i \cup E_{i+1}) \cap E_i) \\
&\quad + \ell^*(X \cap (E_i \cup E_{i+1}) \cap E_i^c) + \ell^*(X \cap (\cup_{n=1}^{i+1} E_n)^c) \\
&= \sum_{n=1}^{i+1} \ell^*(X \cap E_n) + \ell^*(X \cap (\cup_{n=1}^{i+1} E_n)^c).
\end{aligned}
$$

$\therefore$ 数学的帰納法により (1.4) が成立する．

次に，$E_n \in \mathfrak{M},\ n \in \mathbb{N}$，が互いに素でない場合に $\cup_{n=1}^{k} E_n \in \mathfrak{M},\ k \in \mathbb{N}$，を数学的帰納法によって示す．
$k = 1$ のときは，自明に成立する．
$k = 2$ のときに，題意が成立することを示す．

$$
\begin{aligned}
\ell^*(X) &= \ell^*(X \cap E_1) + \ell^*(X \cap E_1^c) \\
&= \ell^*(X \cap E_1) + \ell^*(X \cap E_1^c \cap E_2) + \ell^*(X \cap E_1^c \cap E_2^c) \\
&\geq \ell^*((X \cap E_1) \cup (X \cap E_1^c \cap E_2)) + \ell^*(X \cap E_1^c \cap E_2^c) \\
&= \ell^*(X \cap (E_1 \cup E_2)) + \ell^*(X \cap (E_1 \cup E_2)^c). \\
&\quad \therefore \quad \cup_{n=1}^{2} E_n \in \mathfrak{M}.
\end{aligned}
$$

$k = i-1, i \in \mathbb{N}$, で題意が成立していると仮定する．このとき，

$$
\cup_{n=1}^{i} E_n = \left(\cup_{n=1}^{i-1} E_n\right) \cup E_i
$$

であるから，$k = i$ でも題意が成立する．したがって，数学的帰納法により，任意の $k \in \mathbb{N}$ について題意が成立する．

正　③ はじめに，$(E_n \in \mathfrak{M},\ n \in \mathbb{N}) \Longrightarrow \left(\cup_{n=1}^{k} E_n \in \mathfrak{M},\ k \in \mathbb{N}\right)$ を数学的帰納法によって示す．
$k = 1$ のときは，自明に成立する．
$k = 2$ のときに，題意が成立することを示す．

$$
\begin{aligned}
\ell^*(X) &= \ell^*(X \cap E_1) + \ell^*(X \cap E_1^c) \\
&= \ell^*(X \cap E_1) + \ell^*(X \cap E_1^c \cap E_2) + \ell^*(X \cap E_1^c \cap E_2^c) \qquad (1.4) \\
&\geq \ell^*((X \cap E_1) \cup (X \cap E_1^c \cap E_2)) + \ell^*(X \cap E_1^c \cap E_2^c) \\
&= \ell^*(X \cap (E_1 \cup E_2)) + \ell^*(X \cap (E_1 \cup E_2)^c). \\
&\quad \therefore \quad \cup_{n=1}^{2} E_n \in \mathfrak{M}.
\end{aligned}
$$

$k=i-1,\ i=3,4,\cdots,$ で題意が成立していると仮定する．このとき，

$$\cup_{n=1}^{i}E_n=\left(\cup_{n=1}^{i-1}E_n\right)\cup E_i$$

であるから，$k=i$ でも題意が成立する．したがって，数学的帰納法により，任意の $k\in\mathbb{N}$ について題意が成立する．

次に，$E_n\in\mathfrak{M},\ n\in\mathbb{N},$ が互いに素のとき，$\cup_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathfrak{M}$ を数学的帰納法によって示す．このためには，$E_n\in\mathfrak{M}$，$n\in\mathbb{N}$，が互いに素ならば，

$$\ell^*(X)=\sum_{n=1}^{k}\ell^*(X\cap E_n)+\ell^*(X\cap(\cup_{n=1}^{k}E_n)^c),\quad k\in\mathbb{N} \tag{1.5}$$

を示せばよい．何故ならば，(1.5) が成立するならば，

$$\begin{aligned}\ell^*(X) &= \sum_{n=1}^{k}\ell^*(X\cap E_n)+\ell^*(X\cap(\cup_{n=1}^{k}E_n)^c)\\ &\geq \sum_{n=1}^{k}\ell^*(X\cap E_n)+\ell^*(X\cap(\cup_{n=1}^{\infty}E_n)^c)\ (\because \text{単調性}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ell^*(X) &\geq \sum_{n=1}^{\infty}\ell^*(X\cap E_n)+\ell^*(X\cap(\cup_{n=1}^{\infty}E_n)^c) \qquad (1.6)\\ &\geq \ell^*(X\cap(\cup_{n=1}^{\infty}E_n))+\ell^*(X\cap(\cup_{n=1}^{\infty}E_n)^c)\\ &\qquad (\because \text{劣加法性}).\end{aligned}$$

となるからである．

さて，(1.5) を示す．$k=1,2$ のときは，(1.4) より，明らかに (1.5) は成立する．次に $k=i,\ i=2,3,\cdots,$ のときに (1.5) が成立していると仮定すると，

$$\begin{aligned}\ell^*(X) &= \sum_{n=1}^{i-1}\ell^*(X\cap E_n)+\ell^*(X\cap(E_i\cup E_{i+1}))\\ &\quad+\ell^*(X\cap(\cup_{n=1}^{i+1}E_n)^c)\\ &= \sum_{n=1}^{i-1}\ell^*(X\cap E_n)+\ell^*(X\cap(E_i\cup E_{i+1})\cap E_i)\\ &\quad+\ell^*(X\cap(E_i\cup E_{i+1})\cap E_i^c)+\ell^*(X\cap(\cup_{n=1}^{i+1}E_n)^c)\\ &= \sum_{n=1}^{i+1}\ell^*(X\cap E_n)+\ell^*(X\cap(\cup_{n=1}^{i+1}E_n)^c).\end{aligned}$$

$\therefore$ 数学的帰納法により (1.5) が成立する．

p.14. l.2.

誤　④ $X:=\sum_{n=1}^{\infty}E_n:=\cup_{n=1}^{\infty}E_n$，$E_n\in\mathfrak{M}$，$n\in\mathbb{N}$ とすると，(1.5) より

正 ④ $X := \sum_{n=1}^{\infty} E_n := \cup_{n=1}^{\infty} E_n$，$E_n \in \mathfrak{M}$，$n \in \mathbb{N}$ とすると，(1.6) より

p.14. **【定義 1.5 – 可算加法族と可測空間】** l.3.

誤 $\mathcal{F} \subset 2^{\Omega}$ であるとき，$\mathcal{F}$ を Ω の**部分集合族**（familiy of subsets）という．

正 $\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega}$ であるとき，$\mathcal{F}$ を Ω の**部分集合族**（familiy of subsets）という．

p.16. l.1.

誤 $E_n \in \mathcal{G}_0,\, n \in \mathbb{N},\, \Longrightarrow \cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{G}_0$. □

正 $E_n \in \mathcal{G}_0,\, n \in \mathbb{N},\, \Longrightarrow \cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{G}_0$. □

p.16. **【命題 1.4 】証明** l.1–2.

誤 $\mathcal{A} \subset 2^{\Omega}$ かつ 2^{Ω} は可算加法族であるから，$\mathcal{A}$ を含む可算加法族が存在する．$\therefore \sigma(\mathcal{A}) := \cap\{\mathcal{F} = $ 可算加法族; $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}\}$ とすればよい

正 $\mathcal{A} \subseteq 2^{\Omega}$ かつ 2^{Ω} は可算加法族であるから，$\mathcal{A}$ を含む可算加法族が存在する．$\therefore \sigma(\mathcal{A}) := \cap\{\mathcal{F} = $ 可算加法族; $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}\}$ とすればよい

p.16–17. **【定理 1.8 – 単調族定理】証明**.

誤 前半は省略する [4]．後半は，定理①より可算加法族は単調族であるから，$\mathfrak{m}(\mathcal{A}) \subset \sigma(\mathcal{A})$ は明らかである．したがって，定理 1.6②より $\mathfrak{m}(\mathcal{A})$ が有限加法族であることを示せばよい．

i) $\emptyset \in \mathfrak{m}(\mathcal{A})$ は明らか.

ii) $E \in \mathfrak{m}(\mathcal{A}) \Longrightarrow E^c \in \mathfrak{m}(\mathcal{A})$ を示す.

$$\mathbb{M}' := \{E \in \mathfrak{m}(\mathcal{A});\, E^c \in \mathfrak{m}(\mathcal{A})\} \subset \mathfrak{m}(\mathcal{A})$$

とおく．すべての $E \in \mathcal{A}$ に対して $E^c \in \mathcal{A} \subset \mathfrak{m}(\mathcal{A})$ であるから，$\mathcal{A} \subset \mathbb{M}'$ である．次に，$\mathbb{M}'$ が単調族であることを示す．$E_1, E_2, \cdots \in \mathbb{M}'$ が単調であるとする．$E_1, E_2, \cdots \in \mathfrak{m}(\mathcal{A})$ であるから $\lim_{n\to\infty} E_n \in \mathfrak{m}(\mathcal{A})$．一方，$E_1^c, E_2^c, \cdots \in \mathfrak{m}(\mathcal{A})$ かつ単調であるから $(\lim_{n\to\infty} E_n)^c = \lim_{n\to\infty} E_n^c \in \mathfrak{m}(\mathcal{A})$．$\therefore \mathbb{M}'$ は単調族である．よって，$\mathfrak{m}(\mathcal{A}) \subset \mathbb{M}'$，すなわち $\mathfrak{m}(\mathcal{A}) = \mathbb{M}'$. $\therefore\ E \in \mathfrak{m}(\mathcal{A}) \Longrightarrow E^c \in \mathfrak{m}(\mathcal{A})$.

iii) $E, F \in \mathfrak{m}(\mathcal{A}) \Longrightarrow E \cup F \in \mathfrak{m}(\mathcal{A})$ を示す.

任意の $E \in \mathfrak{m}(\mathcal{A})$ に対して

$$\mathbb{M}_E := \{F \in \mathfrak{m}(\mathcal{A});\, E \cup F \in \mathfrak{m}(\mathcal{A})\} \subset \mathfrak{m}(\mathcal{A})$$

とおく．$\mathfrak{m}(\mathcal{A}) \subset \mathbb{M}_E$ が言えれば，$E, F \in \mathfrak{m}(\mathcal{A}) \Longrightarrow E \cup F \in \mathfrak{m}(\mathcal{A})$ が言える．

$\mathbb{M}_E$ は単調族である．実際，このことは，$F_1, F_2, \cdots \in \mathbb{M}_E$ が単調であるとすると

$$E \cup \lim_{n\to\infty} F_n = \lim_{n\to\infty}(E \cup F_n) \in \mathfrak{m}(\mathcal{A})$$

となることよりわかる．

次に $E \in \mathcal{A} \Longrightarrow \mathfrak{m}(\mathcal{A}) \subset \mathbb{M}_E$ を示す．$E \in \mathcal{A}$ とすると，任意の $F \in \mathcal{A}$ に対して $E \cup F \in \mathcal{A} \subset \mathfrak{m}(\mathcal{A})$ であるから $F \in \mathbb{M}_E$ となり，$\mathcal{A} \subset \mathbb{M}_E$．
$\therefore\ \mathfrak{m}(\mathcal{A}) \subset \mathbb{M}_E$．

最後に $E \in \mathfrak{m}(\mathcal{A}) \Longrightarrow \mathfrak{m}(\mathcal{A}) \subset \mathbb{M}_E$ を示す．$E \in \mathfrak{m}(\mathcal{A})$ とする．任意の $F \in \mathcal{A} \in \mathfrak{m}(\mathcal{A})$ に対して直前の結果を用いると $E \in \mathbb{M}_F$ となるから，$E \cup F \in \mathfrak{m}(\mathcal{A})$．したがって，$F \in \mathbb{M}_E$ となり，$\mathcal{A} \subset \mathbb{M}_E$ となる．
$\therefore\ \mathfrak{m}(\mathcal{A}) \subset \mathbb{M}_E$． □

正　前半は省略する[4]．後半は，定理 1.6①より可算加法族は単調族であるから，$\mathfrak{m}(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$ は明らかである．したがって，定理 1.6②より $\mathfrak{m}(\mathcal{A})$ が有限加法族であることを示せばよい．

i) $\emptyset \in \mathfrak{m}(\mathcal{A})$ は明らか．

ii) $E \in \mathfrak{m}(\mathcal{A}) \Longrightarrow E^c \in \mathfrak{m}(\mathcal{A})$ を示す．

$$\mathbb{M}' := \{E \in \mathfrak{m}(\mathcal{A});\ E^c \in \mathfrak{m}(\mathcal{A})\} \subseteq \mathfrak{m}(\mathcal{A})$$

とおく．すべての $E \in \mathcal{A}$ に対して $E^c \in \mathcal{A} \subseteq \mathfrak{m}(\mathcal{A})$ であるから，$\mathcal{A} \subseteq \mathbb{M}'$ である．次に，$\mathbb{M}'$ が単調族であることを示す．$E_1, E_2, \cdots \in \mathbb{M}'$ が単調であるとする．$E_1, E_2, \cdots \in \mathfrak{m}(\mathcal{A})$ であるから $\lim_{n\to\infty} E_n \in \mathfrak{m}(\mathcal{A})$．一方，$E_1^c, E_2^c, \cdots \in \mathfrak{m}(\mathcal{A})$ かつ単調であるから $(\lim_{n\to\infty} E_n)^c = \lim_{n\to\infty} E_n^c \in \mathfrak{m}(\mathcal{A})$．$\therefore \mathbb{M}'$ は単調族である．よって，$\mathfrak{m}(\mathcal{A}) \subseteq \mathbb{M}'$，すなわち $\mathfrak{m}(\mathcal{A}) = \mathbb{M}'$．
$\therefore\ E \in \mathfrak{m}(\mathcal{A}) \Longrightarrow E^c \in \mathfrak{m}(\mathcal{A})$．

iii) $E, F \in \mathfrak{m}(\mathcal{A}) \Longrightarrow E \cup F \in \mathfrak{m}(\mathcal{A})$ を示す．

任意の $E \in \mathfrak{m}(\mathcal{A})$ に対して

$$\mathbb{M}_E := \{F \in \mathfrak{m}(\mathcal{A});\ E \cup F \in \mathfrak{m}(\mathcal{A})\} \subseteq \mathfrak{m}(\mathcal{A})$$

とおく．$\mathfrak{m}(\mathcal{A}) \subseteq \mathbb{M}_E$ が言えれば，$E, F \in \mathfrak{m}(\mathcal{A}) \Longrightarrow E \cup F \in \mathfrak{m}(\mathcal{A})$ が言える．

$\mathbb{M}_E$ は単調族である．実際，このことは，$F_1, F_2, \cdots \in \mathbb{M}_E$ が単調であるとすると

$$E \cup \lim_{n\to\infty} F_n = \lim_{n\to\infty}(E \cup F_n) \in \mathfrak{m}(\mathcal{A})$$

となることよりわかる．

次に $E \in \mathcal{A} \Longrightarrow \mathfrak{m}(\mathcal{A}) \subseteq \mathbb{M}_E$ を示す．$E \in \mathcal{A}$ とすると，任意の $F \in \mathcal{A}$ に対して，$E \cup F \in \mathcal{A} \subseteq \mathfrak{m}(\mathcal{A})$ であるから $F \in \mathbb{M}_E$ となり，$\mathcal{A} \subseteq \mathbb{M}_E$．
$\therefore\ \mathfrak{m}(\mathcal{A}) \subseteq \mathbb{M}_E$．

最後に $E \in \mathfrak{m}(\mathcal{A}) \Longrightarrow \mathfrak{m}(\mathcal{A}) \subseteq \mathbb{M}_E$ を示す．$E \in \mathfrak{m}(\mathcal{A})$ とする．任意の $F \in \mathcal{A} \subseteq \mathfrak{m}(\mathcal{A})$ に対して直前の結果を用いると $E \in \mathbb{M}_F$ となるから，$E \cup F \in \mathfrak{m}(\mathcal{A})$．したがって，$F \in \mathbb{M}_E$ となり，$\mathcal{A} \subseteq \mathbb{M}_E$ となる．
$\therefore\ \mathfrak{m}(\mathcal{A}) \subseteq \mathbb{M}_E$． □

p.18. **【定理 1.9 】** l.3.

誤 $\Pi \subset \Lambda \Longrightarrow \sigma(\Pi) \subset \Lambda$.

正 $\Pi \subseteq \Lambda \Longrightarrow \sigma(\Pi) \subseteq \Lambda$.

p.18. **【定理 1.9 】証明** 二段落目 l.2–5.

誤 $E \cap F \in \Pi \subset \Lambda_0$. $\therefore\ F \in \Lambda_E$. $\therefore\ \Pi \subset \Lambda_E$. Λ_E は λ システムであったから，$\Pi \subset \Lambda_0 \subset \Lambda_E$. $\mu_1(E) = \mu_2(E), \quad \forall E \in \mathcal{A}$ $\therefore\ E \in \Pi,\ F \in \Lambda_0 \Longrightarrow F \in \Lambda_E \Longrightarrow$ $E \cap F \in \Lambda_0$
$\Longrightarrow E \in \Lambda_F$. $\therefore\ F \in \Lambda_0 \Longrightarrow \Pi \subset \Lambda_F$. Λ_F は λ システムであったから，
$\Lambda_0 \subset \Lambda_F$.

正 $E \cap F \in \Pi \subseteq \Lambda_0$. $\therefore\ F \in \Lambda_E$. $\therefore\ \Pi \subseteq \Lambda_E$. Λ_E は λ システムであったから，$\Pi \subseteq \Lambda_0 \subseteq \Lambda_E$. $\therefore\ E \in \Pi,\ F \in \Lambda_0 \Longrightarrow F \in \Lambda_E \Longrightarrow E \cap F \in \Lambda_0$
$\Longrightarrow E \in \Lambda_F$. $\therefore F \in \Lambda_0 \Longrightarrow \Pi \subseteq \Lambda_F$. Λ_F は λ システムであったから，
$\Lambda_0 \subseteq \Lambda_F$.

p.20 **【命題 1.6 】** l.2.

誤

単調性: $E_1 \subset E_2 \Longrightarrow \mu(E_1) \leq \mu(E_2)$.

正

単調性: $E_1 \subseteq E_2 \Longrightarrow \mu(E_1) \leq \mu(E_2)$.

p.20. **【定理 1.10 】** l.2–4.

誤

① $E_n \subset E_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N} \implies \mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$.

② $E_n \supset E_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N};\ \mu(E_n) < \infty$
$\Longrightarrow \mu\left(\cap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$.

正

① $E_n \subseteq E_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N} \implies \mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$.

② $E_n \subseteq E_{n+1}\ \forall n \in \mathbb{N},\ \exists n \in \mathbb{N};\ \mu(E_n) < \infty$
$\implies \mu\left(\cap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$.

p.21. **【定理 1.10 】証明②** l.3.

誤

$$= \lim_{n\to\infty} (\mu(E_k \setminus E_n)) \quad (\because E_k \supset E_n,\ k \leq n).$$

正

$$= \lim_{n\to\infty} (\mu(E_k \setminus E_n)) \quad (\because E_k \supseteq E_n,\ k \leq n).$$

p.22. **【定理 1.11 】**

誤

① 任意の $\epsilon > 0$ と任意の $E \subset \mathbb{R}$ に対して,
$\exists$ 開集合 $O \subset \mathbb{R}$; $\quad E \subset O,\ \ell(O) \leq \ell^*(E) + \epsilon$.

② 任意の $\epsilon > 0$ と任意の $E \in \mathfrak{M}$ に対して,
$\exists$ 開集合 $O \subset \mathbb{R}$; $\quad E \subset O,\ \ell(O \setminus E) \leq \epsilon$.

③ 任意の $E \subset \mathbb{R}$ に対して,
$\exists$ 開集合列 $\langle O_n \subset \mathbb{R};\ n \in \mathbb{N}\rangle$; $\quad E \subset \cap_n O_n,\ \ell(\cap_n O_n) = \ell^*(E)$.

正

① 任意の $\epsilon > 0$ と任意の $E \subset \mathbb{R}$ に対して,
$\exists$ 開集合 $O \subseteq \mathbb{R}$; $\quad E \subset O,\ \ell(O) \leq \ell^*(E) + \epsilon$.

② 任意の $\epsilon > 0$ と任意の $E \in \mathfrak{M}$ に対して,
$\exists$ 開集合 $O \subseteq \mathbb{R}$; $\quad E \subset O,\ \ell(O \setminus E) \leq \epsilon$.

③ 任意の $E \subset \mathbb{R}$ に対して,
$\exists$ 開集合列 $\langle O_n \subseteq \mathbb{R};\ n \in \mathbb{N}\rangle$; $\quad E \subset \cap_n O_n,\ \ell(\cap_n O_n) = \ell^*(E)$.

p.22. **【定理 1.11 】証明** ① l.2.

誤

$$\exists \text{ 区間列 } \langle I_n \subset \mathbb{R};\ n \in \mathbb{N}\rangle; \quad E \subset \cup_{n=1}^{\infty} I_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \leq \ell^*(E) + \frac{\epsilon}{2}.$$

正

$$\exists \text{ 区間列 } \langle I_n \subset \mathbb{R};\ n \in \mathbb{N}\rangle; \quad E \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} I_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) \leq \ell^*(E) + \frac{\epsilon}{2}.$$

p.23. **【定理 1.11 】証明** ② l.5.

誤

$$\exists \text{ 開集合 } O_n \subset \mathbb{R}; \quad E_n \subset O_n,\ \ell(O_n \setminus E_n) \leq \frac{\epsilon}{2^n}.$$

正

$$\exists \text{ 開集合 } O_n \subseteq \mathbb{R}; \quad E_n \subset O_n,\ \ell(O_n \setminus E_n) \leq \frac{\epsilon}{2^n}.$$

p.23. **【定理 1.11 】証明** ③ l.3.

誤

$$E \subset \cap_n O_n,\ \ell(\cap_n O_n) < \ell(O_n) \leq \ell^*(E) + \frac{1}{n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

正

$$E \subset \cap_n O_n,\ \ell(\cap_n O_n) \leq \ell(O_n) \leq \ell^*(E) + \frac{1}{n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

p.24. **【定理 1.12 】証明** l.5–6.

誤

$$\{\mathbb{R} \text{ 上の可算加法族 } \mathcal{F};\ \mathcal{F} \supset I\} \subset \{\mathbb{R} \text{ 上の可算加法族 } \mathcal{F};\ \mathcal{F} \supset OI\}$$

したがって，$\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$.

正

$$\{\mathbb{R} \text{ 上の可算加法族 } \mathcal{F};\ \mathcal{F} \supset I\} \subseteq \{\mathbb{R} \text{ 上の可算加法族 } \mathcal{F};\ \mathcal{F} \supset OI\}$$

したがって，$\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$.

p.25. **【定理 1.13 】証明** l.1.

誤 $\mathcal{C}$ を $\mathcal{B}$ の完備化とする．はじめに $\mathcal{C} \subset \mathfrak{M}$ を示す．これには，$\mathfrak{M}$ が $\mathcal{B}$

正 $\mathcal{C}$ を $\mathcal{B}$ の完備化とする．はじめに $\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{M}$ を示す．これには，$\mathfrak{M}$ が $\mathcal{B}$

p.25. **【定理 1.13 】証明** l.4.

誤 を示せばよい．単調性から，任意の $X \in \mathbb{R}$ に対して，

正 を示せばよい．単調性から，任意の $X \subseteq \mathbb{R}$ に対して，

p.25. 【**定理 1.13** 】**証明** l.7–9.

誤　次に $\mathcal{C} \supset \mathfrak{M}$ を示す.
注 1.3 より，$E \in \mathfrak{M};\ \ell(E) < \infty$ に対して，

$$\exists \text{開区集合}\ O \in \mathfrak{M};\ E \subset O,\ \ell(O) = \ell(E).$$

正　次に $\mathcal{C} \supseteq \mathfrak{M}$ を示す.
注 1.3 より，$E \in \mathfrak{M};\ \ell(E) < \infty$ に対して，

$$\exists \text{開集合}\ O \in \mathfrak{M};\ E \subset O,\ \ell(O) = \ell(E).$$

p.26.【**定理 1.13** 】**証明** l.3.

誤　$E \in \mathfrak{M} \Rightarrow E \in \mathcal{C}$ となり，$\mathcal{C} \supset \mathfrak{M}$ を得る.　□

正　$E \in \mathfrak{M} \Rightarrow E \in \mathcal{C}$ となり，$\mathcal{C} \supseteq \mathfrak{M}$ を得る.　□

p.26.【**定義 1.16** 】 l.3–6.

誤　任意の $X \subset \Omega$ に対して，

$$\mu^*(X) := \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu'(E_n); E_n \in \mathcal{A}, X \subset (\cup_{n=1}^{\infty} E_n)\right\}$$

を X の**外測度** (outer measure) といい，$E \subset \Omega$ が

$$\mu^*(X) = \mu^*(E \cap X) + \mu^*(E^c \cap X) \quad \forall X \subset \Omega$$

正　任意の $X \subseteq \Omega$ に対して，

$$\mu^*(X) := \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu'(E_n); E_n \in \mathcal{A}, X \subseteq (\cup_{n=1}^{\infty} E_n)\right\}$$

を X の**外測度** (outer measure) といい，$E \subseteq \Omega$ が

$$\mu^*(X) = \mu^*(E \cap X) + \mu^*(E^c \cap X) \quad \forall X \subseteq \Omega$$

p.27. 【**補題 1.3** 】 l.2–3.

誤　② 単調性：$E_1 \subset E_2 \subset \Omega \Longrightarrow \mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2)$.
③ 劣加法性：$E_n \subset \Omega,\ n \in \mathbb{N}, \Longrightarrow \mu^*\left(\cup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$.

正　② 単調性：$E_1 \subseteq E_2 \subseteq \Omega \Longrightarrow \mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2)$.
③ 劣加法性：$E_n \subseteq \Omega,\ n \in \mathbb{N}, \Longrightarrow \mu^*\left(\cup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$.

p.27. **【補題 1.4 】** l.1.

誤　$\mathcal{F} := \{E \subset \Omega;\ E$ は μ^*-可測 $\}$ は Ω 上の可算加法族であり，μ^*

正　$\mathcal{F} := \{E \subseteq \Omega;\ E$ は μ^*-可測 $\}$ は Ω 上の可算加法族であり，μ^*

p.27. **【補題 1.5 】**と**【定理 1.15 】**間新規挿入.

【補題 1.6 】　$\mathcal{A}$ を Ω 上の有限加法族として，$\mu_i,\ i = 1, 2$ を $(\Omega, \sigma(\mathcal{A}))$ 上の測度で，$\mathcal{A}$ 上で σ 有限となるものとする．すなわち，

$$\exists\, E_n \in \mathcal{A};\ \mu_i(E_n) < \infty,\ n \in \mathbb{N},\ \cup_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}_n = \Omega$$

となるものとする．このとき，$\mu_1(E) = \mu_2(E)\ \forall E \in \mathcal{A}$ ならば，$\mu_1(E) = \mu_2(E)\ \forall E \in \sigma(\mathcal{A})$.

証明　補題の $\langle E_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ に対して，任意の $n \in \mathbb{N}$ を固定して，

$$\mathcal{L}_n := \{E \in \sigma(\mathcal{A});\ \mu_1(E \cap E_n) = \mu_2(E \cap E_n)\}$$

とする．このとき，$\mathcal{A}$ は有限加法族であったから，$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{L}_n$．さらに，

① $\Omega \in \mathcal{L}_n$

② $E^{(1)}, E^{(2)} \in \mathcal{L}_n;\ E^{(1)} \subset E^{(2)}$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \mu_1\left((E^{(2)} \setminus E^{(1)}) \cap E_n\right) &= \mu_1\left(E^{(2)} \cap E_n\right) - \mu_1\left(E^{(1)} \cap E_n\right)\\ &= \mu_2\left(E^{(2)} \cap E_n\right) - \mu_2\left(E^{(1)} \cap E_n\right)\\ &= \mu_2\left((E^{(2)} \setminus E^{(1)}) \cap E_n\right)\end{aligned}$$

($\because$ μ_i の σ 有限性)

③ 互いに素な $E^{(j)} \in \mathcal{L}_n,\ j \in \mathbb{N}$ に対して

$$\mu_1\left(\sum_{j=1}^{\infty} E^{(j)} \cap E_n\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_1\left(E^{(j)} \cap E_n\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_2\left(E^{(j)} \cap E_n\right) = \mu_2\left(\sum_{j=1}^{\infty} E^{(j)} \cap E_n\right).$$

$\therefore \mathcal{L}_n$ は $\mathcal{A}$ を含む λ システムなので，定理 1.9 より $\mathcal{L}_n = \sigma(\mathcal{A})\ \forall n \in \mathbb{N}$．ここで，$\mathcal{A}$ は有限加法族であるから，$\langle E_n; n \in \mathbb{N} \rangle$ は単調増加として良い．よって定理 1.10 から，

$$\mu_1(E) = \lim_{n\to\infty} \mu_1(E \cap E_n) = \lim_{n\to\infty} \mu_2(E \cap E_n) = \mu_2(E) \quad \forall E \in \sigma(\mathcal{A}).$$

□

p.27. **【定理 1.15 】**追記.

さらに，μ' が $\mathcal{A}$ 上で σ 有限ならば，測度 μ は一意的となる．

p.27. 下 l.3–5.

誤 $E \in \mathcal{A}$ とする．任意の $\epsilon > 0$ に対して，$\exists\{E_n;\, n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{A}$;

$$E \subset \cup_{n=1}^{\infty} E_n, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \mu'(E_n) \leq \mu^*(E) + \epsilon.$$

ここで，$\mathcal{A}$ は有限加法族であるから，$\{E_n;\, n \in \mathbb{N}\}$ を互いに素としてよい．

正 $E \in \mathcal{A}$ とする．任意の $\epsilon > 0$ に対して，$\exists\langle E_n;\, n \in \mathbb{N}\rangle \in \mathcal{A}$;

$$E \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} E_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mu'(E_n) \leq \mu^*(E) + \epsilon.$$

ここで，$\mathcal{A}$ は有限加法族であるから，$\langle E_n;\, n \in \mathbb{N}\rangle$ を互いに素としてよい．

p.28. l.3.

誤 したがって，$\mu'(E) = \mu^*(E)$. □

正 したがって，$\mu'(E) = \mu^*(E)$. さらに，μ' が $\mathcal{A}$ 上で σ 有限ならば，補題 1.6 より μ は一意的となる． □

76

p.28. **【定義 1.18–事象の独立性 】** l.2.

誤 の部分集合，$\{i_1, i_2, \cdots, i_k\} \subset \{1, 2, \cdots, n\}$, $k = 1, 2, \cdots, n$, に対して，

正 の部分集合，$\{i_1, i_2, \cdots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \cdots, n\}$, $k = 1, 2, \cdots, n$, に対して，

p.28. **【定義 1.19–集合族の独立性 】** l.4.

誤 ② θ を任意の指標集合としたとき，$\mathcal{F}$-可測集合の部分集合族の族 $\{\mathcal{A}_\theta;\, \theta \in \Theta\}$

正 ② Θ を任意の指標集合としたとき，$\mathcal{F}$-可測集合の部分集合族の族 $\{\mathcal{A}_\theta;\, \theta \in \Theta\}$

p.29. l.5–6.

誤 なので，定理 1.9 より，$\Lambda \supset \sigma(\mathcal{A}_1') = \sigma(\mathcal{A}_1)$ となる．したがって，定義 1.19 により，$\sigma(\mathcal{A}_1), \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n$ が独立となる．あとは，$n = 2, \cdots, n$ について同様にして，帰納的に題意が成立することを示せる． □

正 なので，定理 1.9 より，$\Lambda \supseteq \sigma(\mathcal{A}_1') = \sigma(\mathcal{A}_1)$ となる．したがって，定義 1.19 により，$\sigma(\mathcal{A}_1), \mathcal{A}_2, \cdots, \mathcal{A}_n$ が独立となる．あとは，$i = 2, \cdots, n$ について同様にして，帰納的に題意が成立することを示せる． □