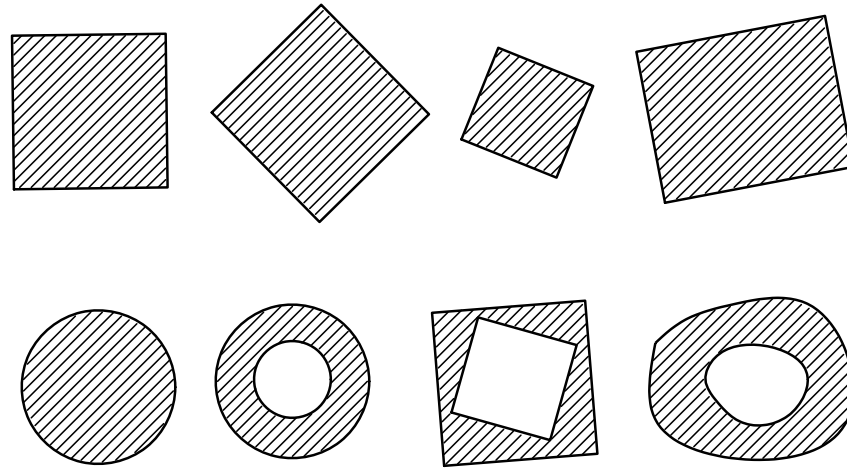


等角写像と極値的長さ

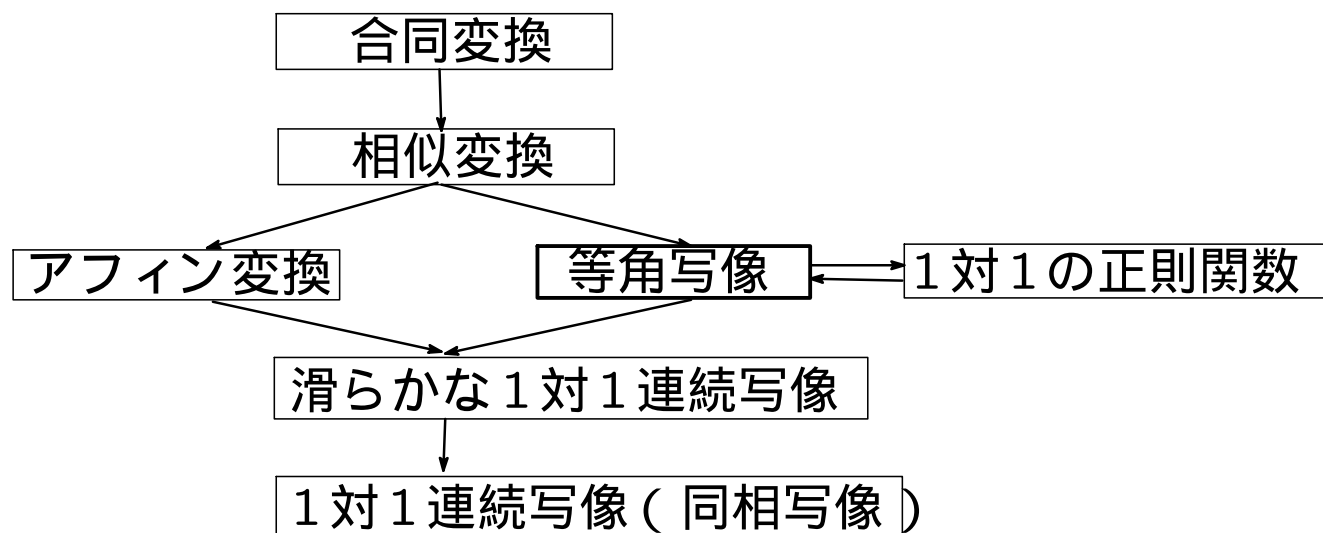
— 平面図形の等角写像による分類 —



『上の図で左上の正方形の仲間はどうでしょう？』

『何を目安（指標）にして区別しますか？』

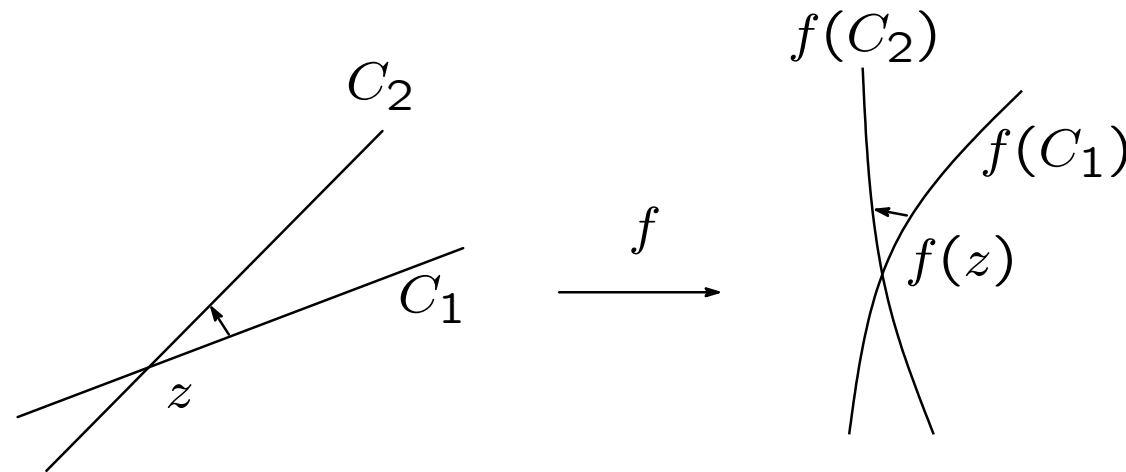
『何を基準に仲間とするのか？』



2つの平面図形のあいだの写像 f が等角写像であるとは

『各点 z を通る2曲線 C_1, C_2 のなす角の大きさが f によって向きも含めて保存されること』

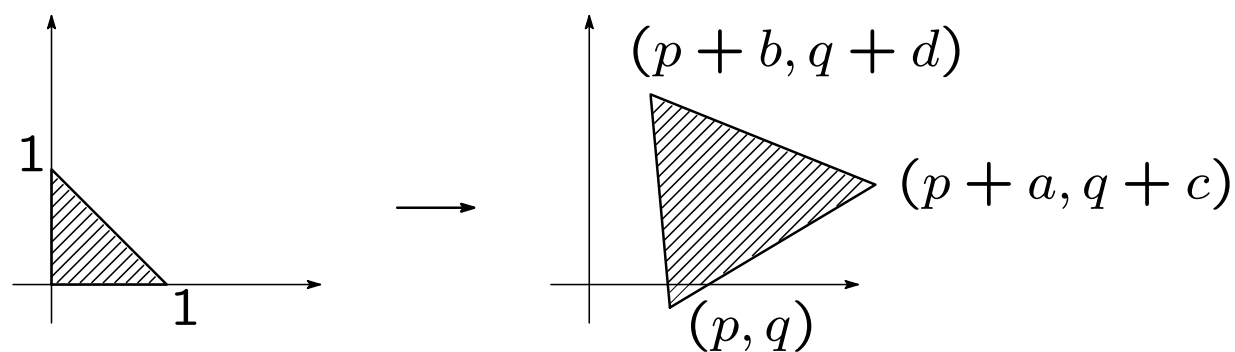
2曲線 C_1, C_2 のなす角とは各接線のなす角のことである．



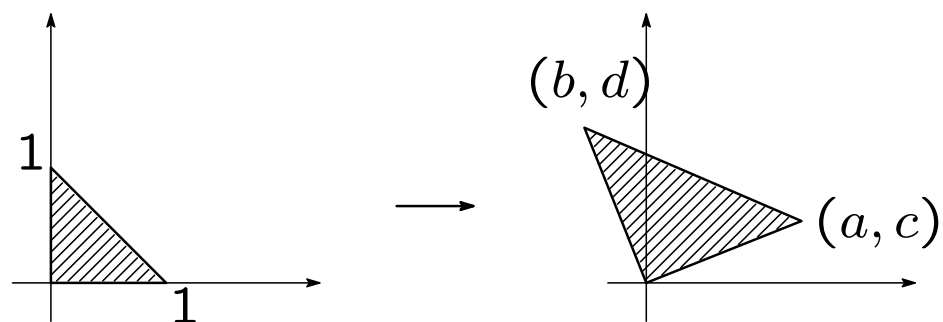
向きを保つ相似変換は等角写像の代表．

アフィン変換は直線を直線に写すような平面全体から平面全体への写像である。
 xy 平面から uv 平面へのアフィン変換はベクトルと行列を使って次のように表せる。

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$



アフィン変換が等角写像である条件を求めると



直角2等辺3角形の像はやはり直角2等辺3角形だから $a = d$, $c = -b$ である .
行列の形は

$$\begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$$

となる .

アフィン変換が等角写像であるとき，この変換を複素数によって表すと

$$\begin{cases} z = x + iy \\ w = u + iv \end{cases} \quad \begin{cases} u = ax - cy + p \\ v = cx + ay + q \end{cases}$$

$$\begin{aligned} w &= ax - cy + p + i(cx + ay + q) \\ &= a(x + iy) + ic(x + iy) + (p + iq) \\ &= Az + B \quad (A = a + ic, B = p + iq) \end{aligned}$$

$|A|$ 倍に拡大・縮小， $\arg A$ だけ回転， B だけ平行移動．

すなわち，向きを保つ相似変換である．

平面全体での等角写像は，向きを保つ相似変換に限ることを示すことができる．
しかし，図形の一部を等角写像するだけなら，もっとたくさんある．

正則関数とは（複素数の値をとる）複素微分ができる関数である．

微分積分学で学んだように，実数の関数 $f(x)$ が x_0 で微分可能というのは

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

が成り立つことだが，これは次のように書き換えることができる．

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \epsilon \quad \left(\lim_{x \rightarrow x_0} \epsilon / (x - x_0) = 0 \right)$$

ϵ は $x - x_0$ に比べて極めて小さいので，これを無視すると，すなわち，無限小の意味で，

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

これを複素数バージョンに直すと

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \epsilon$$

ϵ を無視すると，すなわち，無限小の意味で，または， z_0 の付近を虫眼鏡で拡大すると，

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) \\ &= f'(z_0)z + (f(z_0) + f'(z_0)z_0) \end{aligned}$$

となり，正則関数は無限小の意味で（ $f'(z_0) \neq 0$ の点では）向きを保つ相似変換，すなわち，等角写像である．

f の実部 , 虚部をそれぞれ u, v とあらわすと , つぎのコーシー・リーマンの関係式がなりたつ .

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

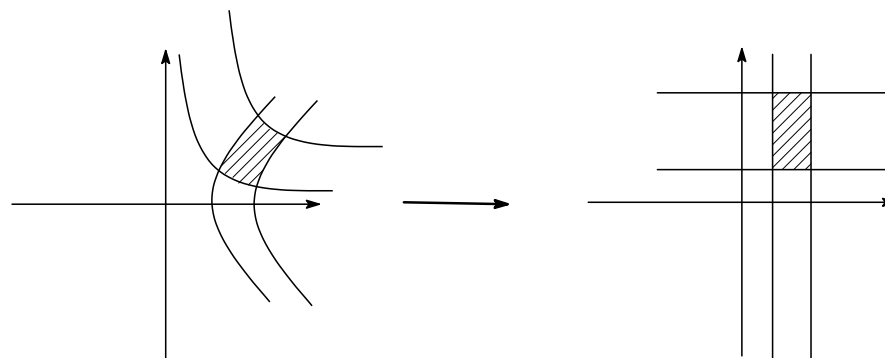
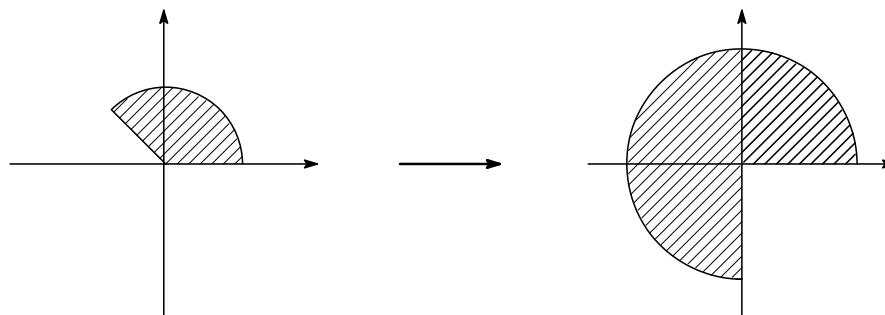
この式は , アフィン変換が等角写像であるのときに行列の成分 a, b, c, d の間に成り立つ関係式に対応している .

この関係式から , u は調和関数であることが分かる . すなわち ,

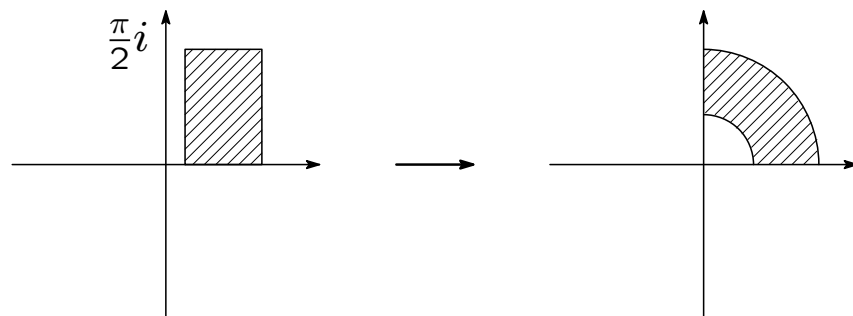
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

具体的な等角写像は , 複素微分できる関数から好きなだけ作れる . 微分の仕方は微分積分学の変数 x を複素変数 z に変えるだけ .

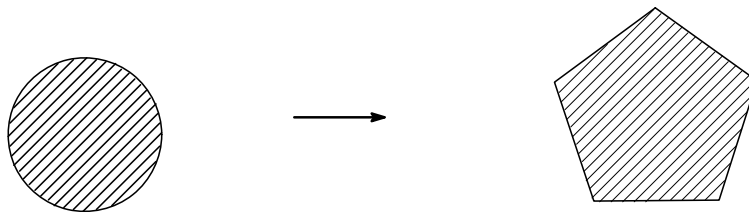
$$w = z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$



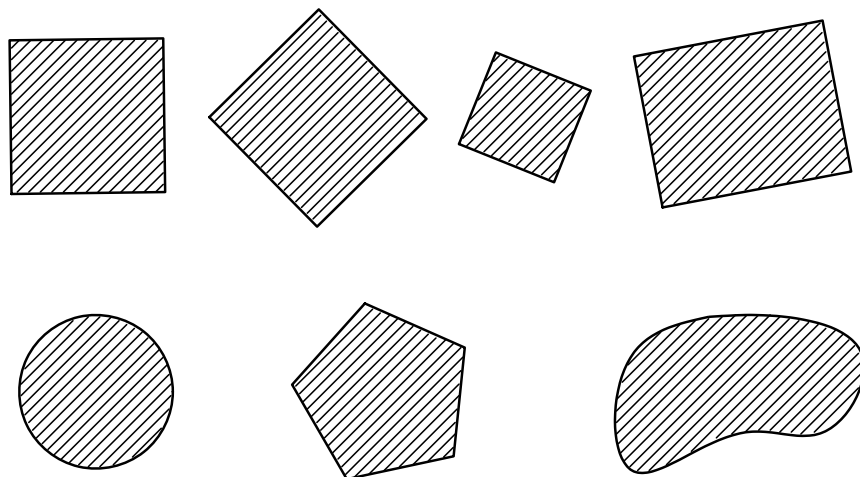
$$w = e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$$



$$w = \int_0^z \frac{dz}{(z^5 - 1)^{2/5}}$$



問題 ジョルダン閉曲線で囲まれた領域の内部からなる平面図形を等角写像によって分類せよ．ただし，境界点の対応は気にしなくてもよい．

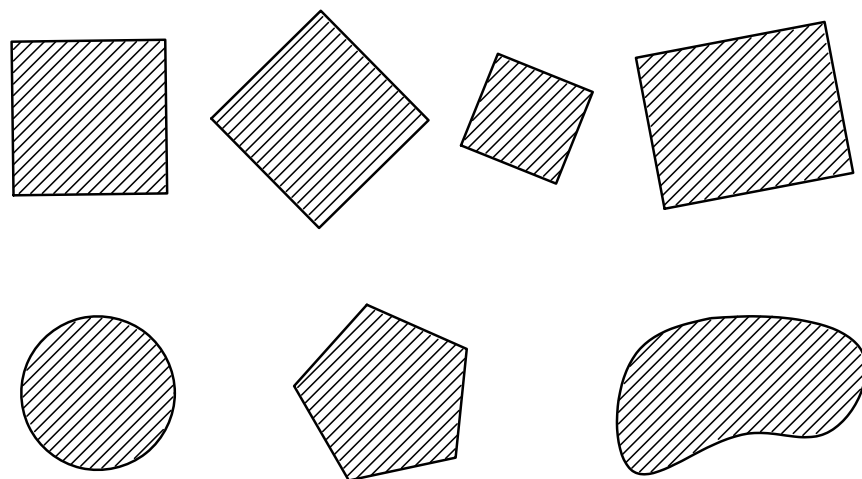


Riemann, Georg Friedrich Bernhard

(1826.9.17 - 1866.7.20)

リーマンの写像定理

ジョルダン閉曲線で囲まれた領域は，単位円板 $\{|w| < 1\}$ の上に等角写像される．この等角写像をリーマンの写像関数という．

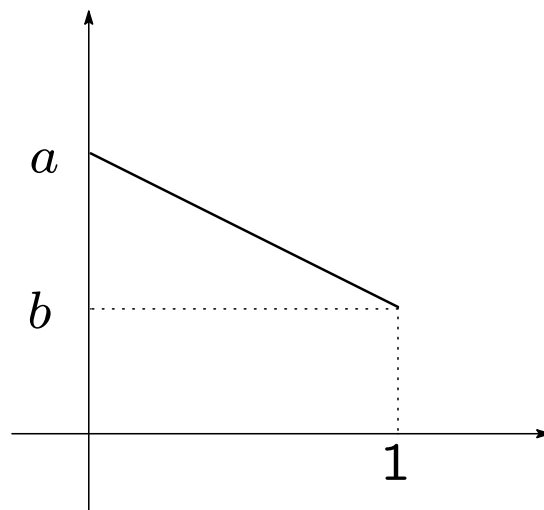


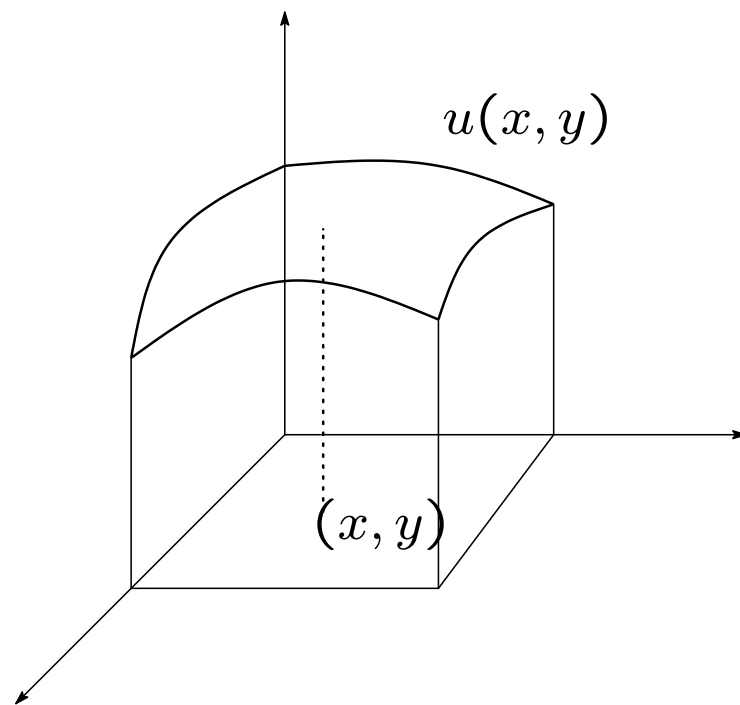
定理　ジョルダン閉曲線で囲まれた領域は（これらの図形もふくめて）皆仲間！
ただし，境界の対応は考えていないことに注意する．

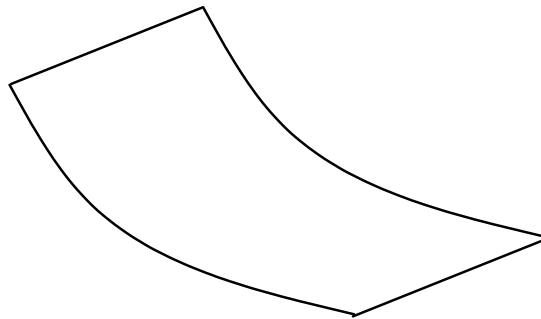
リーマンの写像関数を作るには等角写像 f を直接作らずに , その実部 u をつくる .
 $u(x, y)$ はある境界条件をみたす調和関数として求められる (ディリクレ問題)

ディリクレ問題の実 1 次元バージョン

$[0, 1]$ で $u(0) = a, u(1) = b$ という境界条件をみたし , $u''(x) = 0$ となる関数は $u(x) = (b - a)x + a$ で与えられる .



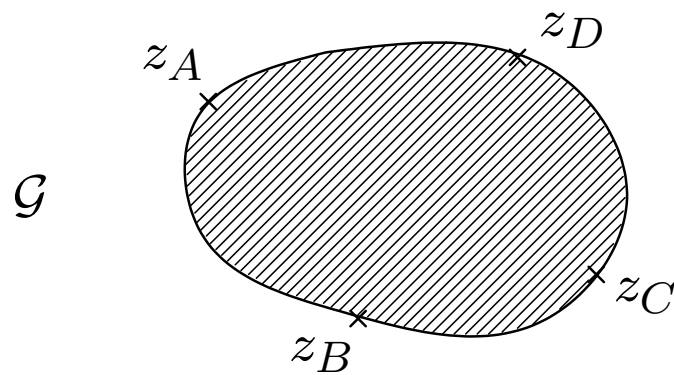




石炭膜を張るとどんな曲面か？

問題 ジョルダン閉曲線で囲まれた領域の内部からなる平面図形を等角写像によって分類せよ．ただし，境界点の対応も気にすること．

曲線4辺形とはジョルダン閉曲線上に反時計方向にマークした4頂点と曲線で囲まれた内部とからなる図形のことである．

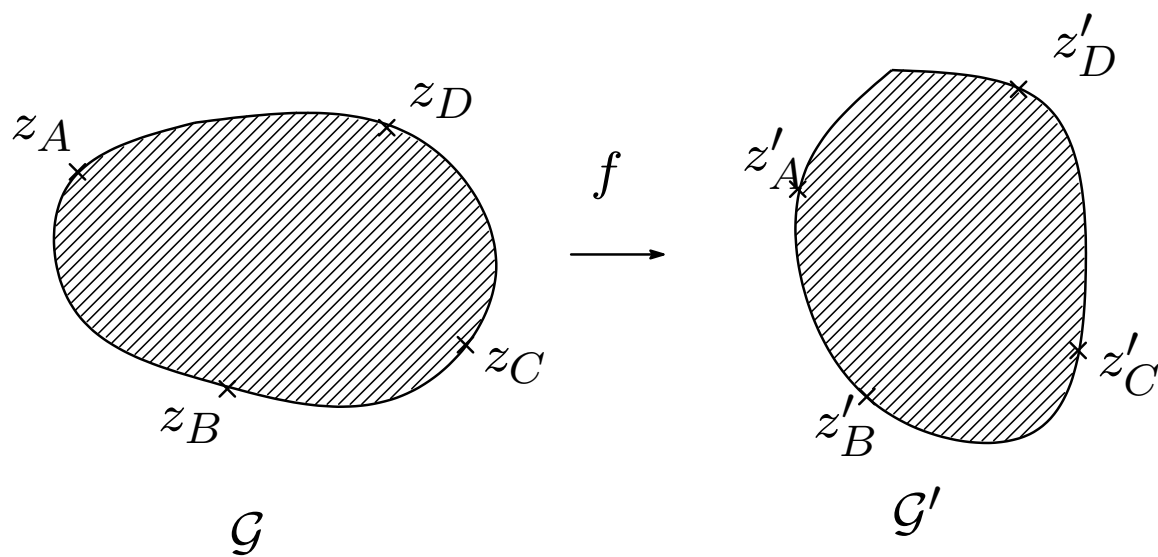


カラテオドリの定理

G がジョルダン閉曲線で囲まれた有界領域のとき , リーマンの写像関数は G の境界 ∂G から $\{|w| = 1\}$ の上への 1 対 1 両連続写像に拡張できる .

さらに , ∂G 上の任意の 3 点 $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ を $\{|w| = 1\}$ の上の任意の 3 点 ξ_1, ξ_2, ξ_3 (反時計方向) に写すものが唯 1 つ存在する .

2つの曲線4辺形 $(\mathcal{G}; z_A, z_B, z_C, z_D)$, $(\mathcal{G}'; z'_A, z'_B, z'_C, z'_D)$ は, $\mathcal{G}$ が $\mathcal{G}'$ の上に等角写像され, z_A, z_B, z_C, z_D が z'_A, z'_B, z'_C, z'_D にこの順に写像されるときに仲間であると定義する.



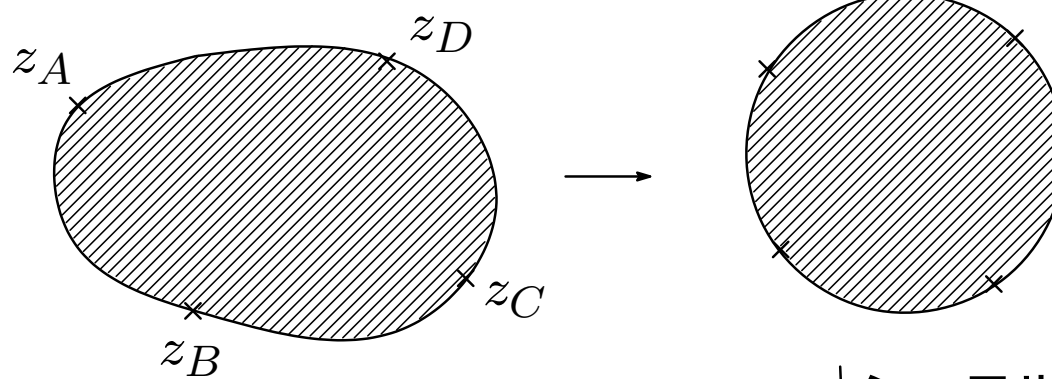
任意の曲線4辺形 $(\mathcal{G}; z_A, z_B, z_C, z_D)$ は , 長方形 $(\mathcal{G}'; z'_A, z'_B, z'_C, z'_D)$ に等角写像できる .

実際 , リーマンの写像定理により曲線4辺形 $(\mathcal{G}; z_A, z_B, z_C, z_D)$ は単位円板の曲線4辺形 $(\mathcal{G}''; \xi_A, \xi_B, \xi_C, \xi_D)$ に写すことができる . その後 , シュワルツ・クリストフェル変換

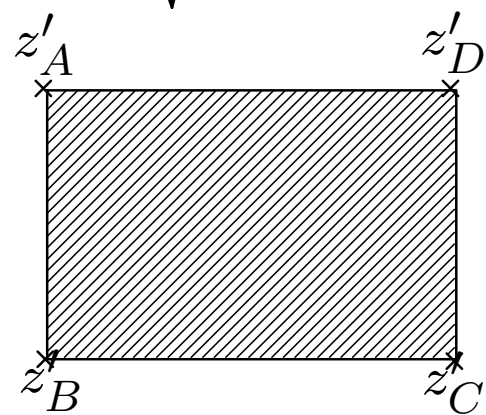
$$w = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(z - \xi_A)(z - \xi_B)(z - \xi_C)(z - \xi_D)}}$$

により , 長方形 $(\mathcal{G}'; z'_A, z'_B, z'_C, z'_D)$ に写る .

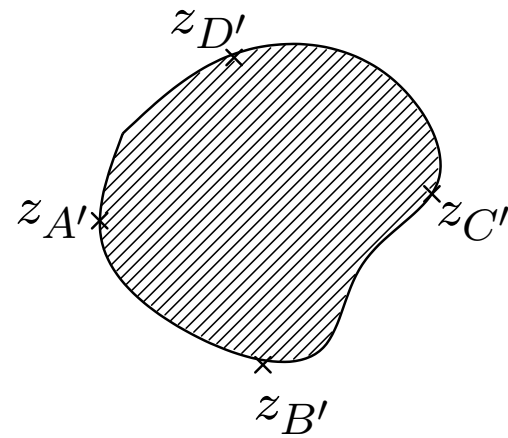
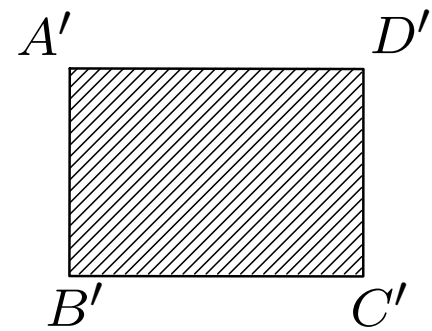
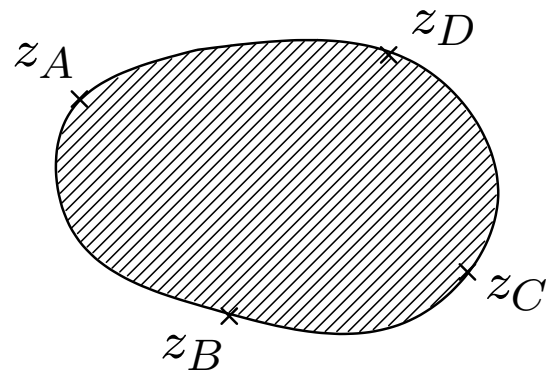
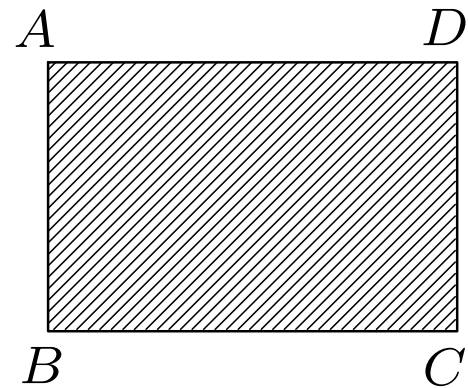
リーマン写像定理

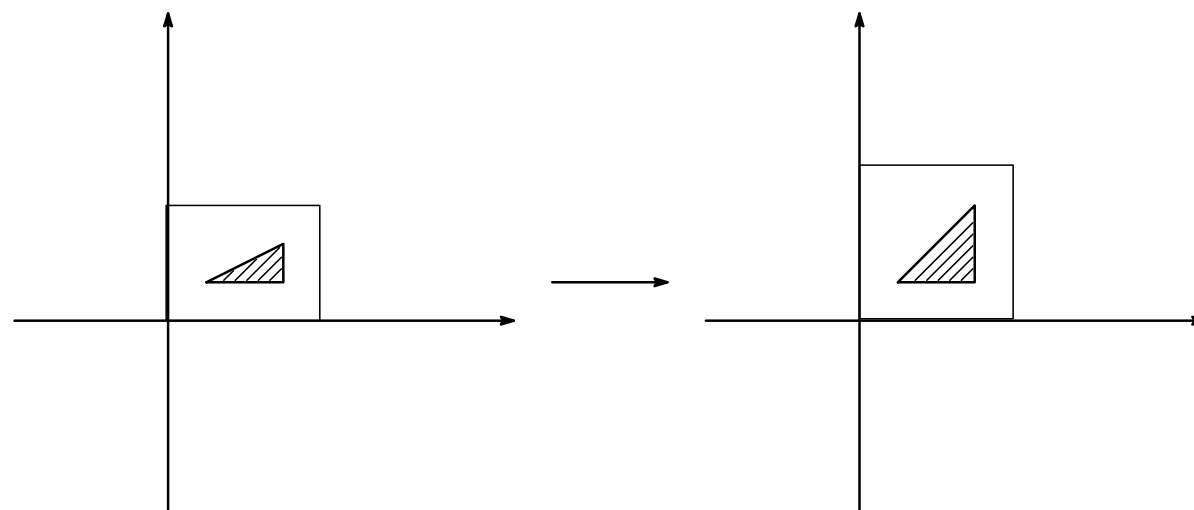


↓ シュワルツ・クリストフェル変換

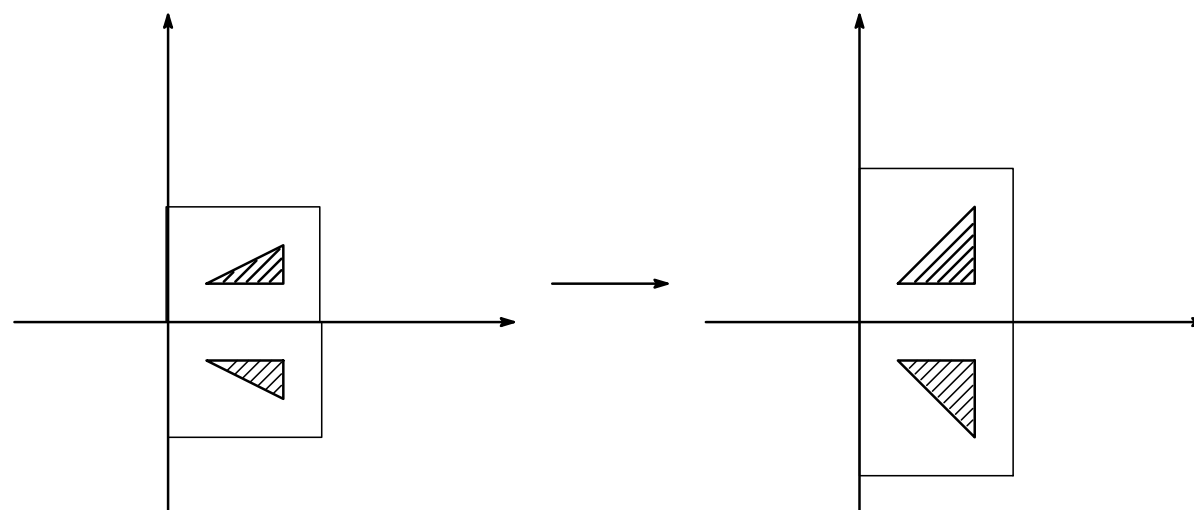


どの曲線4辺形が仲間か調べるには，どの長方形が仲間か調べればよい．



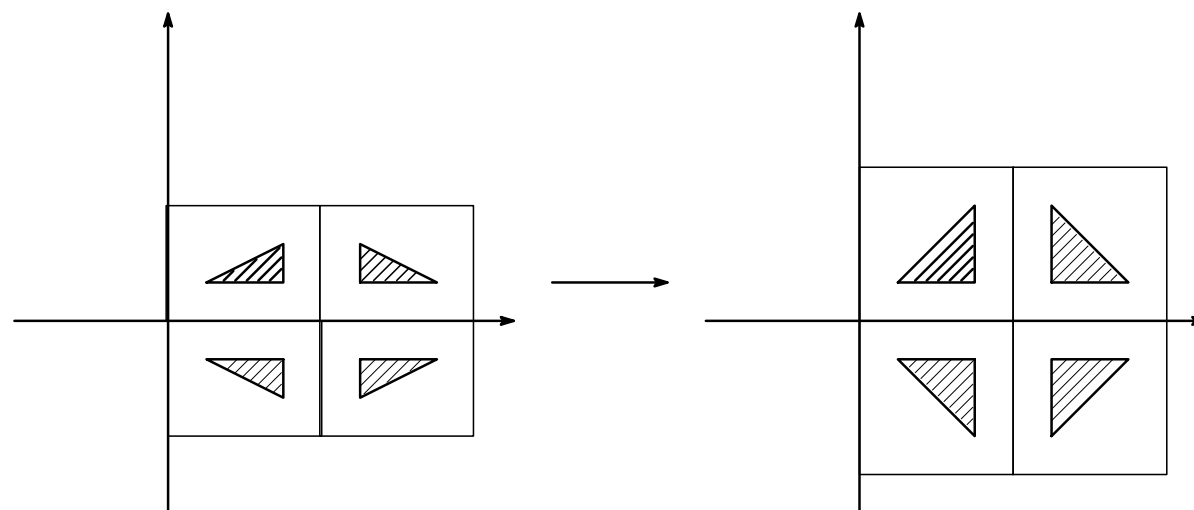


2つの長方形が頂点の対応も含めて等角写像で写りあったとする．



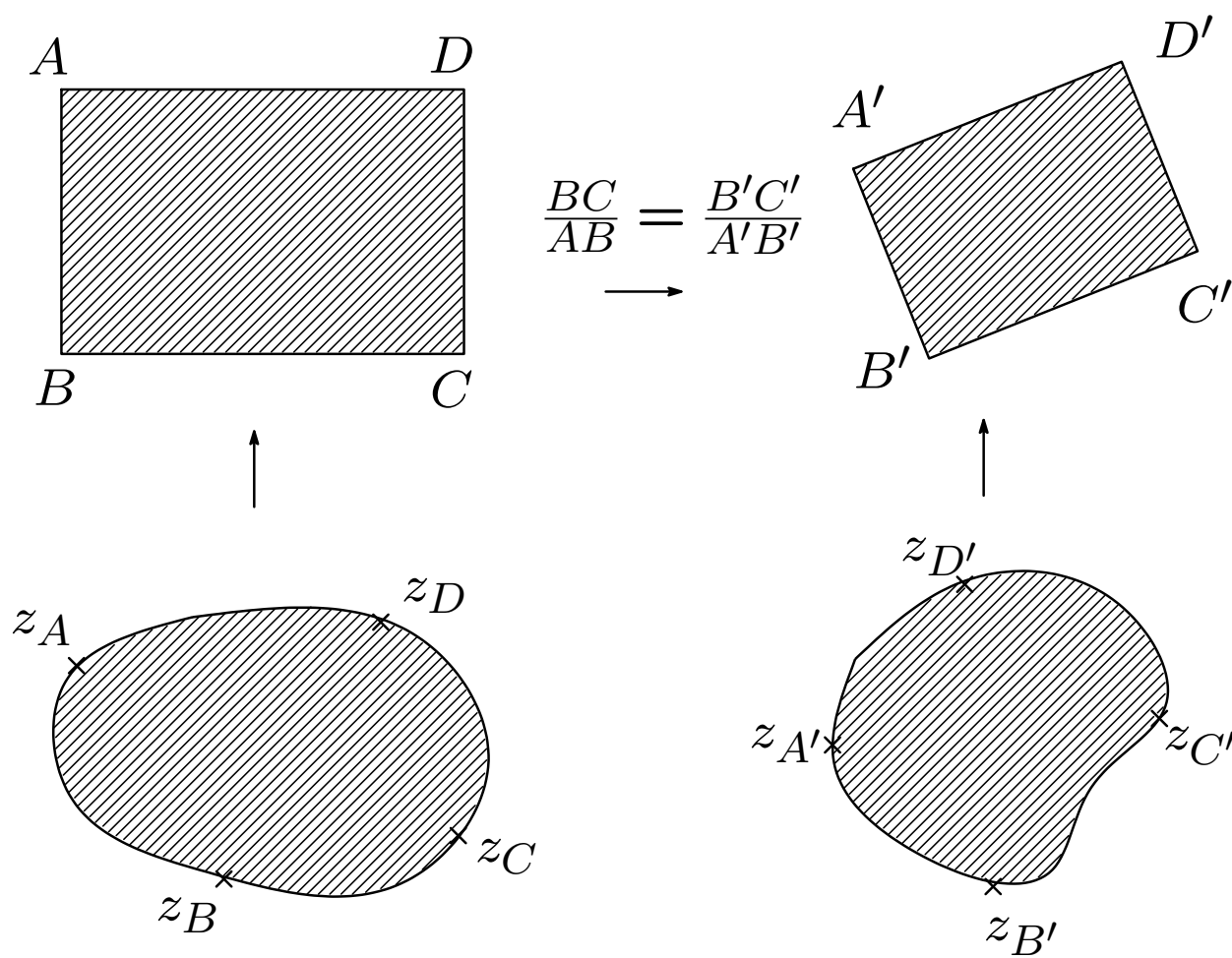
下の長方形にも写像を拡張した．上下の長方形を合わせた領域で等角写像になっている（解析接続）

正則関数はその一部の写りがたが決まると，残りも自動的に決まってしまう（正則関数の剛性）



どんどん続けて，平面全体の等角写像に解析接続できる．

平面全体の等角写像は向きを保つ相似変換だった．従って，向きを保って相似な長方形が仲間！



等角写像で写りあえる4辺形

曲線4辺形を長方形に等角写像したとき，辺の長さの比

$$\frac{BC}{AB}$$

をこの曲線4辺形における，辺 $z_A z_B$ と辺 $z_C z_D$ の極値距離，または，この曲線4辺形において，辺 $z_A z_B$ と辺 $z_C z_D$ を結ぶ曲線族の極值的長さという．

極值的長さ

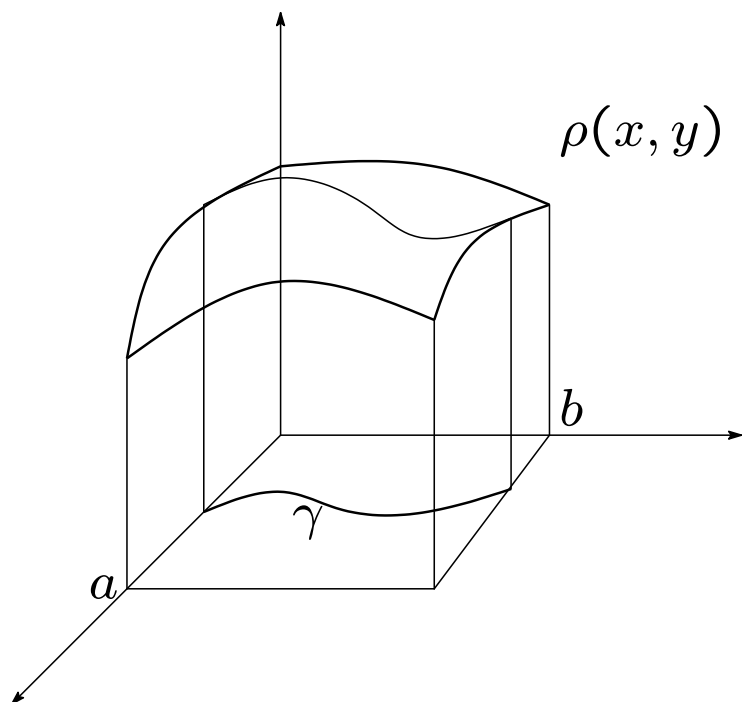
Γ が領域 D 内の曲線族とする． D 内の非負値連続関数 $\rho(z)$ が Γ に対する許容計量であるとは， Γ に属する任意の曲線 γ の長さを $\rho(z)$ で計った長さが 1 以上 ($+\infty$ を許す)，すなわち

$$\int_{\gamma} \rho(z) |dz| \geq 1$$

となることである．この許容計量で計った D の面積

$$\iint_D (\rho(z))^2 dx dy$$

の最小値 (正確には下限) の逆数を Γ の極值的長さという．



断面積 $= \int_{\gamma} \rho(z) |dz| \geq 1$
 $\iint_D \rho^2 dx dy$ を最小にする

$$\rho_0(x, y) = \frac{1}{b}$$

$$\iint_D \rho_0^2 dx dy = \frac{ab}{b^2}$$

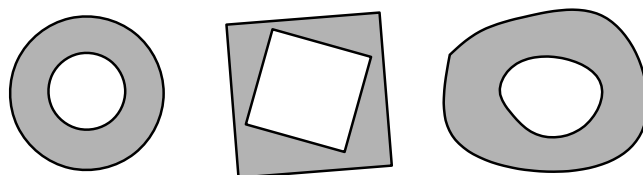
[定理]

2つの曲線4辺形 $(\mathcal{G}; z_A, z_B, z_C, z_D)$, $(\mathcal{G}; z'_A, z'_B, z'_C, z'_D)$ が仲間であるのは ,
辺 $z_A z_B$ と 辺 $z_C z_D$ の極値距離と辺 $z_{A'} z_{B'}$ と 辺 $z_{C'} z_{D'}$ の極値距離が等しいこ
とである .

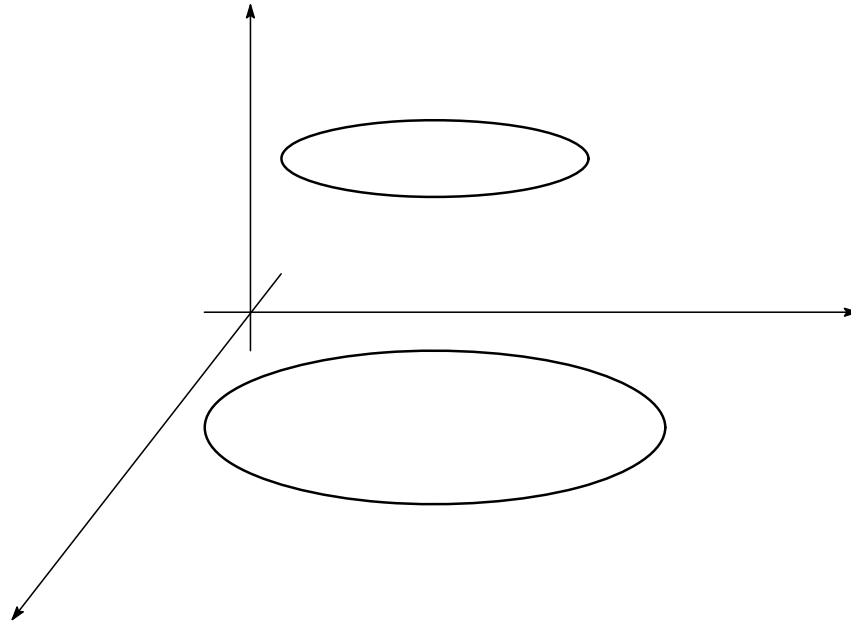
問題

2重連結ジョルダン領域を等角写像によって分類せよ．ただし，境界の対応は気にしないでよい．

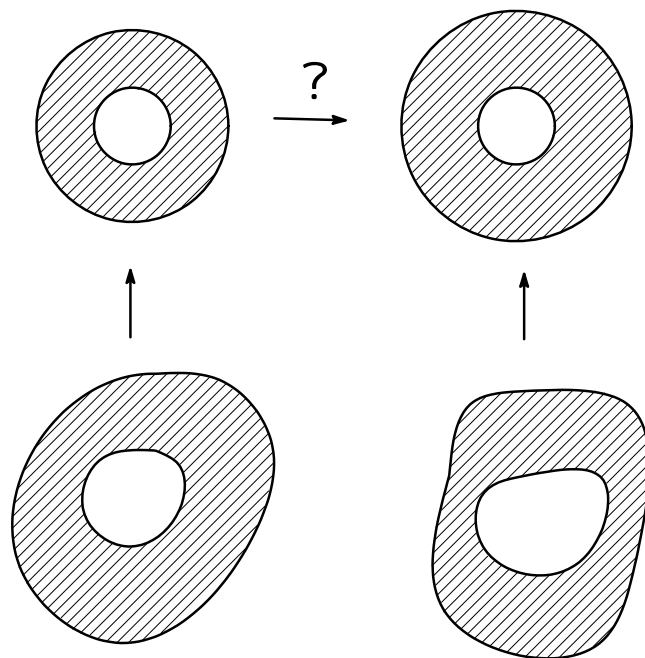
2重連結ジョルダン領域とは，2本のジョルダン閉曲線で囲まれた環状の領域である．

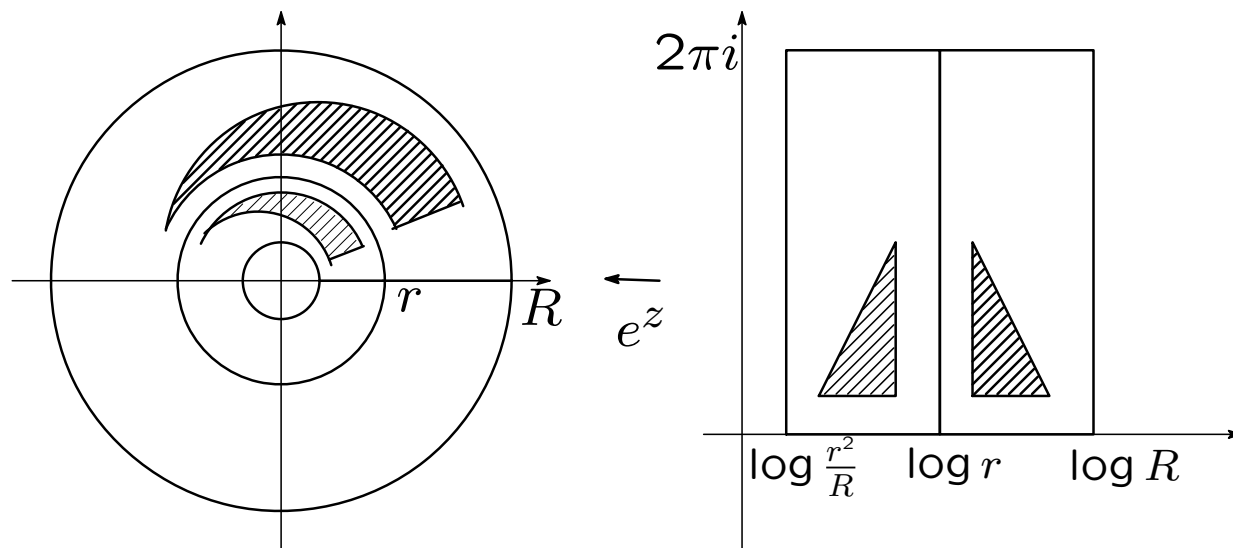


任意の2重連結ジョルダン領域は同心円環領域に等角写像される．

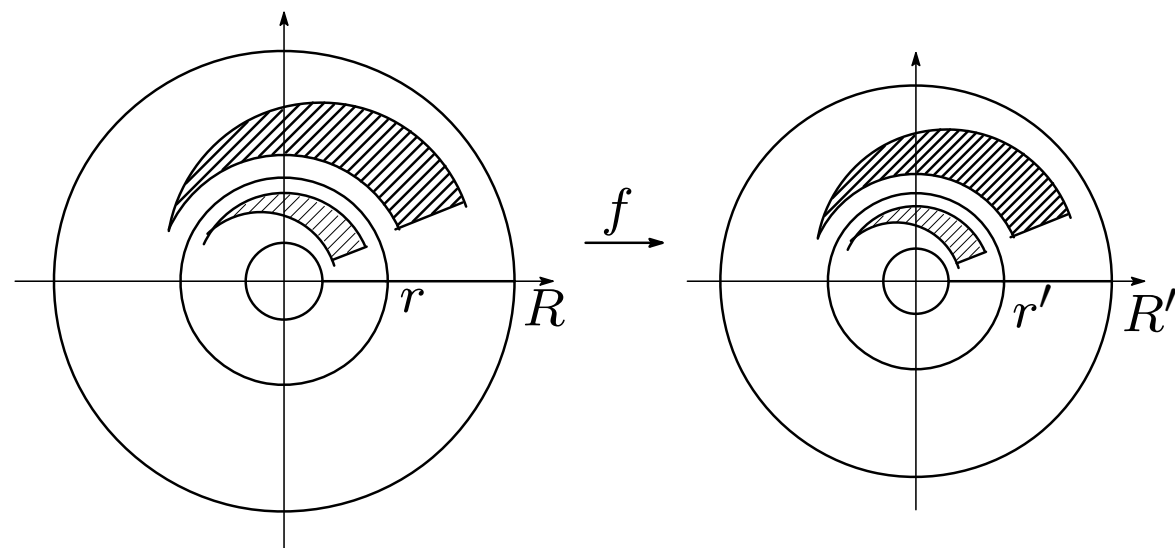


どの2重連結ジョルダン領域が仲間かどうか調べるには、どの同心円環領域が仲間か調べればよい。

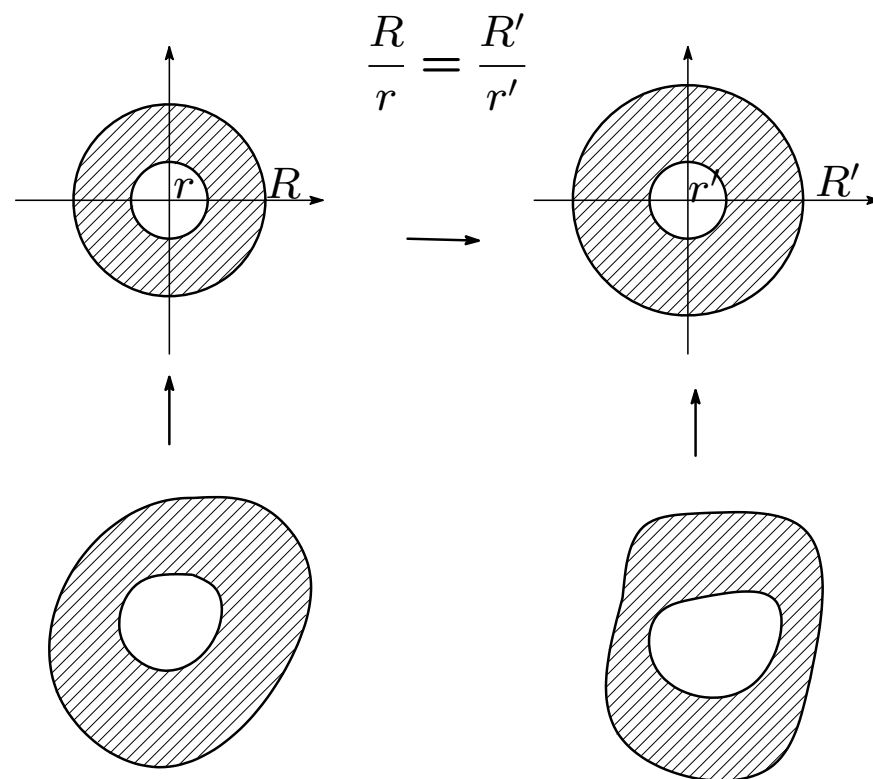




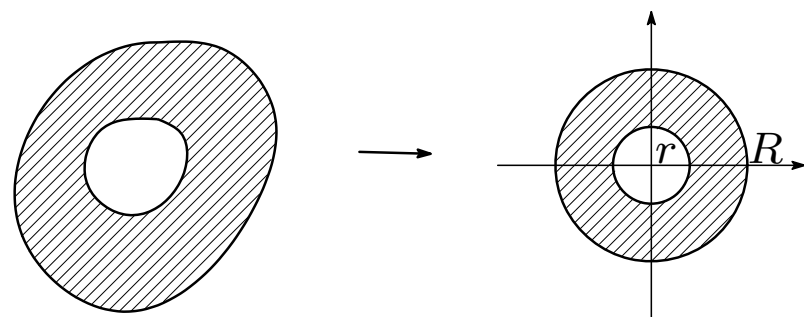
$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$$



f は平面全体に解析接続をできて, f は向きを保つ相似変換. 従って, 半径の比が等しい同心円環が仲間!



等角写像で写りあえる2重連結ジョルダン領域



2重連結ジョルダン領域を同心円環 $\{r < |z| < R\}$ に等角写像したとき，2重連結ジョルダン領域の2つの境界の極値距離，または，2つの境界を結ぶような閉曲線全体の極値的長さは

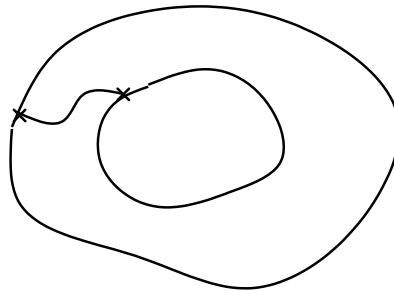
$$\frac{\log \frac{R}{r}}{2\pi}$$

になる．この量は2重連結ジョルダン領域のモデュラスとも呼ばれる．

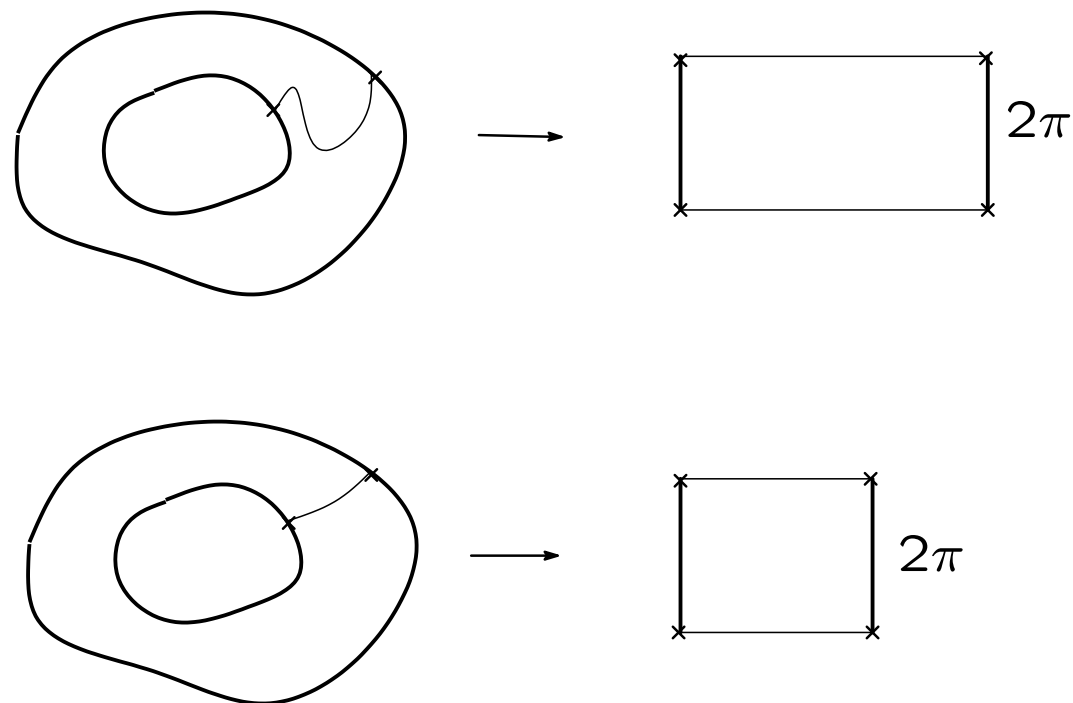
定理

2つの2重連結ジョルダン領域が仲間であるのは、それぞれの2つの境界の極値距離が等しいことである．

2重連結ジョルダン領域の2つの境界を1本のジョルダン弧で結ぶと曲線4辺形もどきができているのが分かる．



結び方を変えると，いろいろな曲線4辺形もどきができる．2つの境界の極値距離はつぎのような極値性をもっている．



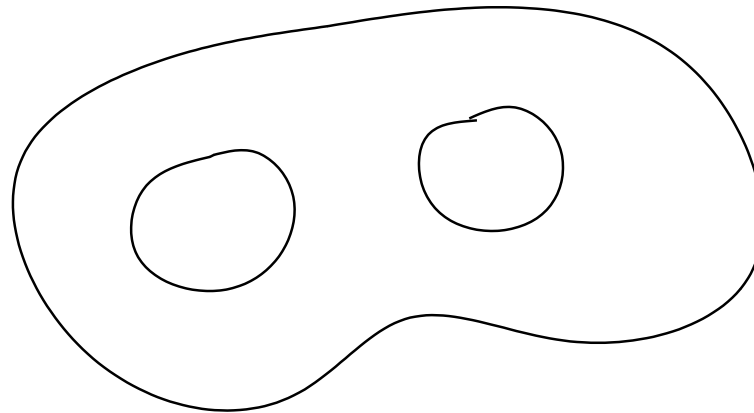
2重連結ジョルダン領域の2つの境界に対応するほうの曲線4辺形もどきの対辺の極値距離の最小値が2重連結ジョルダン領域のモデュラスに一致する．

ジョルダン弧の引き方は一意的ではないが，始点を決めれば一意に決まる．

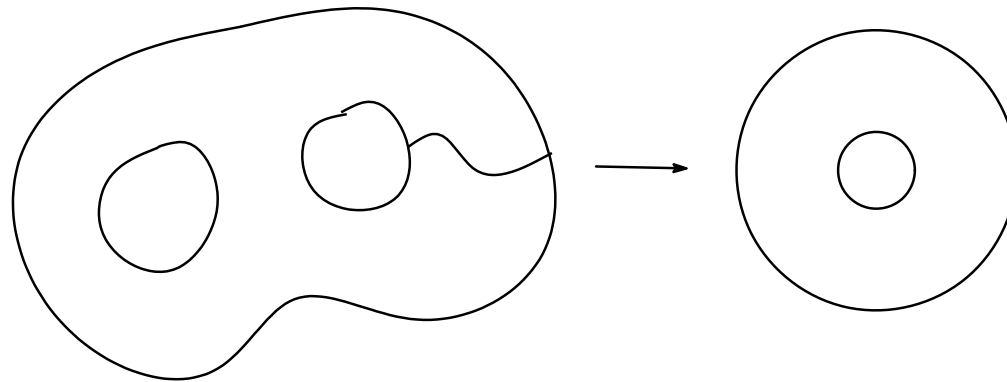
問題

3重連結ジョルダン領域を等角写像によって分類せよ．ただし，境界の対応は気にしないでよい．

3重連結ジョルダン領域とは，3本のジョルダン閉曲線で囲まれた2つ穴あき領域である．



3重連結ジョルダン領域の分類には今までと違って3個のパラメーターが必要になる．まず，3重連結ジョルダン領域の境界成分を2個選ぶ．選び方は3通りある．その2個の境界成分を1本のジョルダン弧で結ぶと，2重連結ジョルダン領域もどきができる．



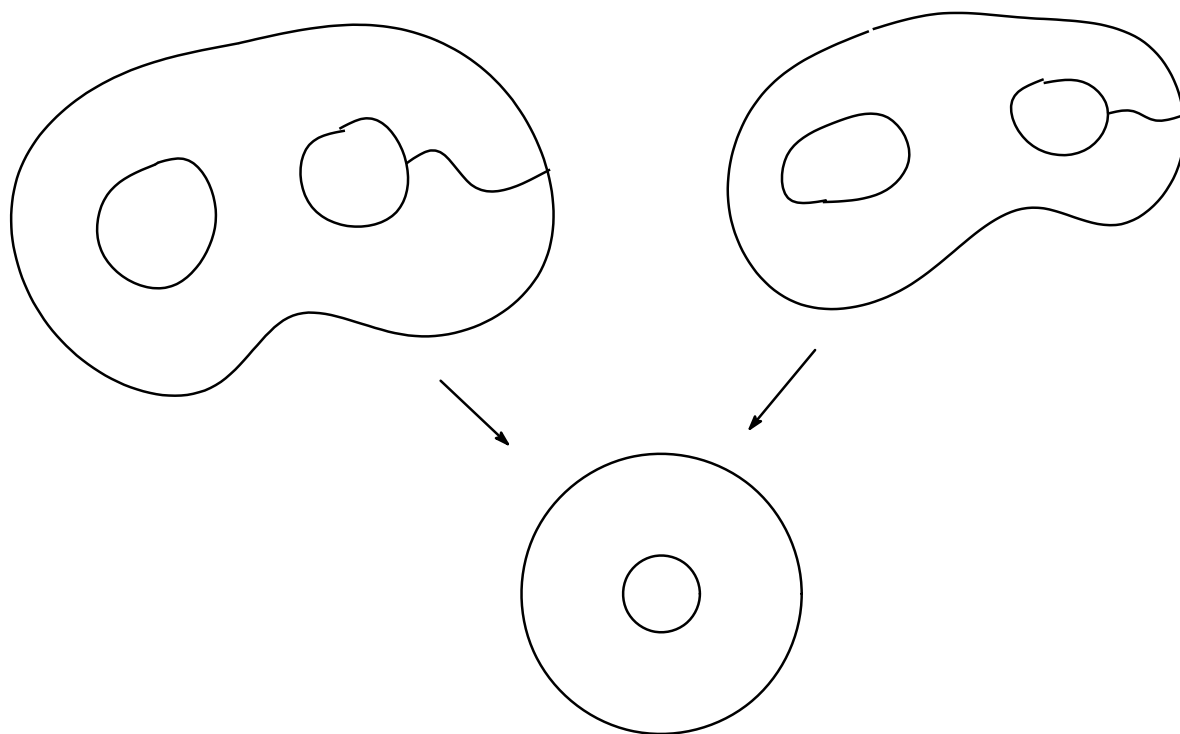
タイヒミュラーの定理

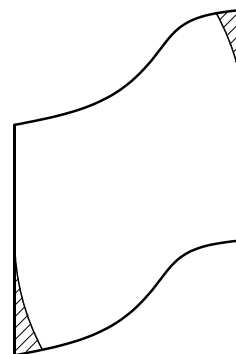
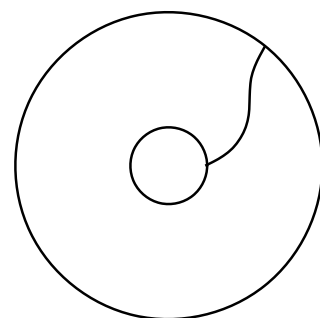
この2重連結ジョルダン領域もどきのモデュラスを最大にするジョルダン弧が一意的に決まる．

このジョルダン弧をモデュラス最大カットと呼ぶ．

定理

2つの3重連結ジョルダン領域が等角写像で写りあえるのは、3つのモデュラス最大カットによる2重連結ジョルダン領域もどきのモデュラスが等しいことである。





e^z

