

4 単位根の検定——DF テスト

4.1 単位根検定

ARIMA(p, d, q) を、ラグ演算子 L を用いて

$$\phi(L)\Delta^d X_t = \theta(L)\varepsilon_t \quad (13.17)$$

と表そう。ここで

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p$$

$$\theta(L) = 1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q$$

$$\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$$

とし、 $\phi(z)=0$ の p 個のすべての根の絶対値は単位円の外にあり (因果性)、 $\theta(z)=0$ の q 個のすべての根の絶対値も単位円の外にある (反転可能性) ものとする。

$$\Delta^d X_t = (1-L)^d X_t = A(L) X_t$$

とおくと、 $X_t \sim I(1)$ ($d=1$) のとき $A(z)=1-z=0$ は単位根 unit root $z=1$ を1個もち、 $X_t \sim I(2)$ ($d=2$) のとき $A(z)=(1-z)^2=0$ は単位根 $z=1$ を2個もち、このことから X の和分の次数 d の検定は単位根検定ともよばれる。

いま、簡単な次のモデル

$$X_t = \rho X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (13.18)$$

$$\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$$

を考えよう。このモデルを

$$\Delta X_t = \delta X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (13.19)$$

$$\delta = \rho - 1$$

と書き換えると、(13.18) 式で、 $H_0: \rho=1$ 、すなわち単位根を1個もつという帰無仮説を $H_1: |\rho| < 1$ という対立仮説に対して検定することは、(13.19) 式における

$$H_0: \delta=0$$

$$H_1: -2 < \delta < 0$$

と同じである。

(13.19) 式で d を δ の OLSE とすると $H_0: \delta=0$ の検定統計量

$$\frac{d}{S_d}$$

が H_0 のもとで t 分布をすれば通常の t 検定を行えばよい。しかしこの単位根検定のための統計量は t 分布をしない。

さらに単位根検定をするとき、通常次の3つのモデルがあり、検定統計量がどのような分布をするかは DGP によって異なってくる。単位根検定において t 検定に代わる検定が Dickey and Fuller [1979] によって与えられた。DF テストとよばれている検定である。

4.2 DF 検定の3つのモデル

X の単位根検定をするとき次の3つのモデルがある。

$$\Delta X_t = \delta X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (13.20)$$

$$\Delta X_t = \mu + \delta X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (13.21)$$

$$\Delta X_t = \mu + at + \delta X_{t-1} + \varepsilon_t \quad (13.22)$$

どのモデルを用いるにせよ、検定する仮説は

$$H_0: \delta=0, H_1: -2 < \delta < 0$$

である。 H_1 を以下 $H_1: \delta < 0$ と表す。 $\delta=0$ のときこの3種類のモデルはそれぞれ

$$X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$X_t = \mu + X_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$X_t = \mu + at + X_{t-1} + \varepsilon_t$$

となる。あるいは初期値を X_0 とすると、それぞれ次のようにランダム・ウォーク、趨勢 μt をもつランダム・ウォーク、趨勢 $(\mu + \frac{a}{2})t + \frac{a}{2}t^2$ をもつランダム・ウォークになる。

$$X_t = X_0 + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_t$$

$$X_t = X_0 + \mu t + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_t$$

$$X_t = X_0 + \mu t + a \frac{t(t+1)}{2} + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_t$$

$H_0: \delta=0$ を検定するための検定統計量

$$t = \frac{d}{S_d}$$

の、 $n \rightarrow \infty$ のときの極限分布がどうなるかは DGP(X を発生させている真のプロセス) とモデルによって異なる。結果のみ示す。証明は Hamilton [1994] を参照されたい。以下、 $W(r)$ は標準ブラウン運動である。

(1) $\hat{\tau}$ 分布

DGP: $X_t = X_{t-1} + u_t$

$u_t \sim \text{iid}(0, \sigma_u^2)$

モデル: $\Delta X_t = \delta X_{t-1} + \varepsilon_t$

$\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma_\varepsilon^2)$

仮説: $H_0: \delta=0, H_1: \delta < 0$

検定統計量: $t = \frac{d}{s_d}$

$d = (13.20)$ 式の δ の最小 2 乗推定量

$s_d = (13.20)$ 式の d の標準偏差の推定量

このとき t は次の極限分布をもつ。

$$t \xrightarrow{d} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\{[W(1)]^2 - 1\}}{\left\{\int_0^1 [W(r)]^2 dr\right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (13.23)$$

この (13.23) 式の極限分布は $\hat{\tau}$ 分布とよばれる。

(2) $\hat{\tau}_\mu$ 分布

DGP: $X_t = X_{t-1} + u_t$

$u_t \sim \text{iid}(0, \sigma_u^2)$

モデル: $\Delta X_t = \mu + \delta X_{t-1} + \varepsilon_t, \mu \neq 0$

$\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma_\varepsilon^2)$

仮説: $H_0: \delta=0, H_1: \delta < 0$

検定統計量: $t = \frac{d}{s_d}$

$d = (13.21)$ 式の δ の最小 2 乗推定量

$s_d = (13.21)$ 式の d の標準偏差の推定量

このとき t は次の極限分布をもつ。

$$t \xrightarrow{d} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\{[W(1)]^2 - 1\} - W(1) \int_0^1 W(r) dr}{\left\{\int_0^1 [W(r)]^2 dr - \left[\int_0^1 W(r) dr\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (13.24)$$

この (13.24) 式の極限分布は $\hat{\tau}_\mu$ 分布とよばれる。

(3) $\hat{\tau}_\tau$ 分布

DGP: $X_t = \mu + X_{t-1} + u_t, \mu$ は 0 でもよい

$u_t \sim \text{iid}(0, \sigma_u^2)$

モデル: $\Delta X_t = \mu + at + \delta X_{t-1} + \varepsilon_t$

$\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma_\varepsilon^2)$

仮説: $H_0: \delta=0, H_1: \delta < 0$

検定統計量: $t = \frac{d}{s_d}$

$d = (13.22)$ 式の δ の最小 2 乗推定量

$s_d = (13.22)$ 式の d の標準偏差の推定量

このとき t は次の極限分布をもつ。

$$t \xrightarrow{d} \frac{\frac{1}{2}\{[W(1)]^2 - 1\} + B}{D^{\frac{1}{2}}} \quad (13.25)$$

ここで

$$\begin{aligned} B &= 12 \left\{ \int_0^1 rW(r) dr - \frac{1}{2} \int_0^1 W(r) dr \right\} \\ &\quad \times \left\{ \int_0^1 W(r) dr - \frac{1}{2} W(1) \right\} - W(1) \int_0^1 W(r) dr \\ D &= \int_0^1 [W(r)]^2 dr - 12 \left[\int_0^1 rW(r) dr \right]^2 \\ &\quad + 12 \int_0^1 W(r) dr \int_0^1 rW(r) dr - 4 \left[\int_0^1 W(r) dr \right]^2 \end{aligned}$$

この (13.25) 式の極限分布は $\hat{\tau}_\tau$ 分布とよばれる。

このように $H_0: \delta=0$ の検定統計量「 t 」は、 H_0 が正しいとき

1. t 分布をしない
2. 有限標本のときの「 t 」の標本分布はわからない
3. $n \rightarrow \infty$ のときの「 t 」の極限分布のみわかっているが、この極限分布も

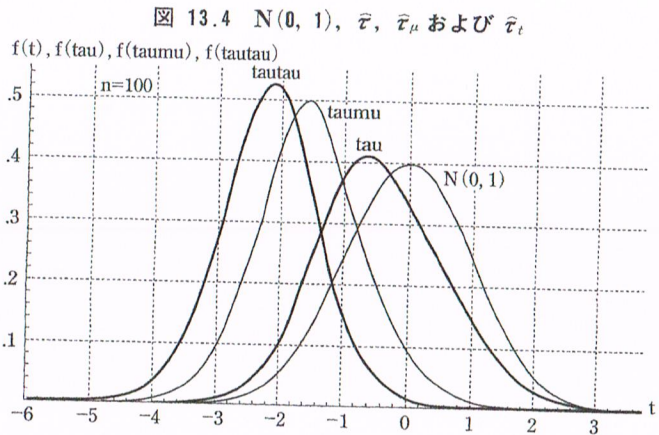


図 13.4 $N(0, 1)$, $\hat{\tau}$, $\hat{\tau}_\mu$ および $\hat{\tau}_t$

DGP によって異なる

という点に注意しよう。

(4) モデル (13.21) 式の「 t 」は、もし DGP が $H_0: \delta=0$ が正しいときのモデルと同じ

$$X_t = \mu + X_{t-1} + u_t$$

のとき、極限分布は $N(0, 1)$ になる。

(5) モデル (13.22) 式の「 t 」は、もし DGP が $H_0: \delta=0$ のときのモデルと同じ

$$X_t = \mu + at + \delta X_{t-1} + u_t, \mu \neq 0, a \neq 0$$

のときには、極限分布はやはり $N(0, 1)$ になる。

図 13.4 に $N(0, 1)$ と $n=100$ のときの $\hat{\tau}$, $\hat{\tau}_\mu$, $\hat{\tau}_t$ の分布が示されている。 $n=100$ であるから t 分布も $N(0, 1)$ とほとんど同じである。図からわかるように $\hat{\tau}_t$, $\hat{\tau}_\mu$, $\hat{\tau}$ の順で $N(0, 1)$ より左のほうにズレている。したがって、たとえば左片側 5% 点は $N(0, 1)$ が -1.645 , $t(100)$ が -1.660 , MacKinnon [1991] の表から計算すると $\hat{\tau}$ が -1.943 , $\hat{\tau}_\mu$ が -2.890 , $\hat{\tau}_t$ が -3.455 となり、 t 検定の臨界点とは大きく異なる。

有限標本のとき、 $\hat{\tau}$, $\hat{\tau}_\mu$, $\hat{\tau}_t$ 分布の臨界点は、モンテ・カルロ実験によって求めざるを得ない。Fuller [1996] の Table 10.A.2, 付表 7 の MacKinnon [1991] の表の臨界点はいずれもモンテ・カルロ実験から得られた点である。この 2 つの表は蓑谷 [2003] にそれぞれ付表 6, 付表 7 として収められている。

表 13.2 モンテ・カルロ実験による $\hat{\tau}$, $\hat{\tau}_\mu$ および $\hat{\tau}_t$ の臨界点 ($n=100$)

	1%	5%	10%
1 tau	-2.630 (-2.596)	-1.938 (-1.944)	-1.611 (-1.612)
2 tau mu	-3.489 (-3.487)	-2.888 (-2.886)	-2.574 (-2.581)
3 tau tau	-4.079	-3.464	-3.153
4 tau tau	-4.072 (-4.043)	-3.459 (-3.451)	-3.153 (-3.152)
5 tau mu → $N(0, 1)$	-2.423	-1.695	-1.317
6 tau tau → $N(0, 1)$	-3.557	-2.876	-2.515
7 $N(0, 1)$	-2.326	-1.645	-1.282

(注) (1) ()内は TSP から得られる臨界点。
 (2) 3 の tau tau の DGP は定数項が 0 でない。
 (3) 4 の tau tau の DGP は定数項 0。

$\hat{\tau}$, $\hat{\tau}_\mu$, $\hat{\tau}_t$ の臨界点を求めるモンテ・カルロ実験を示そう。

例 13.3 臨界点を求めるモンテ・カルロ実験 (ファイル EX1303)

前述(1)から(5)の DGP とモデルのもとで $n=100$ とし、30,000 回のモンテ・カルロ実験によって $\hat{\tau}$, $\hat{\tau}_\mu$ および $\hat{\tau}_t$ の臨界点を求め、結果を表 13.2 に示した。ただし DGP の $\sigma_u^2=1$, 表 13.2 の 3, 4 の $\hat{\tau}_t$ は DGP の $\mu \neq 0$, $\mu = 0$ のケースである。表の () 内は TSP から得られる臨界点である。TSP の臨界点は MacKinnon のモンテ・カルロ実験によっている。表の臨界点も TSP のそれとともにモンテ・カルロ実験にもとづいており、どちらかが正しいということではない。大体の目安として判断すればよい。

表の 5, 6 は前述の DGP とモデルのそれぞれ(4)と(5)に対応している。 $n=100$ で $\hat{\tau}_\mu$ はかなり $N(0, 1)$ に近づいているが、 $\hat{\tau}_t$ の $N(0, 1)$ への収束は緩慢であり、 $n=100$ ぐらいでは $N(0, 1)$ との乖離は大きい。実験回数 30,000 回であるが、それほど計算に時間は要しない。 $n=3,000$ で(5)の DGP とモデルで $\hat{\tau}_t$ の $N(0, 1)$ への近づき方を計算してみるとよい。

単位根検定のモデルにおいて誤差項 ε_t は iid(0, σ_ε^2) と仮定されている。しかし実際に経済時系列データを用いて単位根検定をするとき、(13.20), (13.21), (13.22) 式のどのモデルにおいても、誤差項は自己相関、とくに正の自己相関をしている可能性が高い。このような場合には次の ADF テスト (augmented Dickey-Fuller テスト) によって単位根を行う。

5 ADF テスト

単位根検定において

$$X_t = \theta_1 X_{t-1} + \varepsilon_t \tag{13.26}$$

$$(1 - \phi L) \varepsilon_t = v_t \sim \text{iid}(0, \sigma_v^2) \tag{13.27}$$

$$|\phi| < 1$$

のモデルを考えよう。すなわち誤差項 ε_t は AR(1) のケースである。(13.26), (13.27) 式より

$$(1 - \theta_1 L) X_t = \varepsilon_t = (1 - \phi L)^{-1} v_t$$

したがって

$$(1 - \phi L)(1 - \theta_1 L) X_t = v_t$$

が得られる。上式は

$$[1 - (\phi + \theta_1)L + \phi\theta_1 L^2] X_t = v_t$$

となるから

$$\phi_1 = \phi + \theta_1$$

$$\phi_2 = -\phi\theta_1$$

とおくと

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2) X_t = v_t \tag{13.28}$$

あるいは

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + v_t \tag{13.29}$$

と、 X の AR(2) として表すことができる。

一般に、誤差項 ε が $p-1$ 次の自己相関 AR($p-1$) に従うとき、(13.26) 式は X の p 次の自己回帰モデル AR(p) として表すことができる。

しかし単位根検定において p をいくつにすれば誤差項が iid (あるいは少なくとも white noise) になるのかわからない。

いま、 X に AR(p) を仮定しよう。これは (13.26) 式の誤差項 ε が AR($p-1$) に従うという仮定と同じである。このとき

$$X_t = \phi_1 X_{t-1} + \phi_2 X_{t-2} + \dots + \phi_p X_{t-p} + v_t \tag{13.30}$$

$$v_t \sim \text{iid}(0, \sigma_v^2)$$

と表すことができる。

(13.30) 式は

$$(1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p) X_t = v_t \tag{13.31}$$

と表すこともできる。そして

$$\begin{aligned} &1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p \\ &= 1 - [(\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p) - (\phi_2 + \phi_3 + \dots + \phi_p)]L \\ &\quad - [-(\phi_3 + \dots + \phi_p) + (\phi_2 + \phi_3 + \dots + \phi_p)]L^2 \\ &\quad - \dots - [-\phi_p + (\phi_{p-1} + \phi_p)]L^{p-1} - \phi_p L^p \end{aligned} \tag{13.32}$$

と書き直し

$$\begin{aligned} \rho &= \phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p \\ \zeta_j &= -[\phi_{j+1} + \phi_{j+2} + \dots + \phi_p] \\ &j = 1, 2, \dots, p-1 \end{aligned} \tag{13.33}$$

とおくと、(13.32) 式は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} &1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p \\ &= 1 - (\rho + \zeta_1)L - (\zeta_2 - \zeta_1)L^2 - (\zeta_3 - \zeta_2)L^3 - \dots \\ &\quad - (\zeta_{p-1} - \zeta_{p-2})L^{p-1} - (-\zeta_{p-1})L^p \\ &= 1 - \rho L - \zeta_1 L + \zeta_1 L^2 - \zeta_2 L^2 + \zeta_2 L^3 - \dots - \zeta_{p-1} L^{p-1} + \zeta_{p-1} L^p \\ &= 1 - \rho L - \zeta_1 L(1-L) - \zeta_2 L^2(1-L) - \dots - \zeta_{p-1} L^{p-1}(1-L) \\ &= (1 - \rho L) - (\zeta_1 L + \zeta_2 L^2 + \dots + \zeta_{p-1} L^{p-1})(1-L) \end{aligned}$$

この結果を用いると、(13.31) 式は

$$\{(1 - \rho L) - (\zeta_1 L + \zeta_2 L^2 + \dots + \zeta_{p-1} L^{p-1})(1-L)\} X_t = v_t \tag{13.34}$$

すなわち

$$X_t = \rho X_{t-1} + \zeta_1 \Delta X_{t-1} + \zeta_2 \Delta X_{t-2} + \dots + \zeta_{p-1} \Delta X_{t-(p-1)} + v_t \tag{13.35}$$

と表すことができる。

あるいは (13.35) 式は

$$\Delta X_t = \delta X_{t-1} + \sum_{j=1}^{p-1} \zeta_j \Delta X_{t-j} + v_t \tag{13.36}$$

と表すこともできる。ここで

$$\delta = \rho - 1 \quad (13.37)$$

である。

(13.26), (13.27) 式の例のとき

$$\begin{aligned} \delta &= \phi_1 + \phi_2 - 1 = \phi + \theta_1 - \phi\theta_1 - 1 \\ &= (1 - \phi)(\theta_1 - 1) \\ \zeta_1 &= -\phi_2 = \phi\theta_1 \end{aligned}$$

となる。

さて、(13.35) 式において $\delta = 0$ のとき、 $\rho = 1$ である。このとき (13.34) 式より

$$\begin{aligned} \phi(L) &= 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p \\ &= (1 - \zeta_1 L - \zeta_2 L^2 - \dots - \zeta_{p-1} L^{p-1})(1 - L) \end{aligned} \quad (13.38)$$

となるから、 $\phi(L) = 0$ は単位根を 1 つもつ。他の $p-1$ 個の根は安定条件を満たすとすれば、(13.38) 式の

$$1 - \zeta_1 L - \zeta_2 L^2 - \dots - \zeta_{p-1} L^{p-1} = 0$$

の $p-1$ 個の根はすべて絶対値が 1 より大である。このとき、この L の ($p-1$) 次多項式は反転可能である。(13.30) 式は

$$\phi(L) X_t = (1 - \zeta_1 L - \zeta_2 L^2 - \dots - \zeta_{p-1} L^{p-1})(1 - L) X_t = v_t$$

と表すことができ、 $(1 - L) X_t = \Delta X_t$ であるから、この反転可能性より

$$\Delta X_t = (1 - \zeta_1 L - \zeta_2 L^2 - \dots - \zeta_{p-1} L^{p-1})^{-1} v_t$$

と表すことができる。上式 () 内の L の ($p-1$) 次多項式は安定条件を満たすから、このとき

$$\Delta X_t \sim I(0)$$

である。

次に、(13.35) 式で $\delta < 0$ 、すなわち $\rho < 1$ のケースを考えよう。

このとき、(13.33) 式より

$$\rho = \phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p < 1$$

となる。

$\sum_{j=1}^p \phi_j < 1$ は $\phi(L) X_t = \varepsilon_t$ が安定であるための必要・十分条件ではないが

$$\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \phi_2 L^2 - \dots - \phi_p L^p$$

$$= (1 - \rho L) \prod_{j=1}^{p-1} (1 - \lambda_j L) \quad (13.39)$$

と表すと

$$\phi(1) = (1 - \rho) \prod_{j=1}^{p-1} (1 - \lambda_j) = -\delta \prod_{j=1}^{p-1} (1 - \lambda_j)$$

であるから

$$\prod_{j=1}^{p-1} (1 - \lambda_j L) = 0$$

の根 $|1/\lambda_j| > 1$, $j=1, \dots, p-1$ で安定条件を満たすならば、 $\prod_{j=1}^{p-1} (1 - \lambda_j) > 0$ であるから、 $\delta < 0$ ならば $\phi(1) = 1 - \sum_{j=1}^p \phi_j > 0$ すなわち $\rho < 1$ となり、 $\phi(L) = 0$ のすべての根が安定条件を満たす。このとき

$$X_t = \phi(L)^{-1} v_t \sim I(0)$$

である。結局 (13.36) 式は、(13.26) 式の ε が $AR(p-1)$ のとき、DF テスト

$$\Delta X_t = \delta X_{t-1} + v$$

に $\Delta X_{t-1}, \dots, \Delta X_{t-(p-1)}$ の $p-1$ 個の説明変数を追加すれば、誤差項が iid となることを示している。

したがって (13.36) 式において

$$H_0: \delta = 0, H_1: \delta < 0$$

の仮説検定は、 $H_0: X_t \sim I(1)$, $H_1: X_t \sim I(0)$ を意味する。そして (13.36) 式の $H_0: \delta = 0$ の検定統計量

$$t = \frac{d}{s_d}$$

の極限分布は $\bar{\tau}$ 分布に等しくなる (証明は Hamilton [1994] をみよ、 $p=2$ のケースは Bierens [2001] にある)。これは ADF テストとよばれる。

(13.21) 式、(13.22) 式のモデルに対する ADF テストも、ADF テストの $H_0: \delta = 0$ の検定統計量の極限分布はそれぞれ $\bar{\tau}_\mu$, $\bar{\tau}_\tau$ 分布に等しい。

結局、DF テストも ADF テストも同じ検定統計量と臨界点を用いることができる。問題は p の決定である。

DF, ADF テストによって X の単位根検定の手続きは次のようなステップで行う。(13.20) 式のモデルを例とするが、他のモデルの場合も考え方は同じである。

第1ステップ

$$\Delta X_t = \delta X_{t-1} + \varepsilon_t$$

を推定する。DW比で判断してAR(1)であればADFテストのモデル

$$\Delta X_t = \delta X_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \delta_i \Delta X_{t-i}$$

を $p=2, 3, 4, 5, \dots$ と動かし、DW比で判断して自己相関のない最小の p のケースを採用し

$$H_0: \delta=0, H_1: \delta < 0$$

を \bar{t} 分布を用いて検定する。

H_0 が棄却され、 H_1 を支持する証拠が得られれば $X \sim I(0)$ である。 H_0 を棄却できなかった場合には、 $X \sim I(1)$ が立証されたわけではない。 $X \sim I(2)$ であるかもしれない。もし $X \sim I(1)$ ならば $\Delta X \sim I(0)$ であるから、 $\Delta X \sim I(0)$ かどうかを検定するため次のステップ2へ進む。

第2ステップ

$$\Delta^2 X_t = \delta \Delta X_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$H_0: \delta=0 (\Delta X_t \sim I(1))$$

$$H_1: \delta < 0 (\Delta X_t \sim I(0))$$

あるいは自己相関があれば次のモデル

$$\Delta^2 X_t = \delta \Delta X_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \delta_i \Delta^2 X_{t-i} + \varepsilon_t$$

を推定し、 H_0 を \bar{t} 分布を用いて検定する。

H_0 が棄却され、 H_1 を支持する証拠が得られれば $\Delta X_t \sim I(0)$ 、すなわち $X \sim I(1)$ である。もし H_0 が棄却されなければ、 $\Delta X_t \sim I(1)$ と矛盾しない、といて間違いではないが、 $\Delta X_t \sim I(1)$ が立証されたわけではない。 $\Delta X_t \sim I(1)$ ならば $\Delta^2 X_t \sim I(0)$ となるから、 $\Delta^2 X_t \sim I(0)$ を対立仮説とする次のステップへ進む。

第3ステップ

$$\Delta^3 X_t = \delta \Delta^2 X_{t-1} + \varepsilon_t$$

あるいは

$$\Delta^3 X_t = \delta \Delta^2 X_{t-1} + \sum_{i=1}^{p-1} \delta_i \Delta^3 X_{t-i} + \varepsilon_t$$

のモデルで

$$H_0: \delta=0 (\Delta^2 X_t \sim I(1))$$

$$H_1: \delta < 0 (\Delta^2 X_t \sim I(0))$$

を \bar{t} 分布によって検定する。

H_0 が棄却されれば、 $\Delta^2 X_t \sim I(0)$ 、すなわち $X \sim I(2)$ である。 H_0 が棄却されなければ $\Delta^3 X_t \sim I(0)$ を対立仮説とする第4ステップへ進む。

6 F値タイプの検定

6.1 3つのF値タイプ

「 t 値」ではなく、「 F 値」によって単位根の検定が行われる場合がある。

$$\text{DGP: } Y_t = Y_{t-1} + u_t$$

$$u_t \sim \text{iid}(0, \sigma_u^2)$$

モデルを

$$\Delta Y_t = \mu + \delta Y_{t-1} + \varepsilon_t \tag{13.40}$$

$$\varepsilon_t \sim \text{iid}(0, \sigma^2)$$

と定式化したとき

$$H_0: \mu = \delta = 0$$

が正しいとき、 $\Delta Y_t = \varepsilon_t \sim I(0)$ である。 H_0 の検定は「 F 値」を用いる検定になる。(13.40) 式のOLSの残差平方和を $SSRU$ 、 $H_0: \mu = \delta = 0$ の制約のもとでの(13.40)式、すなわち

$$\Delta Y_t = \varepsilon_t$$

の残差平方和を $SSRR = \sum (\Delta Y_t)^2$ とすると、検定統計量は

$$F_1 = \frac{(SSRR - SSRU)/2}{SSRU/(n-2)} \tag{13.41}$$

であるが、この F_1 の分布は H_0 のもとで $F(2, n-2)$ にはならない。Dickey and Fuller [1981] は F_1 の極限分布を Φ_1 とよび、有限標本における臨界点をやはりモンテ・カルロ実験で求めている。養谷 [2003] にもこの表は収められている。ここで n は (13.40) 式の標本の大きさである。

たとえば図13.5は $n=60$ のとき $F(2, 58)$ と F_1 の分布 Φ_1 であり、 $F(2, 58)$ とはまったく異なっていることがわかる。

$$\text{DGP: } Y_t = Y_{t-1} + u_t$$