$$\left(\frac{\tilde{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^2}\right)=1+\frac{1}{n}(\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{r})'[\hat{\sigma}^2\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}']^{-1}(\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{r})$$

したがって LR は次のようになる．

$$\begin{aligned} LR &= 2(\log L(\hat{\boldsymbol{\theta}})-\log L(\tilde{\boldsymbol{\theta}})) \\ &= n\log L\left(\frac{\tilde{\sigma}^2}{\hat{\sigma}^2}\right) \end{aligned} \tag{2.71}$$

この LR はさらに次のように近似すれば W に等しい．

$$\begin{aligned} LR &= n\log\left\{1+\frac{1}{n}(\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{r})'[\hat{\sigma}^2\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}']^{-1}(\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{r})\right\} \\ &\approx (\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{r})'[\hat{\sigma}^2\boldsymbol{R}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{R}']^{-1}(\boldsymbol{R}\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{r}) \\ &\underset{\text{asy}}{\overset{H_0}{\approx}} \chi^2(r) \end{aligned} \tag{2.72}$$

以上，3つの大標本検定のなかでもスコア検定（ラグランジュ乗数検定）が計量経済学でよく用いられるのは次の理由による．スコア検定は仮説 H_0 のもとでの制約つき MLE のみにもとづいており，仮説 H_0 はたとえば自己相関なし，あるいは均一分散，あるいは正規分布であり，H_0 が正しいならばという制約をつけることによって，パラメータ推定量が簡単に得られることが多いからである．そこでさらに LM 検定について説明しよう．それが次の5節と6節である．

5 制約つき MLE の LM 検定統計量は，補助方程式の nR^2 に等しい

5.1 補助方程式

重回帰モデル

$$\underset{n\times 1}{\boldsymbol{y}}=\underset{n\times k}{\boldsymbol{X}}\underset{k\times 1}{\boldsymbol{\beta}}+\underset{n\times 1}{\boldsymbol{u}} \tag{2.73}$$

$$\boldsymbol{u}\sim \mathrm{N}(\boldsymbol{0},\ \sigma^2\boldsymbol{I})$$

を考えよう．$\boldsymbol{\theta}$ を $p\times 1$ のパラメータベクトルとする．このモデルでは

$$\boldsymbol{\theta}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}\\ \sigma^2\end{bmatrix}$$

であり，$p=k+1$ である．$\boldsymbol{\theta}$ に関する r 個の制約を

$$\underset{r\times 1}{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\theta})}=\boldsymbol{0} \tag{2.74}$$

とする．$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\theta})$ は $\boldsymbol{\theta}$ に関する線形制約，非線形制約いずれの場合もありうる．たとえば

$$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\theta})=\begin{bmatrix}R_1(\boldsymbol{\theta})\\ R_2(\boldsymbol{\theta})\\ R_3(\boldsymbol{\theta})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\theta_1+\theta_2-1\\ \theta_1+\theta_2\theta_3\\ \theta_4\theta_5+\theta_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

である．

尤度関数を $L(\boldsymbol{\theta})$ とし，次の制約つき最大問題を考えよう．すでに述べた内容もあるが，もう一度くりかえす．

$$\max L(\boldsymbol{\theta})$$

$$\text{subject to } \underset{r\times 1}{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\theta})}=\boldsymbol{0}$$

$\boldsymbol{\theta}$ は $p\times 1$ のパラメータベクトルである．

$\boldsymbol{\theta}^*=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\theta})=\boldsymbol{0}$ の制約のもとでの $\boldsymbol{\theta}$ の MLE

$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta})=\dfrac{\partial\log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}$ はスコア

$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta}^*)=\left.\dfrac{\partial\log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}\right|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}^*}$

とする

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta})\xrightarrow{d}\mathrm{N}(\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{I}(\boldsymbol{\theta})) \qquad ((1.57)\text{ 式})$$

である．

このとき H_0：$\boldsymbol{R}(\boldsymbol{\theta})=\boldsymbol{0}$ とすると，次式が成り立つ（(2.52) 式）．

$$LM=\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta}^*)'[\boldsymbol{I}(\boldsymbol{\theta}^*)]^{-1}\boldsymbol{S}(\boldsymbol{\theta}^*)\ \underset{\text{asy}}{\overset{H_0}{\sim}}\ \chi^2(r) \tag{2.75}$$

重回帰モデル

$$\begin{aligned} Y_t=\ &\beta_1X_{1t}+\beta_2X_{2t}+\cdots+\beta_{k-r}X_{k-r,t}+\beta_{k-r+1}X_{k-r+1,t} \\ &+\cdots+\beta_kX_{kt}+u_t \end{aligned} \tag{2.76}$$

において

$$\underset{(k-r)\times 1}{\boldsymbol{\beta}_1}=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_{k-r}\end{bmatrix},\quad \underset{r\times 1}{\boldsymbol{\beta}_2}=\begin{bmatrix}\beta_{k-r+1}\\ \vdots\\ \beta_k\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}_1=\begin{bmatrix}X_{11} & \cdots & X_{k-r,1}\\ \vdots & & \vdots\\ X_{1n} & \cdots & X_{k-r,n}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{X}_2=\begin{bmatrix}X_{k-r+1,1} & \cdots & X_{k1}\\ \vdots & & \vdots\\ X_{k-r+1,n} & \cdots & X_{kn}\end{bmatrix}$$

とおくと，(2.76) 式は次のように表すことができる．

$$\underset{n\times1}{\boldsymbol{y}}=\underset{n\times(k-r)}{X_1}\underset{(k-r)\times1}{\boldsymbol{\beta}_1}+\underset{n\times r,}{X_2}\underset{r\times1}{\boldsymbol{\beta}_2}+\underset{n\times1}{\boldsymbol{u}},\quad \boldsymbol{u}\sim \mathrm{N}(\boldsymbol{0},\ \sigma^2 I) \tag{2.77}$$

$\boldsymbol{\theta}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \sigma^2\end{bmatrix}$ とすると，H_0：$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{0}$ の制約のもとでの $\boldsymbol{\theta}$ の MLE は

$$\boldsymbol{y}=X_1\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{u} \tag{2.78}$$

における $\boldsymbol{\beta}_1$ と σ^2 の MLE

$$\boldsymbol{\theta}^*=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1^*\\ \boldsymbol{0}\\ \sigma^{2*}\end{bmatrix}$$

に等しい．ここで

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1^* &= (X_1'X_1)^{-1}X_1'\boldsymbol{y}\\
\sigma^{2*} &= \boldsymbol{e}^{*\prime}\boldsymbol{e}^*/n\\
\boldsymbol{e}^* &= \boldsymbol{y}-X_1\boldsymbol{\beta}_1^* \overset{H_0}{=} \boldsymbol{y}-(X_1\ \ X_2)\begin{pmatrix}\boldsymbol{\beta}_1^*\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\\
&\overset{H_0}{=} \boldsymbol{y}-X\boldsymbol{\beta}^*\\
\boldsymbol{\beta}^* &\overset{H_0}{=} \begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1^*\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.79}$$

である．

(2.76) 式の対数尤度関数は

$$\log L(\boldsymbol{\theta})=-\frac{n}{2}\log(2\pi)-\frac{n}{2}\log\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}(\boldsymbol{y}-X\boldsymbol{\beta})'(\boldsymbol{y}-X\boldsymbol{\beta})$$

であるから

$$S(\boldsymbol{\theta})=\frac{\partial\log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\theta}}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\boldsymbol{\beta}}\\ \dfrac{\partial\log L(\boldsymbol{\theta})}{\partial\sigma^2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{X'(\boldsymbol{y}-X\boldsymbol{\beta})}{\sigma^2}\\ -\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{1}{2\sigma^4}(\boldsymbol{y}-X\boldsymbol{\beta})'(\boldsymbol{y}-X\boldsymbol{\beta})\end{bmatrix}$$

$$I(\boldsymbol{\theta})=\begin{bmatrix}\dfrac{X'X}{\sigma^2} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}' & \dfrac{n}{2\sigma^4}\end{bmatrix}$$

であるから

$$S(\boldsymbol{\theta}^*)=\begin{bmatrix}\dfrac{X'\boldsymbol{e}^*}{\sigma^{2*}}\\ 0\end{bmatrix},\quad I(\boldsymbol{\theta}^*)=\begin{bmatrix}\dfrac{X'X}{\sigma^{2*}} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}' & \dfrac{n}{2\sigma^{4*}}\end{bmatrix}$$

となる．これらを (2.75) 式へ代入して次式を得る．

$$LM=\begin{bmatrix}\dfrac{\boldsymbol{e}^{*\prime}X}{\sigma^{2*}} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dfrac{X'X}{\sigma^{2*}} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0}' & \dfrac{n}{2\sigma^{4*}}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\dfrac{X'\boldsymbol{e}^*}{\sigma^{2*}}\\ 0\end{bmatrix}$$

$$=\frac{\boldsymbol{e}^{*\prime}X(X'X)^{-1}X'\boldsymbol{e}^*}{\sigma^{2*}}\ \underset{\text{asy}}{\overset{H_0}{\sim}}\ \chi^2(r) \tag{2.80}$$

ところがこの LM の式は，補助方程式 auxiliary equation

$$\boldsymbol{e}^*=X\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{v} \tag{2.81}$$

における nR^2 に等しい．

なぜならば (2.81) 式の $\boldsymbol{e}^*$ の平均は 0 であるから，(2.81) 式の OLS の決定係数は

$$R^2=\frac{(X\hat{\boldsymbol{\alpha}})'X\hat{\boldsymbol{\alpha}}}{\boldsymbol{e}^{*\prime}\boldsymbol{e}^*}$$

によって与えられる．

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}=(X'X)^{-1}X'\boldsymbol{e}^*$$

であるから

$$\begin{aligned}
(X\hat{\boldsymbol{\alpha}})'X\hat{\boldsymbol{\alpha}} &= \boldsymbol{e}^{*\prime}X(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}X'\boldsymbol{e}^*\\
&= \boldsymbol{e}^{*\prime}X(X'X)^{-1}X'\boldsymbol{e}^*
\end{aligned}$$

となる．他方

$$\boldsymbol{e}^{*\prime}\boldsymbol{e}^*=n\sigma^{2*}$$

であるから

$$nR^2=\frac{n\boldsymbol{e}^{*\prime}X(X'X)^{-1}X'\boldsymbol{e}^*}{\boldsymbol{e}^{*\prime}\boldsymbol{e}^*}=\frac{\boldsymbol{e}^{*\prime}X(X'X)^{-1}X'\boldsymbol{e}^*}{\left(\dfrac{\boldsymbol{e}^{*\prime}\boldsymbol{e}^*}{n}\right)}$$

$$=\frac{e^{*\prime}X(X'X)^{-1}X'e^*}{\sigma^{2*}}$$

となり，これは (2.80) 式に等しい．

5.2 別 の 証 明

$LM=nR^2$ は次のようにして証明することもできる．

$$X(X'X)^{-1}X'=I-M$$

$$e^*=e-X(\beta^*-\hat{\beta})\qquad (2.2\text{ 節参照})$$

$$e^*=y-X\beta^*,\quad e=y-X\hat{\beta},\quad \hat{\beta}=(X'X)^{-1}X'y$$

であるから

$$e^{*\prime}X(X'X)^{-1}X'e^*=e^{*\prime}(I-M)e^*=e^{*\prime}e^*-e^{*\prime}Me^*$$

$$e^{*\prime}Me^*=[e-X(\beta^*-\hat{\beta})]'M[e-X(\beta^*-\hat{\beta})]$$

$$=e'Me=e'e$$

ゆえに

$$e^{*\prime}X(X'X)^{-1}X'e^*=e^{*\prime}e^*-e'e$$

したがって

$$nR^2=n\frac{e^{*\prime}e^*-e'e}{e^{*\prime}e^*}=\frac{e^{*\prime}e^*-e'e}{\sigma^{2*}}$$

となる．

他方，(2.70) 式と (2.15) 式を用いれば

$$LM=\frac{e^{*\prime}e^*-e'e}{\sigma^{2*}}$$

と表すこともできるから，$LM=nR^2$ に等しい．

5.3 非線形モデルの LM

$LM=nR^2$ は非線形モデルの特別な場合として求めることもできる．

未知パラメータに関して非線形のモデル

$$y=f(X,\ \beta)+u$$

において，$R(\beta)=0$ の制約の LM テストは，(次章 (3.75) 式で示すが)，e^* の $Z(b^*)$ への回帰を行ったときの決定係数 R^2 に n をかけたものに等しい．

ここで

$$e^*=y-f(X,\ b^*)$$

$b^*=R(\beta)=0$ の制約のもとでの β の MLE

$$\underset{n\times k}{Z}(b^*)=\left\{\frac{\partial f_i}{\partial \beta_j}\bigg|_{\beta_j=b_j^*}\right\},\qquad \begin{array}{l} i=1,\ \cdots,\ n\\ j=1,\ \cdots,\ k\end{array}$$

である．

未知パラメータ β に関して線形のとき

$$\frac{\partial f_i}{\partial \beta_j}=X_{ji},\qquad i=1,\ \cdots,\ n,\qquad j=1,\ \cdots,\ k$$

となるから $Z(b^*)=X$ となり，e^* の $Z(b^*)$ への回帰は e^* の X への回帰に等しい．

例 2.6　除外変数の検定

(2.73) 式の定式化には r 個の変数 $Z_1,\ \cdots,\ Z_r$ が除外されているのではないかという仮説を検定しよう．モデルを

$$\underset{n\times 1}{y}=\underset{n\times k}{X}\underset{k\times 1}{\beta}+\underset{n\times r}{Z}\underset{r\times 1}{\gamma}+\underset{n\times 1}{\varepsilon}\qquad (2.82)$$

$$\varepsilon\sim \mathrm{N}(0,\ \sigma^2 I)$$

と定式化する．検定したい仮説は H_0：$\gamma=0$ である．通常の F 検定ではなく，補助方程式を用いる検定を説明しよう．

(2.82) 式で H_0：$\gamma=0$ の制約が正しいとき (2.73) 式になる．(2.73) 式の OLS 残差を e^*，β の推定量を $\tilde{\beta}$ とすると

$$e^*=y-X\tilde{\beta}=M_X y$$

ここで

$$M_X=I-X(X'X)^{-1}X'$$

である．

(2.82) 式の OLS 残差を e とし，β，γ の推定量をそれぞれ $\hat{\beta}$，$\hat{\gamma}$ とすると

$$e=y-X\hat{\beta}-Z\hat{\gamma}=y-(X\quad Z)\begin{bmatrix}\hat{\beta}\\ \hat{\gamma}\end{bmatrix}$$

$$=y-W\hat{\delta}=M_W y$$

と表すことができる．ここで

$$W=(X\quad Z)$$

$$\hat{\delta}=\begin{bmatrix}\hat{\beta}\\ \hat{\gamma}\end{bmatrix}$$

$$M_W=I-W(W'W)^{-1}W'$$

である．

ところが

$$e^*=y-X\tilde{\beta}=y-W\hat{\delta}-(X\tilde{\beta}-W\hat{\delta})=e-(X\tilde{\beta}-W\hat{\delta})$$

であるから，e^* の W への回帰を行ったときの残差

$$M_We^*=M_We-(M_WX\tilde{\beta}-M_WW\hat{\delta})$$

において

$$M_WW=M_W(X\ \ Z)=(M_WX\ \ M_WZ)=0$$

であるから

$$M_We^*=M_We=M_W(M_Wy)=M_Wy$$

となる．すなわち

e^* の W への回帰を行ったときの残差 M_We^*

$=y$ の W への回帰を行ったときの残差 M_Wy

である．つまり補助方程式

$$e^*=X\beta+Z\gamma+v \tag{2.83}$$

の OLS 残差 $\hat{v}=M_We^*$ と (2.82) 式の OLS 残差 M_Wy は等しい．(2.82) 式において H_0：$\gamma=0$ が正しいとき，すなわち (2.73) 式が正しいとき

$$\frac{e^{*\prime}e^*}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-k)$$

である．他方 (2.82) 式のモデルのとき

$$\frac{e'e}{\sigma^2}\sim\chi^2(n-k-r)$$

であるから，H_0 が正しいとき

$$\frac{e^{*\prime}e^*-e'e}{\sigma^2}\sim\chi^2(r)$$

となる．

σ^2 を $e^{*\prime}e^*/n$ で推定し，n が十分大きければ

$$\frac{e^{*\prime}e^*-e'e}{\sigma^2}\approx\frac{e^{*\prime}e^*-e'e}{(e^{*\prime}e^*/n)}=n\left(1-\frac{e'e}{e^{*\prime}e^*}\right)$$

と表すことができる．ところが

$e^{*\prime}e^*=$(2.83) 式の全変動

$e'e=(M_Wy)'(M_Wy)=(M_We^*)'(M_We^*)$

$=$(2.83) 式の残差平方和

であるから，(2.83) 式の決定係数を R^2 とすると

$$n\left(1-\frac{e'e}{e^{*\prime}e^*}\right)=nR^2$$

となる．したがって

$$nR^2\ \underset{\text{asy}}{\overset{H_0}{\sim}}\ \chi^2(r)$$

が，H_0：$\gamma=0$ の検定統計量である．すなわち (2.82) 式における $\gamma=0$ の検定統計量は，大標本のとき，補助方程式 (2.83) 式の nR^2 に等しい．

6　ラグランジュ乗数検定の別の展開

ラグランジュ乗数検定は次のように展開することもできる．スコア $S(\theta)$ を

$$\underset{p\times1}{S(\theta)}=\frac{\partial\log L(\theta)}{\partial\theta}=\sum_{i=1}^n w_i(\theta)=\underset{p\times n}{W'(\theta)}\underset{n\times1}{i} \tag{2.84}$$

と表す．ここで

$$\underset{p\times1}{w_i(\theta)}=\frac{\partial\log L_i(\theta)}{\partial\theta}$$

$$L_i(\theta)=L(\theta\,;\,y_i,\ X_i)$$

$$\underset{n\times p}{W(\theta)}=\begin{bmatrix}w_1'(\theta)\\ w_2'(\theta)\\ \vdots\\ w_n'(\theta)\end{bmatrix}$$

$$\underset{1\times n}{i'}=(1\ \ 1\ \cdots\ 1)$$

である．

モデルの誤差項に $u_i\sim\text{NID}(0,\ \sigma^2)$ を仮定しているから，$w_1(\theta)$, …, $w_n(\theta)$ も独立で均一分散をもつ．したがって

$$\begin{aligned}\text{var}[S(\theta)]&=\text{var}\left(\sum_{i=1}^n w_i(\theta)\right)=\sum_{i=1}^n\text{var}[w_i(\theta)]\\&=n\,\text{var}[w_i(\theta)]=n\text{E}[w_i(\theta)w_i(\theta)']\\&=I(\theta)\end{aligned}$$