実際，ファイル EX0901 に示されているが，y の歪度，尖度の推定値をそれぞれ $\sqrt{b_1}$，b_2 とすると

$$\sqrt{b_1}=-0.435,\quad b_2=4.572$$

であり，$\sqrt{\beta_1}<0$，$\beta_2>3$ の可能性が高い．

次に正規性検定統計量を説明しよう．まず次節と 4 節で歪度と尖度について説明し，5 節以降で代表的な検定統計量を採り上げるが，本章で説明を省いた他の検定統計量についてくわしくは蓑谷［2001］第 5 章を参照されたい．

3　歪 度 と 尖 度

確率分布の分布特性を示すために期待値と分散がよく用いられる．正規分布と比較するためには，さらに歪度 skewness と尖度 kurtosis という概念が必要になる．

確率変数 X は期待値 μ，分散 σ^2 をもつ確率分布に従うとき，標準化された変数

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$$

は期待値 0，分散 1 をもつ．X の平均まわりの k 次モーメントを μ_k とする．このZの 3 次モーメント

$$\sqrt{\beta_1}=\mathrm{E}(Z^3)=\mathrm{E}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^3=\frac{\mathrm{E}(X-\mu)^3}{\sigma^3}=\frac{\mu_3}{\sigma^3} \tag{9.14}$$

は歪度 skewness とよばれ，通常 $\sqrt{\beta_1}$ で表される．歪度は分布の歪み，非対称性を示し，正規分布の平均まわりの 3 次モーメントは 0 であるから，$\sqrt{\beta_1}=0$ である．すなわち正規分布に歪みはなく，μ を中心に左右対称である．$\sqrt{\beta_1}>0$ の分布は正の歪み，$\sqrt{\beta_1}<0$ の分布は負の歪みをもつ分布といわれる．

標準化された変数 Z の 4 次モーメント

$$\beta_2=\mathrm{E}(Z^4)=\mathrm{E}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^4=\frac{\mathrm{E}(X-\mu)^4}{\sigma^4}=\frac{\mu_4}{\sigma^4} \tag{9.15}$$

は尖度 kurtosis とよばれ，通常 β_2 で表される．尖度は分布のとがり具合というより，分布の両すそのほうで確率（あるいは確率密度）がどれぐらい速く 0 に近づいていくかを示す尺度である．

正規分布のとき，平均まわりの 4 次モーメントは $3\sigma^4$ であるから，$\beta_2=3$ となる．この 3 を基準にして，$\beta_2>3$ の分布は急尖的 leptokurtic 分布とよばれ，正規分布より両すそが厚い分布になる．$\beta_2<3$ の分布は緩尖的 platykurtic 分布とよばれ，正規分布より両すそが薄い．

平均まわりの k 次モーメント $\mu_k=E(X-\mu)^k$ は，k 次の標本モーメント

$$m_k=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^k,\quad k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$$

によって推定することができるから，歪度 $\sqrt{\beta_1}$，尖度 β_2 の推定量をそれぞれ $\sqrt{b_1}$，b_2 と表すと

$$\sqrt{b_1}=\frac{m_3}{m_2^{3/2}} \tag{9.16}$$

$$b_2=\frac{m_4}{m_2^2} \tag{9.17}$$

となる．

4　歪度と尖度を用いる正規性の検定

次節で説明する正規性検定のボウマン・シェントン検定（計量経済学ではジャルク・ベラ検定の名で知られている）は歪度の 0 からの乖離および尖度の 3 からの乖離の程度によって正規性を検定する．歪度 0，尖度 3 の確率分布は正規分布のみなのか．正規分布の 4 次や 5 次のモーメントを正規性検定で考える必要はないのか．いいかえれば，歪度と尖度を用いてなぜ正規性検定が可能かを簡単に説明しておこう．

$$X_i\sim\mathrm{iid}(\mu,\ \sigma^2),\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

とする．

$$S_n=\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}=\frac{\bar{X}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

とし，S_n の分布関数を $F_n(x)$ とする．

X の k 次キュミラントを κ_k，平均まわりの k 次モーメントを μ_k とすると

$$\kappa_1=\mu$$

$$\kappa_2=\mu_2=\sigma^2$$

$$\kappa_3=\mu_3$$
$$\kappa_4=\mu_4-3\mu_2^2$$

であるから

$$\text{歪度}\quad \sqrt{\beta_1}=\frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}=\frac{\kappa_3}{\kappa_2^{3/2}}=\frac{\kappa_3}{\sigma^3}$$

$$\text{尖度}\quad \beta_2-3=\frac{\mu_4}{\mu_2^2}-3=\frac{\kappa_4}{\kappa_2^2}=\frac{\kappa_4}{\sigma^4}$$

と表すことができる．

このとき $F_n(x)$ のエッジワース展開は次式で与えられる（証明は蓑谷［2003］第3章を参照されたい）．

$$F_n(x)=\Phi(x)-\phi(x)\left[\frac{1}{3!\sqrt{n}}\left(\frac{\kappa_3}{\sigma^3}\right)H_2(x)\right.$$
$$+\left\{\frac{1}{4!}\left(\frac{\kappa_4}{\sigma^4}\right)H_3(x)+\frac{10}{6!}\left(\frac{\kappa_3}{\sigma^3}\right)^2H_5(x)\right\}\frac{1}{n}$$
$$+\left\{\frac{1}{5!}\left(\frac{\kappa_5}{\sigma^5}\right)H_4(x)+\frac{35}{7!}\left(\frac{\kappa_3}{\sigma^3}\right)\left(\frac{\kappa_4}{\sigma^4}\right)H_6(x)\right.$$
$$\left.\left.+\frac{280}{9!}\left(\frac{\kappa_3}{\sigma^3}\right)^3H_8(x)\right\}\frac{1}{n^{3/2}}+\cdots+O(n^{-\frac{5}{2}})\right] \qquad (9.18)$$

ここで

$\Phi(x)$＝標準正規変数の分布関数

$\phi(x)$＝標準正規変数の pdf

$H_r(x)$＝r 次エルミート多項式

$$H_0(x)=1,\qquad H_1(x)=x$$
$$H_2(x)=x^2-1,\qquad H_3(x)=x^3-3x$$
$$H_4(x)=x^4-6x^2+3,\qquad H_5(x)=x^5-10x^3+15x$$
$$H_6(x)=x^6-15x^4+45x^2-15$$
$$H_7(x)=x^7-21x^5+105x^3-105x$$
$$H_8(x)=x^8-28x^6+210x^4-420x^2+105$$

したがって $F_n(x)$ を次のように表すことができる．

$$F_n(x)=\Phi(x)-\phi(x)\left\{\frac{1}{3!\sqrt{n}}\sqrt{\beta_1}H_2(x)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4!}(\beta_2-3)H_3(x)+\frac{10}{6!}(\sqrt{\beta_1})^2H_5(x)\right\}\frac{1}{n}$$

$$+R_n(x) \qquad (9.19)$$

$$\lim_{n\to\infty} nR_n(x)=0$$

このエッジワース展開から，$F_n(x)$ の $\Phi(x)$ との乖離 $|F_n(x)-\Phi(x)|$ は，$\sqrt{\beta_1}$ と β_2-3 に依存していることがわかる．$\sqrt{\beta_1}$ と β_2-3 は正規性からの乖離を示す尺度になる．

$\sqrt{\beta_1}$，β_2 の推定量はそれぞれ (9.16) 式，(9.17) 式で与えられる．正規分布のとき $\mathrm{cov}(\sqrt{b_1},\ b_2)=0$ であるから，$\sqrt{b_1}$ と b_2 は無相関であるが

$$\mathrm{E}(b_1b_2)=\frac{216n^2(n-1)^2}{(n-2)^2(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)}$$

$$\rho(b_1,\ b_2)\fallingdotseq\left(\frac{27}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (9.20)$$

であるから $\sqrt{b_1}$ と b_2 は独立ではない（Stuart and Ord［1994］p. 454）．たとえば $n=100$ でも b_1，b_2 の相関係数は 0.52 とまだかなり高い．したがって次節で説明するジャルク・ベラ検定は，$\sqrt{b_1}$ と b_2 が漸近的に独立と仮定しているから，漸近的で，近似的な正規性検定にすぎない．

5　ボウマン・シェントン（ジャルク・ベラ）検定

歪度 $\sqrt{\beta_1}$，尖度 β_2 の推定量はそれぞれ (9.16) 式の $\sqrt{b_1}$，(9.17) 式の b_2 で与えられることを示した．X が正規分布するならば，X の標本 $X_1, \cdots, X_n$ から得られる $\sqrt{b_1}$ と b_2 は次の期待値と分散をもつ．

$$\mathrm{E}(\sqrt{b_1})=0 \qquad (9.21)$$

$$\mathrm{var}(\sqrt{b_1})=\frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}\approx\frac{6}{n} \qquad (9.22)$$

$$\mathrm{E}(b_2)=\frac{3(n-1)}{n+1}\approx 3 \qquad (9.23)$$

$$\mathrm{var}(b_2)=\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}\approx\frac{24}{n} \qquad (9.24)$$

$\sqrt{b_1}$ や b_2 の標本分布に関する説明は，標本キュムラントからの説明であるが，Stuart and Ord［1994］12章にくわしい．

X_i，$i=1, \cdots, n$ が正規分布からの無作為標本である，という仮説

$$H_0: X_i\sim \mathrm{NID}(\mu,\ \sigma^2)$$

表 9.2　JB テストの臨界点

n	有意水準0.10	有意水準0.05
20	2.3327	3.7737
30	2.7430	4.3852
40	2.9942	4.7407
50	3.1880	5.0002
75	3.4190	5.3030
100	3.6703	5.4365
150	3.9033	5.5979
200	4.0463	5.7113

（出所） Deb and Sefton [1996].

が正しいとしても，前節で述べたように $\sqrt{b_1}$ と b_2 は無相関であるが独立ではない．しかし n が十分大きいならば（$n\geq 100$），Bowman and Shenton [1986] は，$\sqrt{b_1}$ と b_2 はほとんど独立とみなしてもよいと述べている．すでに Bowman and Shenton は1975年に次の検定統計量を与えている．$\sqrt{b_1}$ と b_2 をそれぞれ (9.21)～(9.24) 式を用いて規準化し，漸近的に正規分布による近似と，近似的に独立を仮定して得られた大標本検定である．

$$JB=\left(\frac{\sqrt{b_1}-0}{\sqrt{\frac{6}{n}}}\right)^2+\left(\frac{b_2-3}{\sqrt{\frac{24}{n}}}\right)^2$$

$$=\frac{nb_1}{6}+\frac{n(b_2-3)^2}{24}\ \underset{\text{asy}}{\overset{H_0}{\sim}}\ \chi^2(2) \tag{9.25}$$

歴史的な順序からいえば，(9.25) 式はボウマン・シェントン検定というべきであるが，計量経済学では Jarque and Bera [1987] の論文によってジャルク・ベラ検定の名で知られている．

小標本においては，(9.25) 式のように $\mathrm{var}(\sqrt{b_1})$，$\mathrm{E}(b_2)$，$\mathrm{var}(b_2)$ の近似式ではなく，(9.22)，(9.23)，(9.24) 式の等号の式を用いて規準化した次の修正 JB のほうが，(9.25) 式の JB より検定力が高いと述べたのは，Urzúa [1996] である．

$$CJB=\left\{\frac{\sqrt{b_1}-0}{\sqrt{\frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}}}\right\}^2+\left\{\frac{b_2-\frac{3(n-1)}{n+1}}{\sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}}}\right\}^2$$

$$=\frac{b_1(n+1)(n+3)}{6(n-2)}+\frac{(n+1)^2(n+3)(n+5)}{24n(n-2)(n-3)}\left\{b_2-\frac{3(n-1)}{n+1}\right\}^2$$

$$\underset{\text{asy}}{\overset{H_0}{\sim}}\ \chi^2(2) \tag{9.26}$$

(9.25) 式は自由度 2 のカイ 2 乗分布を用いる大標本検定であるが，Deb and Sefton [1996] は，有限標本における JB 検定の臨界点を与えた．表 9.2 はこの臨界点の一部である．

たとえば，$n=100$ のとき，(9.25) 式の JB は自由度 2 のカイ 2 乗分布を用いるから，棄却域を与える右片側10%点，5％点はそれぞれ 4.6052，5.9915 であるが，表 9.2 を用いると，それぞれ 3.6703，5.4365 ともう少し小さい．したがって，たとえば $n=100$，$JB=5.8$ のとき自由度 2 のカイ 2 乗分布からは，有意水準 0.05 で H_0 は棄却されないが，表 9.2 からは H_0 が棄却され，正規分布ではない，と判断される．

6　ギアリー検定

Geary [1935] は，対称的な確率分布，すなわち歪度 0 の対称分布のすその長さは，平均偏差を標準偏差で割った次式で測ることができることに注目した．

$$\delta=\frac{\nu_1}{\sigma} \tag{9.27}$$

ここで

$$\nu_1=\mathrm{E}|X-\mu|$$

$$\mu=\mathrm{E}(X)$$

$$\sigma^2=\mathrm{E}(X-\mu)^2$$

である．X が正規分布に従うとき，$\nu_1=\sigma\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$ であるから

$$\delta=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}=0.79788456\cdots \tag{9.28}$$

である．

一般誤差分布を例にして，β_2 と δ の関係を調べてみよう．一般誤差分布の pdf は次式，$\mu=0$，$\phi=1$ のときのグラフは図 9.13 に示されている．