Thursby [1994, 1995] をみよ．

TSP は説明変数のなかに $Y(-1)$ の変数記号があれば，h 統計量の値を Durbin's h として，m テストの e_{t-1} の係数の t 値を Durbin's h alt. として出力するので，(4.18) 式の計算や (4.19) 式の回帰のためにプログラムを書く必要はない．

4　高階の自己相関の検定

u_t が AR(p) に従うとは

$$u_t=\rho_1 u_{t-1}+\cdots+\rho_p u_{t-p}+\varepsilon_t \tag{4.20}$$

の場合である．ρ_j は安定条件を満たし，$\varepsilon_t\sim \mathrm{NID}(0,\ \sigma_\varepsilon^2)$ とする．

$$H_0:\rho_1=\rho_2=\cdots=\rho_p=0 \tag{4.21}$$

$$H_1:\text{少なくとも 1 つの } \rho_i\neq 0$$

が帰無仮説と対立仮説である．

AR(2) のラグランジュ乗数検定（LM）を導けば容易に AR(p) へと一般化できるから，AR(2) の LM を求めよう．2 章 5 節例 2.6 で述べた LM 検定を用いる．

(4.1) 式の誤差項が次の AR(2) に従うと仮定しよう．

$$u_t=\rho_1 u_{t-1}+\rho_2 u_{t-2}+\varepsilon_t \tag{4.22}$$

このとき (2.82) 式に対応するモデルは

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{X\beta}+\boldsymbol{Z\gamma}+\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{Z}=\begin{bmatrix} u_0 & u_{-1} \\ u_1 & u_0 \\ \vdots & \vdots \\ u_{n-1} & u_{n-2}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\gamma}=\begin{bmatrix}\rho_1\\ \rho_2\end{bmatrix}$$

と表すことができる．

$$H_0:\rho_1=\rho_2=0$$

の検定は次のステップで行えばよい．

(1)　(4.1) 式に OLS，残差を e とする．

(2)　補助方程式 (2.83) 式に対応するのは u_{t-1}，u_{t-2} を e_{t-1}，e_{t-2} でおきかえた

$$e_t^*=\boldsymbol{x}_t'\boldsymbol{\beta}+\rho_1 e_{t-1}+\rho_2 e_{t-2}+v_t,\quad t=3,\ 4,\ \cdots,\ n \tag{4.23}$$

である．この e_t^* は e_t に等しい．

上式に OLS を適用し

$$(n-2)R^2 \fallingdotseq nR^2 \underset{\text{asy}}{\overset{H_0}{\sim}} \chi^2(2) \tag{4.24}$$

によって H_0 を検定する．

この nR^2 は次のように表すこともできる．r_j は ρ_j の推定値とする．(4.23) 式の

全変動 $TSS=\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}$

モデルによって説明できる平方和 ESS

$$=(\hat{\boldsymbol{\beta}}'\quad r_1\quad r_2)\begin{bmatrix}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{e}\\ \boldsymbol{e}_{-1}'\boldsymbol{e}\\ \boldsymbol{e}_{-2}'\boldsymbol{e}\end{bmatrix}$$

$$=r_1\boldsymbol{e}_{-1}'\boldsymbol{e}+r_2\boldsymbol{e}_{-2}'\boldsymbol{e}\qquad (\because \boldsymbol{X}'\boldsymbol{e}=\boldsymbol{0})$$

と表すことができる．ところが

$$r_1=\frac{\boldsymbol{e}_{-1}'\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}}=\frac{\sum_{t=2}^n e_{t-1}e_t}{\sum_{t=1}^n e_t^2}$$

$$r_2=\frac{\boldsymbol{e}_{-2}'\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{e}'\boldsymbol{e}}=\frac{\sum_{t=3}^n e_{t-2}e_t}{\sum_{t=1}^n e_t^2}$$

であるから

$$nR^2=n\frac{ESS}{TSS}=n\sum_{j=1}^2 r_j^2$$

となり，AR(2) の LM 検定は

$$n\sum_{j=1}^2 r_j^2 \underset{\text{asy}}{\overset{H_0}{\sim}} \chi^2(2) \tag{4.25}$$

となる．

一般に u_t に (4.20) 式で示される AR(p) を仮定するとき，(4.21) 式の仮説を検定する LM 検定統計量は

$$Q=n\sum_{j=1}^p r_j^2 \underset{\text{asy}}{\overset{H_0}{\sim}} \chi^2(p) \tag{4.26}$$

ここで

$$r_j=\frac{\sum_{t=j+1}^{n}e_t e_{t-j}}{\sum_{t=1}^{n}e_t^2}$$

は ρ_j の推定値であり，e は (4.1) 式の OLS 残差である．

(4.26) 式の統計量は Box-Pierce の Q 統計量とよばれることもある．同様にして

$$u_t=\rho u_{t-s}+\varepsilon_t, \quad s\geq 1$$

における H_0：$\rho=0$ の LM テストは

$$nr_s^2 \underset{\text{asy}}{\overset{H_0}{\sim}} \chi^2(1) \tag{4.27}$$

によって行うことができる．すべて棄却域は右片側である．

実際には (4.26) 式の Q 統計量を少し変えた，Ljung-Box [1978] の統計量

$$Q(p)=n(n+2)\sum_{j=1}^{p}\left(\frac{r_j^2}{n-j}\right) \underset{\text{asy}}{\overset{H_0}{\sim}} \chi^2(p) \tag{4.28}$$

が計量経済学ではよく用いられる．(4.28) 式の $Q(p)$ のほうが，小標本において (4.26) 式の Q より検定力が高いからである．

TSP では REGOPT で，たとえば

QLAGS=4

と指定すれば (4.28) 式の $Q(1)$ から $Q(4)$ までの値が出力される．

高階の自己相関の検定には標本自己相関関数および偏自己相関関数による検定も有用である．これらに関しては蓑谷 [2001] を参照されたい．

5 パラメータ推定——一般化最小2乗法

時系列データを用いて回帰分析をするとき，誤差項が自己相関している，とくに AR(1) のケースはきわめて多い．AR(1) を前提とするパラメータ推定法として一般化最小2乗法 (GLS)，実行可能な GLS，最尤法 (ML) を説明する．まず GLS について述べる．

誤差項 $\boldsymbol{u}$ が自己相関をしておらず，均一分散のときには

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}')=\sigma^2\boldsymbol{I}$$

である．しかし，$\boldsymbol{u}$ に自己相関があり，あるいは不均一分散であり，あるいは両者が同時に生じているときには，一般に

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}')=\sigma^2\boldsymbol{\Omega} \tag{4.29}$$

と表される．$\boldsymbol{\Omega}$ は $n\times n$ の正値定符号行列とする．$\boldsymbol{u}$ がこのような共分散行列をもつとき，通常の最小2乗推定量 $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ は，$\boldsymbol{X}$ 所与のとき依然不偏推定量ではあるが，もはや $\boldsymbol{\beta}$ の BLUE ではない．

$\hat{\boldsymbol{\beta}}$ よりももっと良い特性をもつ推定量を求めよう．$\boldsymbol{\Omega}$ は正値定符号であるから

$$\boldsymbol{P\Omega P'}=\boldsymbol{I}$$

となる $n\times n$ の非特異行列 $\boldsymbol{P}$ が存在する．したがって

$$\boldsymbol{\Omega}^{-1}=\boldsymbol{P'P}$$

と表すことができる．この $\boldsymbol{P}$ を

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{X\beta}+\boldsymbol{u}$$

の両辺に左からかけると

$$\boldsymbol{Py}=\boldsymbol{PX\beta}+\boldsymbol{Pu} \tag{4.30}$$

となる．ところが

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{Pu})=\boldsymbol{P}\mathrm{E}(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{0}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(\boldsymbol{Pu})&=\mathrm{E}[\boldsymbol{Pu}(\boldsymbol{Pu})']=\boldsymbol{P}\mathrm{E}(\boldsymbol{uu}')\boldsymbol{P}'\\&=\boldsymbol{P}(\sigma^2\boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{P}'=\sigma^2\boldsymbol{P\Omega P}'=\sigma^2\boldsymbol{I}\end{aligned}$$

であるから，$\boldsymbol{Pu}$ は期待値 $\boldsymbol{0}$，自己相関なし，均一分散という古典的線形回帰モデルの誤差項の仮定を満たしている．

したがって $\boldsymbol{Py}$ を被説明変数，$\boldsymbol{PX}$ を説明変数として (4.30) 式に通常の最小2乗法を適用して得られる $\boldsymbol{\beta}$ の推定量を $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ とすれば，$\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ は $\boldsymbol{\beta}$ の BLUE である．

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{\beta}}&=[(\boldsymbol{PX})'(\boldsymbol{PX})]^{-1}(\boldsymbol{PX})'\boldsymbol{Py}=(\boldsymbol{X'P'PX})^{-1}\boldsymbol{X'P'Py}\\&=(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{y}\end{aligned}$$

は $\boldsymbol{\beta}$ の一般化最小2乗推定量 (GLSE, generalized least square's estimator) とよばれる．

$\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ を求める方法は2つあることを上述の結果は示している．

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}}=(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{y} \tag{4.31}$$

による方法と，もし上述の $\boldsymbol{P}$ が簡単に求められる場合には $\boldsymbol{y}$ を $\boldsymbol{Py}$，$\boldsymbol{X}$ を $\boldsymbol{PX}$ と変換して通常の最小2乗推定量

$$\tilde{\boldsymbol{\beta}}=[(\boldsymbol{PX})^{-1}(\boldsymbol{PX})]^{-1}(\boldsymbol{PX})'\boldsymbol{Py} \tag{4.32}$$