ファイナンス
10. ポートフォリオ選択とリスク分散化

岩城秀樹

京都産業大学経営学部

無リスク資産

無リスク資産 (riskless asset, risk-free asset)
= 所与の期間おいて期首に完全に予測可能な収益率をもたらす資産.

Example (1)

米国ドル建て，取引期間 1 日 $\Rightarrow$ 無リスク資産 = 翌日満期の米国債.

期待収益率とリスクのトレードオフ: 無リスク資産とリスク資産組み合わせ (1)

$$
\begin{aligned}
r_f &:= \text{無リスク資産収益率}, \\
\mathbb{E}[r_s] &:= \text{リスク資産期待収益率}, \\
\sigma_s &:= \text{リスク資産リスク（収益率標準偏差）}, \\
\mathbb{E}[r] &:= \text{ポートフォリオ期待収益率}, \\
\sigma &:= \text{ポートフォリオリスク}, \\
w &:= \text{リスク資産投資比率}.
\end{aligned}
$$

リスク資産 : 無リスク資産 $= w : 1 - w$, $w \geq 0$, で組むポートフォリオを考える.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[r] &= w\mathbb{E}[r_s] + (1 - w)r_f = r_f + w\left[\mathbb{E}[r_s] - r_f\right], \\
\sigma &= w\sigma_s.
\end{aligned}
$$

上式より，w を消去すると

$$
\mathbb{E}[r] - r_f = \frac{\mathbb{E}[r_s] - r_f}{\sigma_s}\sigma. \tag{1}
$$

期待収益率とリスクのトレードオフ: 無リスク資産とリスク資産組み合わせ (2)

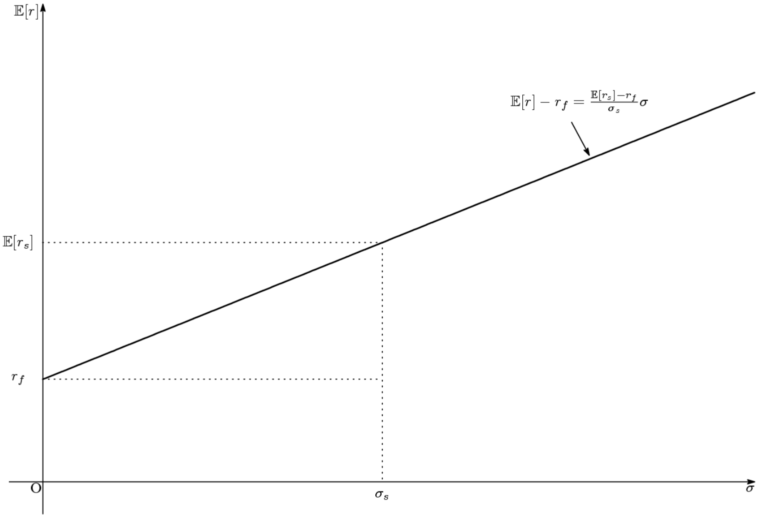

図１：ポートフォリオのリターンとリスク

無リスク資産とリスク資産の組み合わせ例 (1)

$r_f = 0.06$, $\mathbb{E}[r_s] = 0.14$, $\sigma_s = 0.2$, として無リスク資産とリスク資産とから成るポートフォリオを考える.

ポートフォリオ	w	$1 - w$	$\mathbb{E}[r]$	σ
F	0	100%	0.06	0.00
G	25%	75%	0.08	0.05
H	50%	50%	0.10	0.10
J	75%	25%	0.12	0.15
S	100%	0	0.14	0.2

リスク資産への投資比率別に見たポートフォリオの期待収益率とリスク

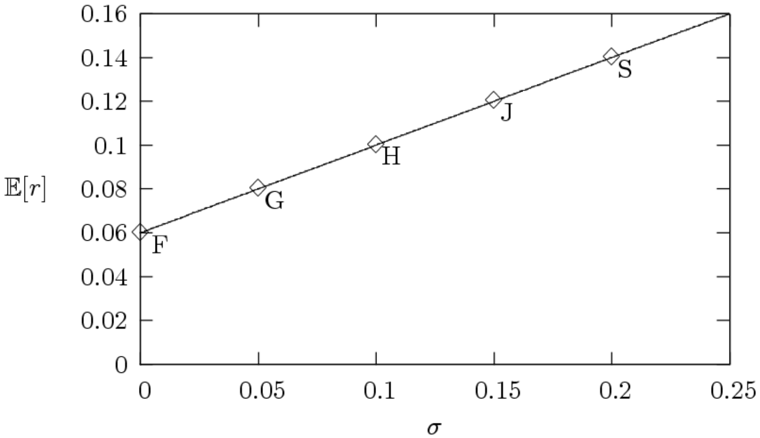

図２：無リスク資産とリスク資産の組み合わせ

効率的ポートフォリオ (efficiet portfolio)
= 同一リスクのポートフォリオの中で最も期待収益率の高くなるポートフォリオ

Example (2)

前例のリスク資産の他に，期待収益率 $= 0.08$, 収益率上旬偏差 $= 0.15$ のリスク資産（ポートフォリオ R と呼ぶ）があったとする．この場合，ポートフォリオ J が同一リスクのもとでより高い期待収益率を与えるので，ポートフォリオ J の方が効率的となる．

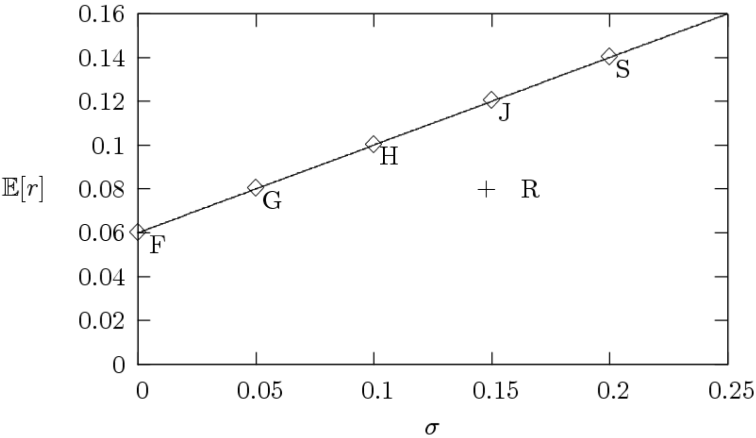

図 3：効率的ポートフォリオ

収益が無相関な資産への分散投資 (1)

命題 (1)

X_i，$i = 1, \cdots, N$, が同一の (標準偏差 σ, 期待値 μ) をもち，かつ互いに無相関ならば，$\bar{X} := \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N} X_i$ の (標準偏差 $\sigma_{\bar{X}}$, 期待値 $\mathbb{E}[\bar{X}]$) は次式を満たす．

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \qquad \mathbb{E}[\bar{X}] = \mu. \tag{2}$$

(2) より，$\sigma_{\bar{X}} \to 0$ $(N \to \infty)$.

収益が無相関な資産への分散投資 (2)

Example (3)(前回の新薬開発の例の続き)

各新薬開発の損益分布は無相関で次の確率分布に従うとする．

$$\text{損益} = \begin{cases} 0 & ;\text{開発失敗}, \quad \text{確率 } 0.5, \\ \$400,000 & ;\text{開発成功}, \quad \text{確率 } 0.5, \end{cases}$$

各新薬の
期待損益

$$\mu = 0 \times 0.5 + 400,000 \times 0.5 = \$200,000,$$

損益標準偏差

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{(0 - 200,000)^2 \times 0.5 + (400,000 - 200,000)^2 \times 0.5} \\ &= \$200,000. \end{aligned}$$

N 種類の新薬に等比率で投資した場合

$$\text{期待損益} = \$200,000, \ \text{損益標準偏差} = \frac{\$200,000}{\sqrt{N}}. \quad \square$$

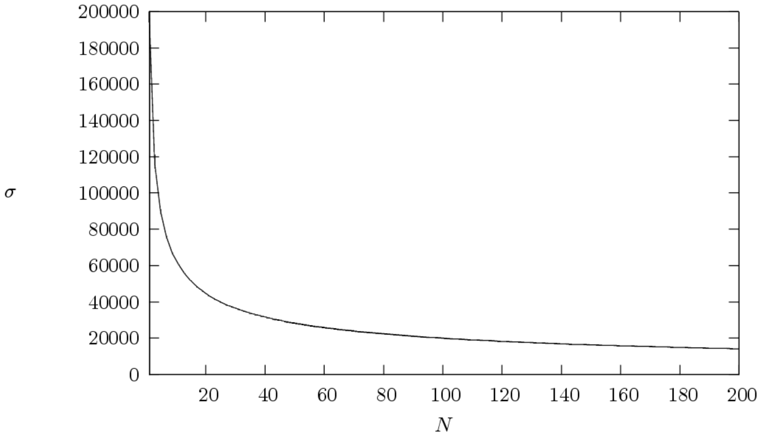

図４：無相関な資産によるリスク分散化

分散化不可能リスク

- 株式の投資収益率は経済全体のパフォーマンスに左右される．
- 経済が停滞 ⇒ 企業収益率が悪化し，株主の収益率も低下．
- 資産価格変動要因
  = 他の資産との共通要因 + 当該資産固要因．
- 共通して影響する要因によるリスクを**システマティック・リスク**あるいは**分散化不可能リスク**という．
- 一方，特定の株式のみに影響する要因によるリスクを**非システマティック・リスク**あるいは**分散化可能リスク**という．

単一指標モデル (1)

I := すべての株式の変動に影響を与える要因, r_i := 第 i 資産収益率；

$$r_i = \alpha_i + \beta_i I + \epsilon_i. \tag{3}$$

ただし，α_i と β_i を定数として

$$\mathbb{E}[\epsilon_i] = 0, \quad \mathbb{E}[\epsilon_i \epsilon_j] = 0, \quad \mathbb{E}[I\epsilon_j] = 0, \ i = 1, \cdots, N.$$

(3) で表わされるモデルを**単一指標モデル** (single index model) という．

(3) において $\sigma := \sqrt{\mathbb{V}[r]}$, $\quad r := \sum_{i=1}^{N} \frac{r_i}{N}$,

$\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \frac{\beta_i}{N} = \bar{\beta} < \infty$, $\quad \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \frac{\mathbb{V}[\epsilon_i]}{N} = \bar{\epsilon} < \infty$

とすると，

$$\sigma^2 = \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\beta_i}{N}\right)^2 \mathbb{V}[I] + \frac{1}{N}\frac{\sum_{i=1}^{N} \mathbb{V}[\epsilon_i]}{N} \to \bar{\beta}^2 \mathbb{V}[I] \quad (N \to \infty).$$

これより，単一指標モデルでは，ϵ_i の標準偏差を分散化可能リスク，$\beta_i I$ の標準偏差をシステマティック・リスクと呼ぶ．また，β_i を資産 i の**ベータ・リスク**あるいは**ベータ**と呼ぶ．

単一指標モデル (3)

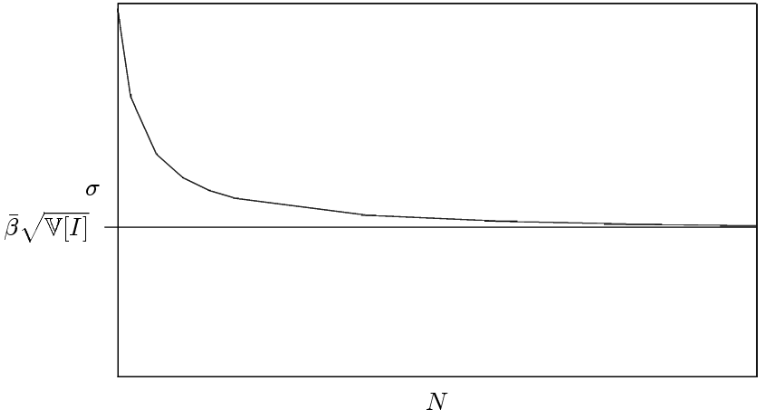

図 5：単一指標モデルによる分散化不可能リスク

２つのリスク資産から成るポートフォリオ (1)

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[r_i] &:= \text{リスク資産 } i \text{ の期待リターン},\\
\sigma_i &:= \text{リスク資産 } i \text{ の収益率標準偏差}, \quad i = 1, 2.
\end{aligned}
$$

リスク資産 1 : リスク資産 $2 = w : 1 - w$ で組むポートフォリオを考える．

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[r] &:= \text{ポートフォリオの期待リターン},\\
&= w\mathbb{E}[r_1] + (1 - w)\mathbb{E}[r_2],\\
\sigma &:= \text{ポートフォリオの収益率標準偏差}.\\
&= \left\{w^2\sigma_1^2 + (1 - w)^2\sigma_2^2 + 2w(1 - w)\rho\sigma_1\sigma_2\right\}^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

ただし，ρ = リスク資産１，２の収益率の相関係数.

Example (4)

$(\sigma_1, \mathbb{E}[r_1]) = (0.2, 0.14)$, $(\sigma_2, \mathbb{E}[r_2]) = (0.15, 0.08)$, $\rho = 0$ とする．w を変化させたときの $(\sigma, \mathbb{E}[r])$ の軌跡は図 6 のとおり．ただし，R は $w = 1$, S は $w = 0$ の点である．

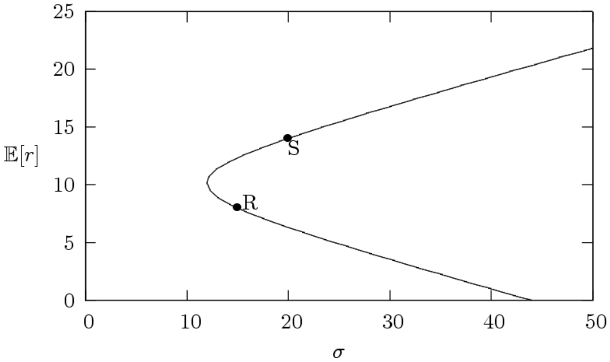

図 6：２つのリスク資産から成るポートフォリオ

注 (1)

σ は $\mathbb{E}[r]$ の凸関数.

$$\because \quad \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\mathbb{E}[r]} = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\mathbb{E}[r]} = \frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2)w-(\sigma_2^2-\rho\sigma_1\sigma_2)}{\sigma}\frac{1}{\mathbb{E}[r_1]-\mathbb{E}[r_2]}.$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}^2\sigma}{\mathrm{d}\mathbb{E}[r]^2} = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\mathbb{E}[r]}\right)}{\mathrm{d}w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\mathbb{E}[r]}$$

$$= \frac{\mathrm{d}\left(\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2)w-(\sigma_2^2-\rho\sigma_1\sigma_2)}{\sigma}\right)}{\mathrm{d}w}\frac{1}{(\mathbb{E}[r_1]-\mathbb{E}[r_2])^2}$$

$$= \frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2)\sigma^2-\left\{(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2)w-(\sigma_2^2-\rho\sigma_1\sigma_2)\right\}^2}{(\mathbb{E}[r_1]-\mathbb{E}[r_2])^2\sigma^3}$$

$$= \frac{(1-\rho^2)\sigma_1^2\sigma_2^2}{(\mathbb{E}[r_1]-\mathbb{E}[r_2])^2\sigma^3} \geq 0. \qquad \square$$

リスク資産の最適な組み合わせ (1)

- リスク資産１，２に無リスク資産を加えたポートフォリオを考える．
- 任意のリスク資産と無リスク資産から成るポートフォリオの $(\sigma, \mathbb{E}[r])$ 平面上の軌跡は半直線であった (図 1 参照)．
- よって，危険回避的投資家を想定すると，効率的なポートフォリオは，リスク資産１，２だけから成るポートフォリオの $(\sigma, \mathbb{E}[r])$ 曲線に対する切片 $(0, r_f)$ を通る接線のうち上側の接線となる（図 7 参照）．

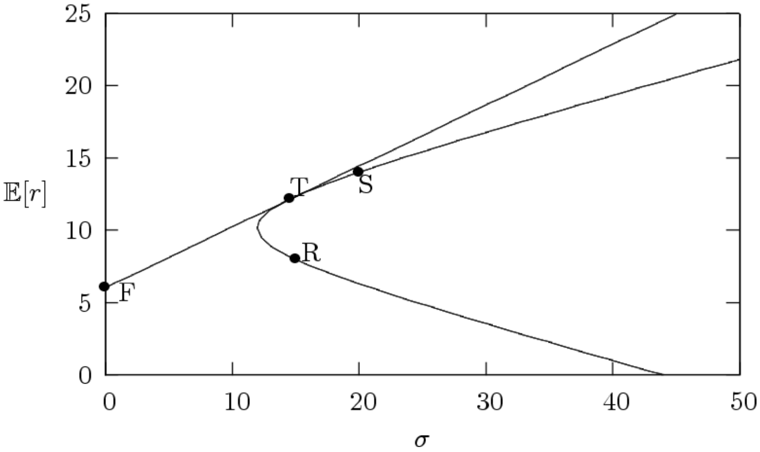

図７：２つのリスク資産と無リスク資産から成るポートフォリオ

リスク資産と無リスク資産から成るポートフォリオは，直線 (1) で与えられたから，効率的ポートフォリオは，傾き

$$\frac{\mathbb{E}[r]-r_f}{\sigma}=\frac{w\mathbb{E}[r_1]+(1-w)\mathbb{E}[r_2]}{\left\{w^2\sigma_1^2+(1-w)^2\sigma_2^2+2w(1-w)\rho\sigma_1\sigma_2\right\}^{\frac{1}{2}}} \tag{4}$$

を最大化するポートフォリオで与えられる．
(4) を w の関数として，(4) を最大化する w を求めると

$$w=w^*:=\frac{(\mathbb{E}[r_1]-r_f)\sigma_2^2-(\mathbb{E}[r_2]-r_f)\rho\sigma_1\sigma_2}{(\mathbb{E}[r_2]-r_f)(\sigma_1^2-\rho\sigma_1\sigma_2)+(\mathbb{E}[r_1]-r_f)(\sigma_2^2-\rho\sigma_1\sigma_2)}$$

図 7 の接点 T におけるリスク資産ポートフォリオは，リスク資産１と 2 を $w^*:1-w^*$ で保有するポートフォリオとなる．

多くのリスク資産から成るポートフォリオ (1)

- 任意の 2 つのリスク資産から成るポートフォリオでは，σ は $\mathbb{E}[r]$ の凸関数であった (注 1)．
- $\therefore$ 多数のリスク資産から成るポートフォリオでは，同一の $\mathbb{E}[r]$ に対して，最も σ の小さくなるポートフォリオの $(\sigma, \mathbb{E}[r])$ の軌跡は，任意の 2 つのリスク資産から成るポートフォリオの曲線 $(\sigma, \mathbb{E}[r])$ の包絡線となる．
- この包絡線を**最小分散境界**という．
- 効率的ポートフォリオは，$(\sigma, \mathbb{E}[r])$ 平面上の最小分散境界上において，最小の標準偏差を与えるポートフォリオから上に位置するポートフォリオとなる．これら効率的ポートフォリオの $(\sigma, \mathbb{E}[r])$ 平面上のグラフを**効率的フロンティア**と呼ぶ．

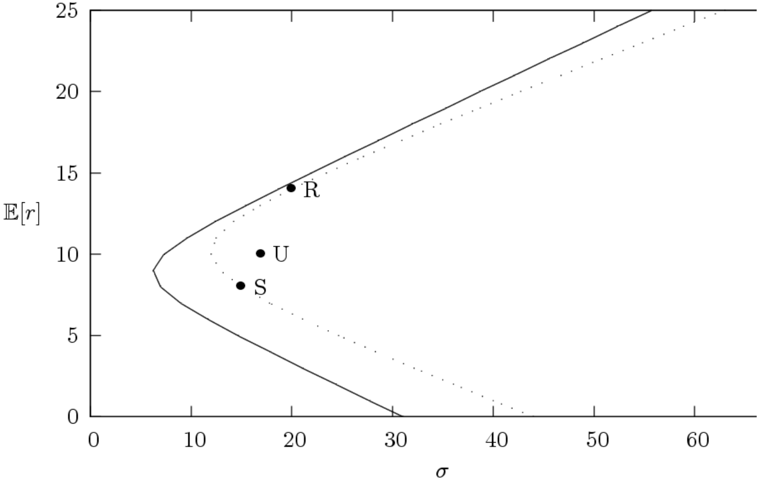

図８：最小分散境界