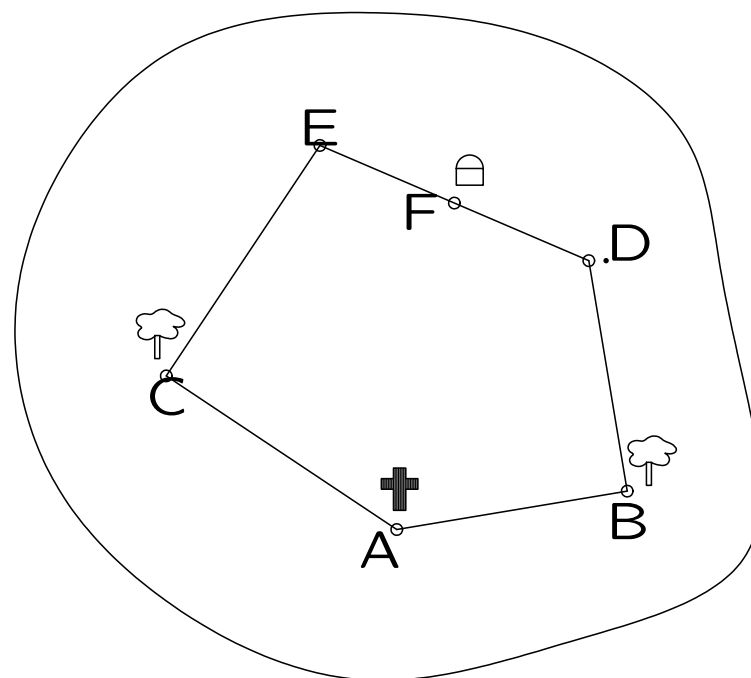


複素数を使って解くパズルです。物理学者のガモフが考えた問題です.



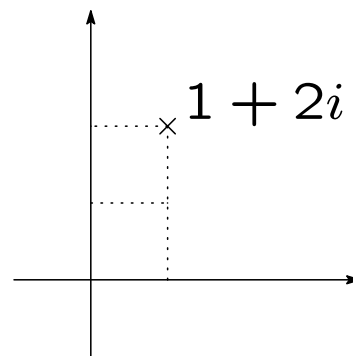
海賊フック船長は南の海の無人島に宝物を埋めました。その島には十字架と2本の木がありました。十字架から木Bに向かって歩き、木Bで左へ90度向きを変え、十字架から木Bまでと同じ距離を歩きます。そこをD地点とします。木Cについても同じことをして、E地点を得ます。木Cで右へ向きを変える点だけが異なるだけです。そして、DとEの真ん中に宝を埋めました。

ある年の夏、台風が十字架を吹き飛ばしてしまいました。フック船長の宝物をあなたは見つけることができますか？

2乗して-1になる実数はありません。2乗して-1になる数は i で表され、虚数単位とよばれます。 i は17世紀に3次方程式を解く過程で考え出されました。

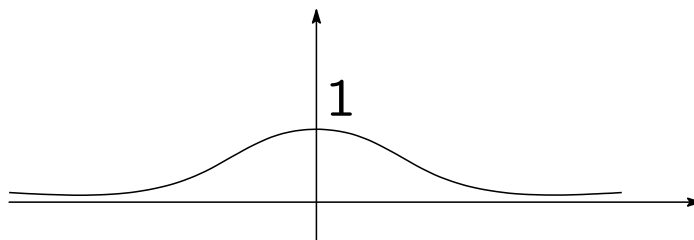
$1+2i$ のように2つの実数を i で結びつけたものを複素数といいます。

高等学校でも学ぶように複素数を平面上に図示することができます。この平面は特に複素数平面と呼ばれ、18世紀にガウスやアルガンによって考えだされたものです。



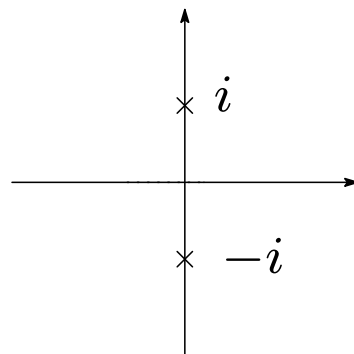
複素数は単に実数を拡張したというだけではありません。実数の世界を複素数を通してとらえなおすと、新しい世界が開けます。一方、複素数の世界は実数の世界とは異なる独自の美しい世界をもっています。

最初の例として、 $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ のグラフ と x 軸とで囲まれた無限の長さをもつ帯の面積を求めてみます。高校では無限区間の積分は習いませんが、教科書にも載っているように、 $x = \tan \theta$ と置換積分すると 面積は $\pi = 3.14159 \dots$ であることが確かめられます。



$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\tan^2 \theta + 1} \cos^2 \theta d\theta \\
 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} d\theta \\
 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \\
 &= \pi
 \end{aligned}$$

この関数を複素数に拡張すると $\frac{1}{z^2 + 1}$ となります. この関数の分母が0になるのは $z = i$ と $z = -i$ です. この関数の特異点とよばれます. 次の図は $\frac{1}{z^2 + 1}$ の特異点を複素数平面上にずししたものです.



$z = i$ でのこの関数の特異性は留数という量で測られます. これは大学3年生で学びます.

この留数を使うと積分は次の計算式で得られます.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = 2\pi i \lim_{z \rightarrow i} \frac{z - i}{z^2 + 1} = \pi$$

無限積分が複素関数の簡単な極限計算で得られます。これは19世紀にコーシーが発見した定理です。

物理学の中にも虚数、複素数は入り込んでいます。電磁気学では複素数を使うのは当たり前です。現代物理学でも複素数が大いに使われています。「虚数時間」という言葉をきいたことのある人もいるでしょう。

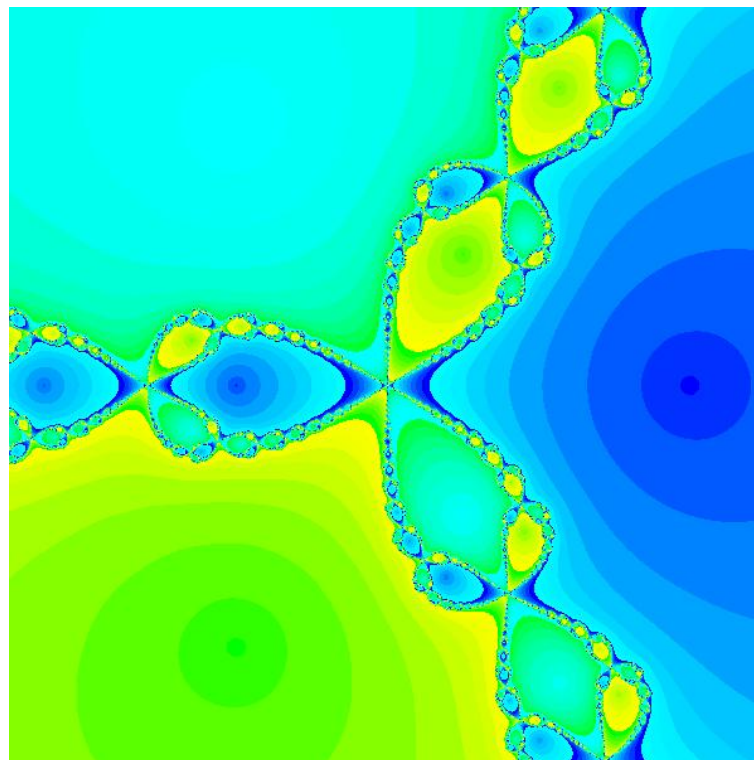
実数の世界を複素数の世界から見直しすことで、シンプルで美しい理論が作れるのです。

複素数独自の美しい世界として、ニュートン法を紹介しましょう。ニュートン法は曲線の接線を次々計算することで、方程式 $f(x) = 0$ の解を求める方法です。図をみると曲線 $y = f(x)$ への接線と x 軸との交点が次第に方程式の解 (曲線と x 軸との交点) に近づく様子がみてとれると思います。大学入試にもよく出題されるので、この図を見たことがある人もいるでしょう。隣接する交点 x_{n+1} と x_n の間には

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

という関係がなりたちます。

この式をそのまま複素数の世界に持って行って、どの複素数から出発すると、どの解に収束するのかを表した図です。ここでは、 $f(z) = z^3 - 1$ です。



3つの小円の中心が $z^3 - 1 = 0$ の解 $1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ です.