$$\left|7K_0\int_0^{\frac{1}{K_0}}[1-\Re\varphi_n(u)]\mathrm{d}u - 7K_0\int_0^{\frac{1}{K_0}}[1-\Re\varphi(u)]\mathrm{d}u\right| < \frac{\epsilon}{2},\quad n \geq n_0.$$

$$\begin{aligned}\therefore P_n(\mathbb{R}\setminus[-K_0,K_0]) &\leq \left|7K_0\int_0^{\frac{1}{K_0}}[1-\Re\varphi_n(u)]\mathrm{d}u\right| \\ &\leq 7\sup_{u\in\left[0,\frac{1}{K_0}\right]}|1-\Re\varphi(u)| \\ &\quad+\left|7K_0\int_0^{\frac{1}{K_0}}[1-\Re\varphi_n(u)]\mathrm{d}u - 7K_0\int_0^{\frac{1}{K_0}}[1-\Re\varphi(u)]\mathrm{d}u\right| \\ &< \epsilon,\quad n\geq n_0.\end{aligned}$$

ここで，$n=1,2,\cdots,n_0$ に対して，K_n を $P_n([-K_n,K_n])>1-\epsilon$ となるようにとり，$K:=\max\{K_0,K_1,\cdots,K_{n_0}\}$ とすれば，

$$P_n(\mathbb{R}\setminus[-K,K]) < \epsilon\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$ □

【定理 4.25 ── Lindeberg-Feller の中心極限定理】　$\langle X_k;\, k\in\mathbb{N}\rangle$ を有限な期待値 $m_k=\mathbb{E}[X_k]$ と分散 $\sigma_k^2=\mathrm{Var}[X_k]$ を持つ独立な確率変数の列とする．このとき，$c_n^2:=\sum_{k=1}^n\sigma_k^2$ として，次の **Lindeberg 条件**

$$\frac{1}{c_n^2}\sum_{k=1}^n\int_{\{x;\,|x-m_k|\geq\epsilon c_n\}}(x-m_k)^2\mathrm{d}P_{X_k}(x)\to 0\ (n\to\infty)\quad\forall\epsilon>0 \tag{4.10}$$

が成立するならば，$S_n:=\sum_{k=1}^n X_k$ として

$$T_n := \frac{S_n-\mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S_n]}}$$

は，標準正規分布に従う確率変数に法則収束する．

証明　$m_k=0$ として定理を証明すればよい[10]．これには，定理 4.15，定理 4.24，例 4.3 より，

$$\begin{aligned}\varphi_{T_n}(u) = \prod_{k=1}^n\varphi_{X_k}\left(\frac{u}{c_n}\right) &\to \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}u^2} \\ \iff \log\prod_{k=1}^n\varphi_{X_k}\left(\frac{u}{c_n}\right) &\to -\frac{1}{2}u^2\ (n\to\infty)\end{aligned}$$

を示せばよい．$\epsilon>0$ を任意として，Taylor 展開の公式より，

$$\begin{aligned}\varphi_{X_k}(u) &= \int_{|x|\geq\epsilon c_n}\mathrm{e}^{\imath ux}\mathrm{d}P_{X_k}(x)+\int_{|x|<\epsilon c_n}\mathrm{e}^{\imath ux}\mathrm{d}P_{X_k}(x) \\ &= \int_{|x|\geq\epsilon c_n}\left(1+\imath ux+\frac{1}{2}\theta_2u^2x^2\right)\mathrm{d}P_{X_k}(x) \\ &\quad+\int_{|x|<\epsilon c_n}\left(1+\imath ux-\frac{1}{2}u^2x^2+\frac{1}{6}\theta_3|u|^3|x|^3\right)\mathrm{d}P_{X_k}(x) \\ &= 1+\frac{1}{2}u^2\int_{|x|\geq\epsilon c_n}\theta_2x^2\mathrm{d}P_{X_k}(x)-\frac{1}{2}u^2\int_{|x|<\epsilon c_n}x^2\mathrm{d}P_{X_k}(x) \\ &\quad+\frac{1}{6}|u|^3\int_{|x|<\epsilon c_n}\theta_3|x|^3\mathrm{d}P_{X_k}(x)\end{aligned}$$

となる θ_i，$|\theta_i|\leq 1$，$i=2,3$ が存在する．ここで，記号の簡略化のため，

$$\begin{aligned}\alpha_{nk} &:= \int_{|x|\geq\epsilon c_n}x^2\mathrm{d}P_{X_k}(x) \\ \beta_{nk} &:= \int_{|x|<\epsilon c_n}x^2\mathrm{d}P_{X_k}(x)\leq\epsilon^2c_n^2\end{aligned}$$

とする．

$$\left|\int_{|x|\geq\epsilon c_n}\theta_2x^2\mathrm{d}P_{X_k}(x)\right|\leq\int_{|x|\geq\epsilon c_n}x^2\mathrm{d}P_{X_k}(x)$$

$$\left|\int_{|x|<\epsilon c_n}\theta_3|x|^3\mathrm{d}P_{X_k}(x)\right|\leq\int_{|x|<\epsilon c_n}|x|^3\mathrm{d}P_{X_k}(x)\leq\int_{|x|<\epsilon c_n}\epsilon c_nx^2\mathrm{d}P_{X_k}(x)$$

より，

$$\begin{aligned}&\int_{|x|\geq\epsilon c_n}\theta_2x^2\mathrm{d}P_{X_k}(x)=\theta_2'\alpha_{nk} \\ &\int_{|x|<\epsilon c_n}\theta_3|x|^3\mathrm{d}P_{X_k}(x)=\theta_3'\epsilon c_n\beta_{nk},\quad|\theta_2'|\leq1,\quad|\theta_3'|\leq1\end{aligned}$$

[10] ∵ $\mathbb{E}[X_k]=0$ としたとき，$\langle m_k;\, k\in\mathbb{N}\rangle$ を任意の実数列として，$Y_k:=X_k+m_k$ とおくと，$\mathbb{E}[Y_k]=m_k$ であり，

$$\frac{\sum_{k=1}^nX_k-\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^nX_k\right]}{\sqrt{\mathrm{Var}\left[\sum_{k=1}^nX_k\right]}}=\frac{\sum_{k=1}^nY_k-\mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^nY_k\right]}{\sqrt{\mathrm{Var}\left[\sum_{k=1}^nY_k\right]}}$$

となる．

となる θ_2', θ_3' が存在する.

$$\therefore \varphi_{X_k}(u) = 1 + \frac{1}{2}u^2\theta_2'\alpha_{nk} - \frac{1}{2}u^2\beta_{nk} + \frac{1}{6}|u|^3\theta_3'\epsilon c_n\beta_{nk}.$$

$$\therefore \varphi_{X_k}\left(\frac{u}{c_n}\right) = 1 + \gamma_{nk}$$

$$\gamma_{nk} := \frac{1}{2}u^2\theta_2'\frac{\alpha_{nk}}{c_n^2} - \frac{1}{2}u^2\frac{\beta_{nk}}{c_n^2} + \frac{1}{6}|u|^3\theta_3'\epsilon\frac{\beta_{nk}}{c_n^2}.$$

式 (4.10) より,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_{nk}}{c_n^2} \to 0 \ (n\to\infty). \tag{4.11}$$

よって, $\sum_{k=1}^{n}(\alpha_{nk}+\beta_{nk}) \equiv c_n^2$ であるから,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\beta_{nk}}{c_n^2} \to 1 \ (n\to\infty). \tag{4.12}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n}\gamma_{nk} \to -\frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{6}|u|^3\theta_3'\epsilon \ (n\to\infty). \tag{4.13}$$

さらに, log に対する Taylor 展開の公式の適用により, ある $|\theta_1| \le 1$ に対して,

$$\log\prod_{k=1}^{n}\varphi_{X_k}\left(\frac{u}{c_n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\log\varphi_{X_k}\left(\frac{u}{c_n}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\gamma_{nk} + \theta_1|\gamma_{nk}|^2\right)$$

となることに注意すると,

$$\begin{aligned}
&\left|\log\prod_{k=1}^{n}\varphi_{X_k}\left(\frac{u}{c_n}\right) + \frac{1}{2}u^2\right| \\
&\quad \le \left|\sum_{k=1}^{n}\gamma_{nk} + \frac{1}{2}u^2\right| + |\theta_1|\sum_{k=1}^{n}|\gamma_{nk}|^2 \\
&\quad \le \left|\sum_{k=1}^{n}\gamma_{nk} + \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{6}|u|^3\theta_3'\epsilon\right| + \sum_{k=1}^{n}|\gamma_{nk}|^2 + |u|^3|\theta_3'|\epsilon.
\end{aligned}$$

上式, 最右辺の第1項は, 式 (4.13) よりゼロに収束し, $|u|^3|\theta_3'|\epsilon \to 0 \ (\epsilon\to 0)$ となる. したがって, あとは,

$$\sum_{k=1}^{n}|\gamma_{nk}|^2 \to 0 \ (n\to 0)$$

∞

を示せばよい.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}|\gamma_{nk}|^2 &\le \max_{k=1,\cdots,n}|\gamma_{nk}|\sum_{k=1}^{n}|\gamma_{nk}| \\
&\le \left(\frac{1}{2}u^2\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_{nk}}{c_n^2} + \frac{1}{2}u^2\epsilon^2 + \frac{1}{6}|u|^3\epsilon^3\right) \\
&\quad \times\left(\frac{1}{2}u^2\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_{nk}}{c_n^2} + \frac{1}{2}u^2\sum_{k=1}^{n}\frac{\beta_{nk}}{c_n^2} + \frac{1}{6}|u|^3\epsilon\sum_{k=1}^{n}\frac{\beta_{nk}}{c_n^2}\right).
\end{aligned}$$

したがって, 式 (4.11) より, $\epsilon \to 0$ とすれば,

$$\sum_{k=1}^{n}|\gamma_{nk}|^2 \to 0 \ (n\to 0)$$

∞

となる. □

【定理 4.26】　次の①〜⑤は, 定理 4.25 の Lindeberg 条件 (4.10) が成立するための十分条件を与える.

① **Liapounov 条件**

$$\exists h\in\mathbb{N};\ \ h\ge 3,\ \ \frac{1}{c_n^h}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left[|X_k-m_k|^h\right] \to 0 \ (n\to\infty)$$

② X_k, $k\in\mathbb{N}$ は共通の確率分布 P を持ち, 平均 $\overline{m}$ と分散 σ^2 が存在する

③ $\exists C\in\mathbb{R}^+;\ |X_k-m_k| \le C\ \ \forall k\in\mathbb{N}$, かつ $c_n\to\infty\,(n\to\infty)$

④ $\exists C\in\mathbb{R}^+;\ |X_k| \le C\ \ \forall k\in\mathbb{N}$, かつ $c_n\to\infty\,(n\to\infty)$

⑤ $\forall\epsilon>0,\ \exists n_0\in\mathbb{N};\ n\ge n_0 \Longrightarrow \max_{k\in\{1,2,\cdots,n\}}|X_k-m_k| \le \epsilon c_n$

μL

証明　①と②を証明し, ③〜⑤の証明は練習問題とする.

① $|x-m_k| \ge \epsilon c_n \Longrightarrow \frac{|x-m_k|^h}{(\epsilon c_n)^h} \ge 1$,　$h\ge 3$ より

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{c_n^2}\sum_{k=1}^{n}\int_{\{x;\,|x-m_k|\ge\epsilon c_n\}}(x-m_k)^2\mathrm{d}P_{X_k}(x) \\
&\quad \le \frac{1}{\epsilon^{h-2}c_n^h}\sum_{k=1}^{n}\int_{\{x;\,|x-m_k|\ge\epsilon c_n\}}|x-m_k|^h\mathrm{d}P_{X_k}(x) \\
&\quad \le \frac{1}{\epsilon^{h-2}c_n^h}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left[|X_k-m_k|^h\right] \to 0 \ (n\to\infty).
\end{aligned}$$