ファイナンス概論

11．資本資産評価モデル (CAPM)

岩城秀樹

京都産業大学経営学部

前回の復習

収益率の (標準偏差, 期待値)= $(\sigma, \mathbb{E}[r])$-平面を考えると，任意の 1 つのリスク資産と無リスク資産から成るポートフォリオは，当該リスク資産を表わす点 $(\sigma_s, \mathbb{E}[r_s])$ と無リスク資産を表わす点 $(0, r_f)$ を結ぶ半直線となった．

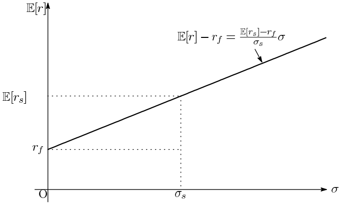

Figure: 1. 1 リスク資産と 1 無リスク資産から成るポートフォリオ

リスク資産から成るポートフォリオの $(\sigma, \mathbb{E}[r])$-平面上でとり得る点を考えると，**最小分散境界** (= 同一期待リターンを達成するポートフォリオの中で最もリスク σ の小さくなるポートフォリオを表わす点の期待リターンを変化させた場合の軌跡) では，標準偏差は期待値の凸関数となった．

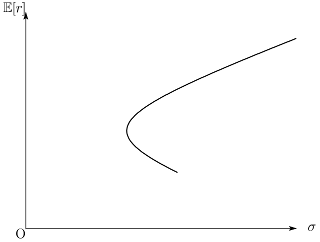

Figure: 2. **最小分散境界**

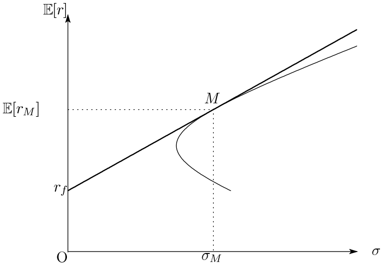

Figure: 3. **最小分散境界と効率的フロンティア**

資本資産評価モデル (CAPM) の概要

前提１ すべての投資家は，期待収益率，リスク，収益率相関係数に関して，同じ予測をもつ．
前提２ すべての投資家は合理的で，リスク回避的である．
前提３ 同一の利子率で無制限に貸借可．
前提４ 市場は無摩擦，完全競争的，任意の単位で取引可．
前提５ 空売り制約が無い．

という前提の下では，取引可能なすべてのリスク資産と１つの無リスク資産を投資対象としたとき，すべての投資家は，同一のリスク資産ポートフォリオを選択することになる．
このリスク資産ポートフォリオを**市場ポートフォリオ**と呼ぶ．
すべての投資家は，同一のリスク資産ポートフォリオを選択する
$\Longrightarrow$ 　均衡では，市場ポートフォリオに占める各リスク資産の割合は，

$$\frac{\text{当該資産の時価総額}}{\text{すべてのリスク資産の時価総額の和}}.$$

時価総額 = 発行済株式数 × 株価.

$(\sigma, \mathbb{E}[r])$– 平面上で，無リスク資産を表わす点 $(0, r_f)$ と市場ポートフォリオを表わす点 $(\sigma_M, \mathbb{E}[r_M])$ を結ぶ半直線;

$$\mathbb{E}[r] = r_f + \frac{\mathbb{E}[r] - r_f}{\sigma_M}\sigma$$

を資本市場線 (CML, Capital Market Line) という．

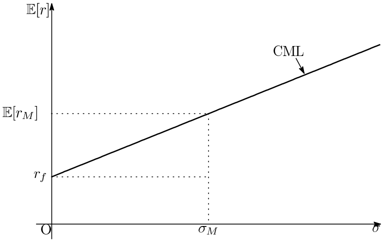

Figure: 4. CML

効率的ポートフォリオは，CML 上のポートフォリオとなる．

パッシブ運用とアクティブ運用

均衡では，市場ポートフォリオと異なるリスク資産の売買をおこなっても，市場ポートフォリオを上回るパフォーマンス（=同一リスクに対する期待リターン）をあげることはできない．
現実の投資において，

- インデックス・ポートフォリオのパッシブ運用（買い持ち運用）
- 特定銘柄のアクティブ運用（積極的売買）

に対する理論的根拠を与える．

リスク資産のリスク

取引可能なリスク資産は，リスク資産 1〜リスク資産 N の N 銘柄とする.

r_i := リスク資産 i，$i = 1, 2, \cdots, N$, の収益率，

σ_i := リスク資産 i のリスク,

w_i := 市場ポートフォリオに占めるリスク資産 i の構成比率.

$$
\begin{aligned}
r_M &= \sum_{i=1}^{N} w_i r_i, \\
\sigma_M^2 &= \mathrm{Var}[r_M] \\
&= \mathrm{Cov}[r_M, r_M] \\
&= \mathrm{Cov}\left[\sum_{i=1}^{N} w_i r_i, r_M\right] = \sum_{i=1}^{N} w_i \mathrm{Cov}[r_i, r_M].
\end{aligned}
$$

∴市場ポートフォリオの収益率分散で表わしたリスクに占めるリスク資産 i 一単位当たりのリスク= $\mathrm{Cov}[r_i, r_M]$.

市場ポートフォリオのリスク一単位あたりのリスク・プレミアム

(= 期待収益率 − 無リスク利子率) = $\dfrac{\mathbb{E}[r_M] - r_f}{\sigma_M^2}$.

ベータ・リスクと CAPM

均衡では，リスク資産 i のリスク一単位あたりのリスク・プレミアムは，

$$\frac{\mathbb{E}[r_i] - r_f}{\mathrm{Cov}[r_i, r_M]} = \frac{\mathbb{E}[r_M] - r_f}{\sigma_M^2}.$$

∴ 均衡では，

$$\mathbb{E}[r_i] - r_f = \beta_i \left[\mathbb{E}[r_M] - r_f\right], \qquad \beta_i := \frac{\mathrm{Cov}[r_i, r_M]}{\sigma_M^2}. \tag{1}$$

(1) における β_i をリスク資産 i の**ベータ・リスク**あるいは**ベータ**という．
個別資産のベータ・リスクとリスク・プレミアムの均衡での関係を表わした (1) を**資本資産評価モデル**あるいは CAPM(Capital Asset Pricing Model) という．

$(\beta_i, \mathbb{E}[r_i] - r_f)$-平面状における (1) のグラフを**証券市場線**あるいは**SML**(Security Market Lines) という．

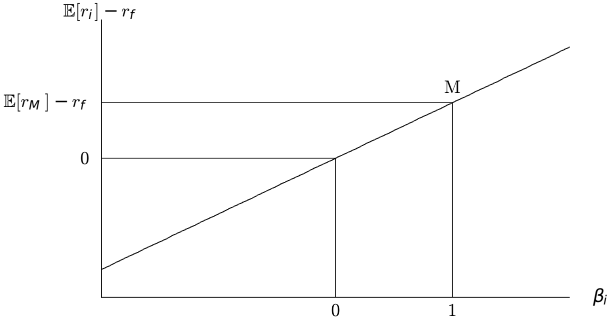

Figure: 5. SML

ポートフォリオ選択への応用

CAPM $\Longrightarrow$

1. 市場ポートフォリオでの構成比率と同じ比率でリスク資産に分散投資．
2. $\boxed{1}$ のリスク資産ポートフォリオと無リスク資産を組み合わせて，適当なリスク－リターンを達成するポートフォリオを保有．

ポートフォリオのパフォーマンス評価

CML を benchmark として管理しているポートフォリオのリスク・リターンを評価

1. 管理ポートフォリオのボラティリティと平均収益率を計測.
2. 同一のボラティリティをもたらす市場ポートフォリオと無リスク資産から成るポートフォリオの平均収益率と管理ポートフォリオの平均収益率を比較．

インデックス・ポートフォリオとアルファ

現実に市場ポートフォリオを求めることは不可能
$\Longrightarrow$ 市場インデックスと同じ構成比率になるポートフォリオ（=インデックス・ポートフォリオ）を市場ポートフォリオの代替に用いる．

インデックス・ポートフォリオ運用の利点

1. 実証によると，インデックス・ポートフォリオの買い持ち戦略は，アクティブ運用のパフォーマンスを上回る．
2. アクティブ運用は，インデックス運用よりコストが嵩む．

年金基金の運用では，複数のファンド・マネジャーが個別のポートフォリオを運用している．
$\Longrightarrow$ インデックスとは異なる個々のポートフォリオや証券のパフォーマンス評価には，SML が用いられる．
同一のベータリスクに対する SML の値と実際のリスク・プレミアム差をアルファと呼ぶ．
持続的に正のアルファが獲得できた場合，パフォーマンスは優れていたと判断する．

アルファ・ファンド (1)

無リスク利子率: $r_f = 6\%$,
市場ポートフォリオ: $\mathbb{E}[r_M] - r_f = 8\%$, $\sigma_M = 20\%$,
Alpha **ファンド**: $\beta = 0.5$, $\alpha = 1\%$, $\sigma = 15\%$.

Alpha **ファンドの** $(\sigma, \mathbb{E}[r])$ **は，**CML **を下回るが，市場ポートフォリオと** Alpha **ファンドから成るポートフォリオは，**CML **を上回る．** □

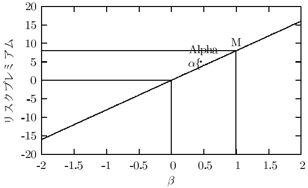

Figure: **図** 6**：**SML

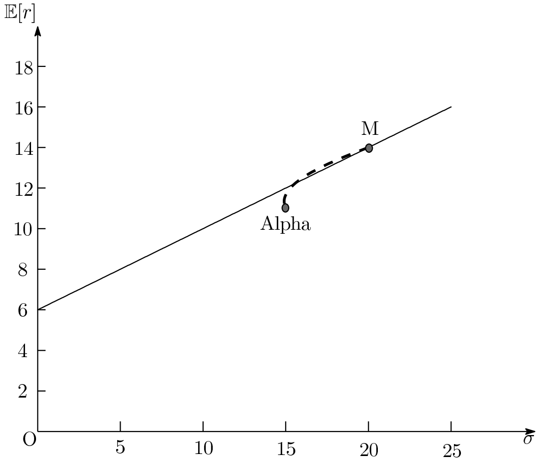

Figure: 図 7：CML

DCF モデル (1)

DCF では株価は次式で評価された．

$$\text{現在株価 } P_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{D_t}{(1+k)^t},$$

$D_t = t$ 期，期待配当，　k = リスク調整済割引率 = 要求期待収益率.

配当が成長率 g で成長するならば

$$P_0 = \frac{D_1}{k-g}.$$

ここで，k は CAPM より，

$$k = r_f + \beta(\mathbb{E}[r_M] - r_f).$$

DCF モデル (1)

Example (3)

$D_t = \$5$, $g = 10\%$, $r_f = 3\%$, $\beta = 1.5$, $\mathbb{E}[r_M] - r_f = 8\%$ とすると，

$$k = 0.03 + 1.5 \times (0.08) = 0.15.$$
$$\therefore \quad P_0 = \frac{5}{0.15 - 0.1} = \$100. \qquad \square$$

注 (1)

資本予算における資本コストも同様に計測される．

CAPMの妥当性

実証研究によると，CAPM **は修正を迫られている．**
CAPM **の結果が芳しくない理由．**

1. CAPM **は正しいが，検証に用いられる市場ポートフォリオが不完全，不適切．**
2. **市場の不完全性：**$\exists$ **借り入れコスト，空売り制約，税金，取引不可能性．**

- CAPM **の改良** $\Longrightarrow$ **多期間化，連続時間化** ICAPM (Intertemporal CAPM).
- **別の理論：**APT(Arbitarage Pricing Thoery).