数学の世界

– 王様の遺言と torus の世界 –

問題１．（Möbiusの問題）むかし５人の息子を持った王様がいた．遺言の中で彼は，彼の死後どの息子もそれぞれ１つの城を築き，５つの城をそのどの２つの対も交差することのない道路で連結せよと述べた．遺言の条件はみたすことができるか.（図１，２）

まず，王子が４人の時を考えてみよう．

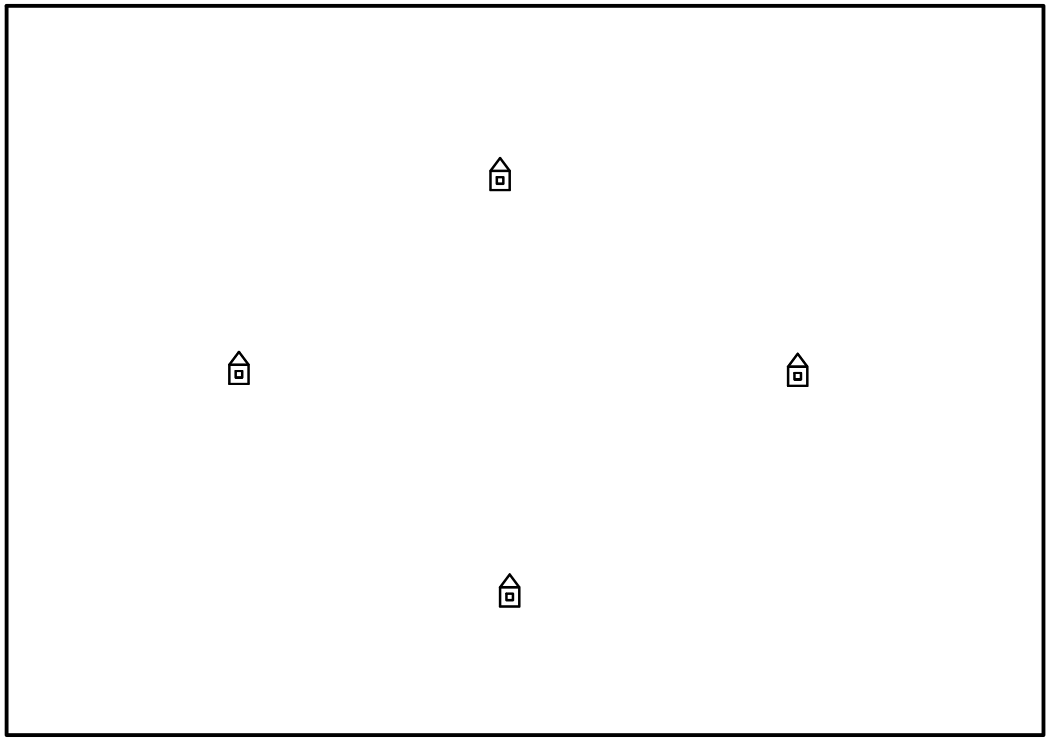


図１　４つの城（問題）

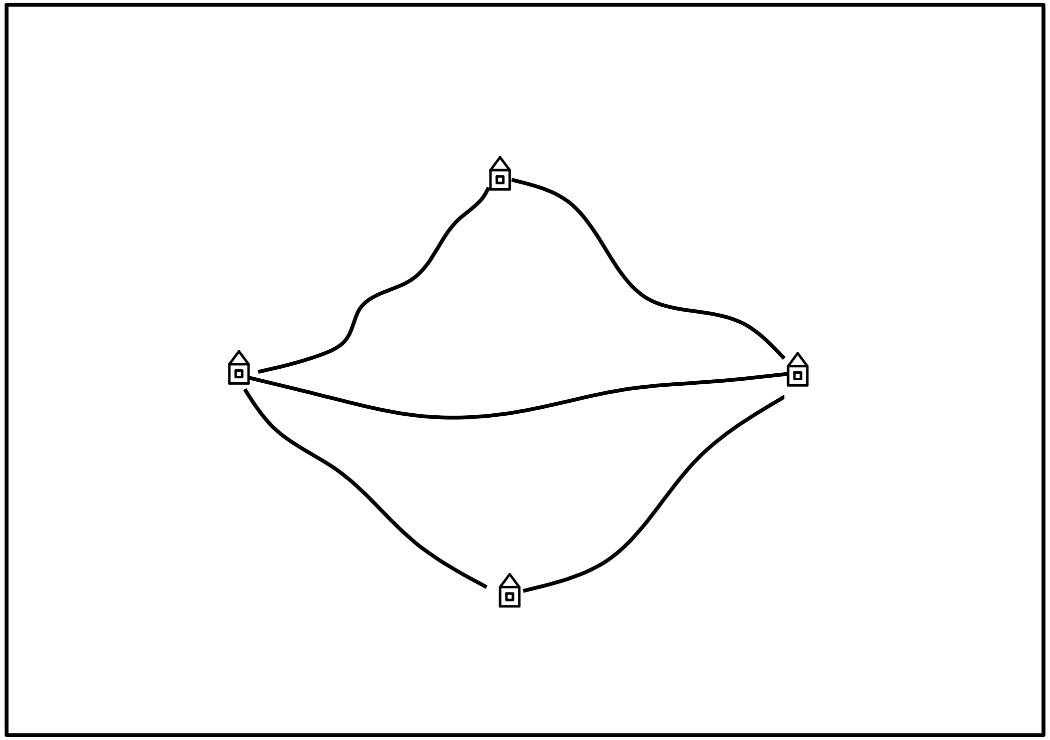


図１　４つの城（建設中）

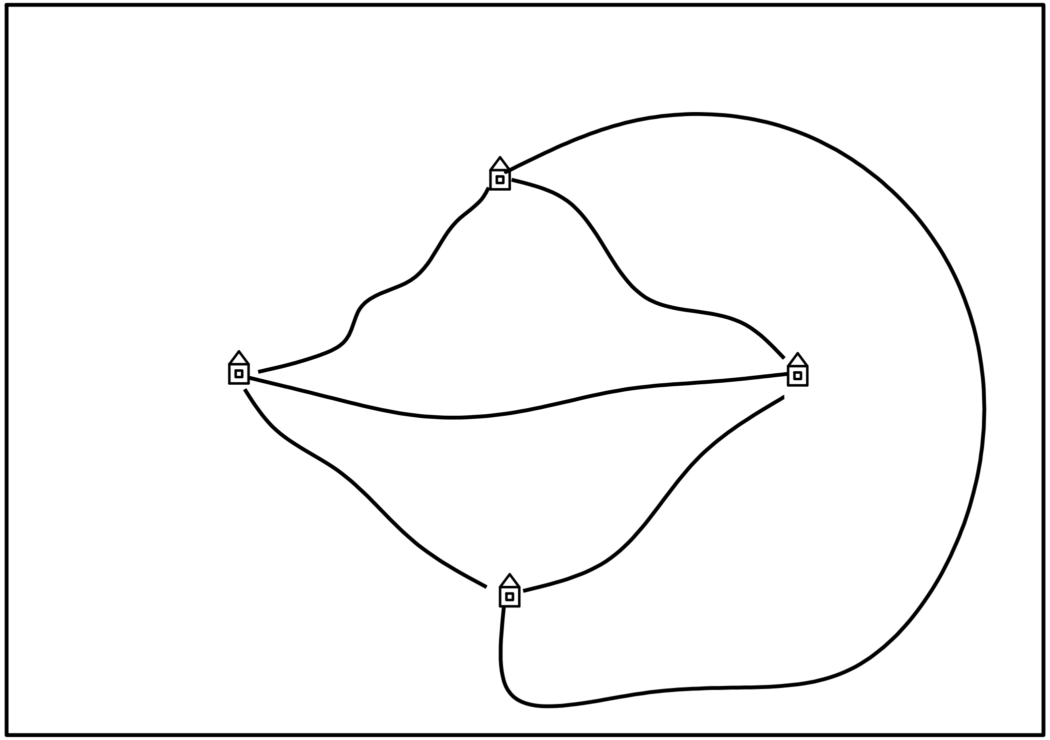


図１　４つの城（完成）

では，王子が５人の時を考えてみよう．

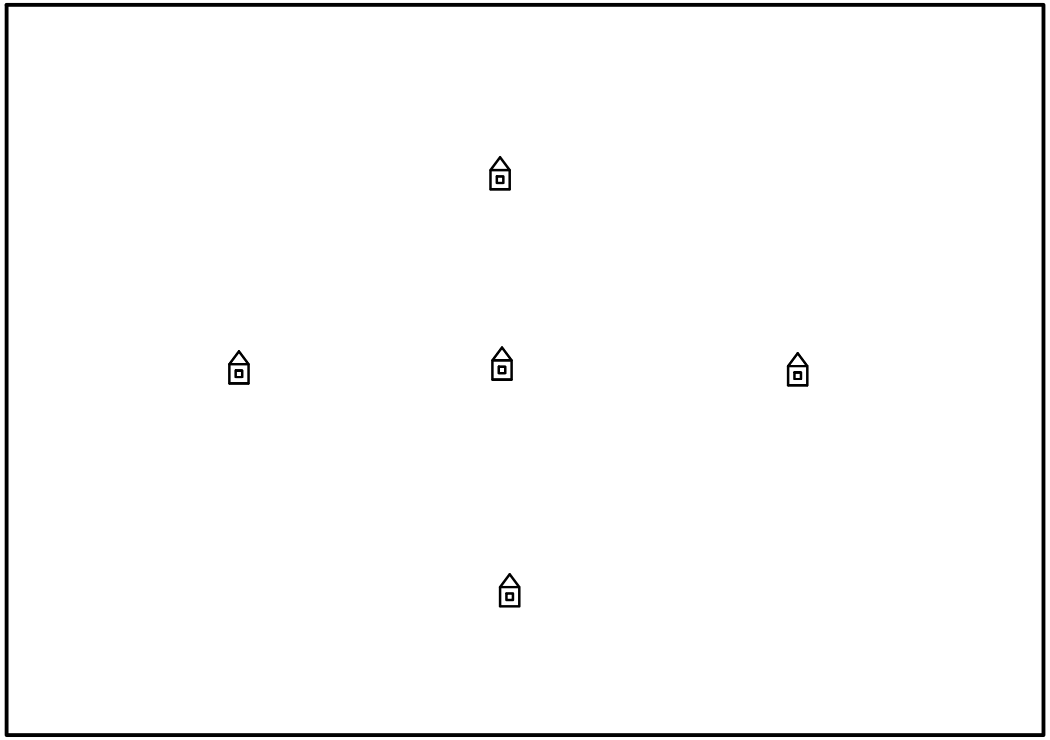


図２　５つの城（問題）

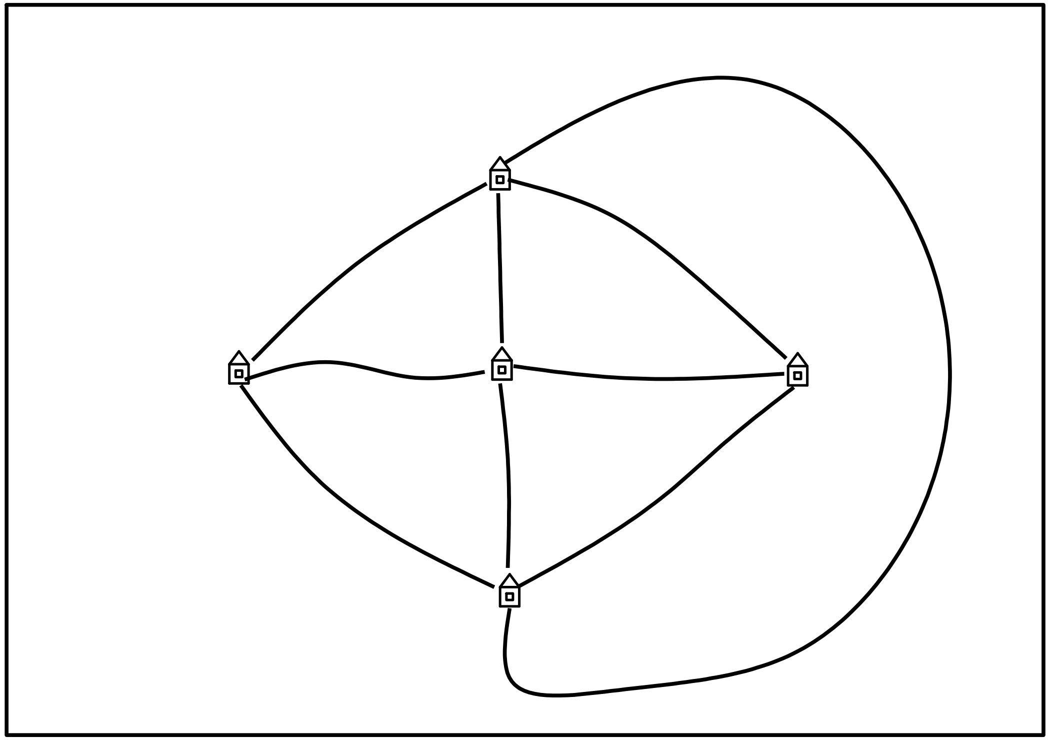


図２　５つの城（建設中…）

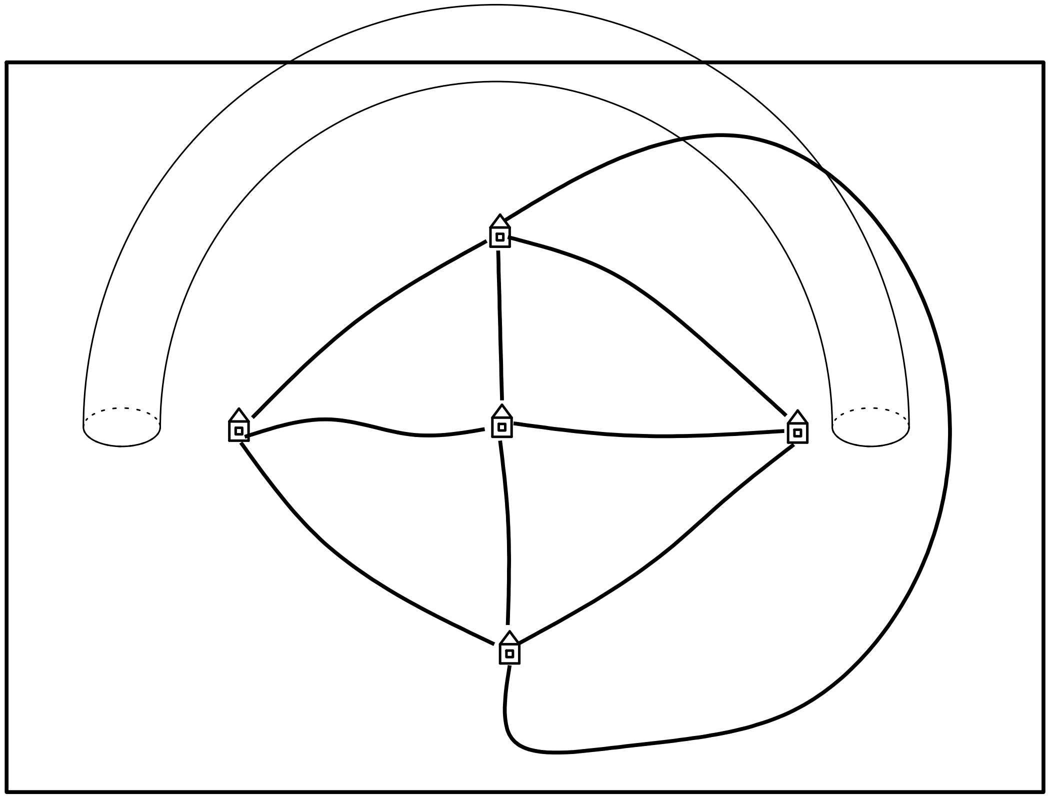


図２　５つの城

定義1.　いくつかの点（**頂点** Vertex，node）とそれらを結ぶ線（**辺** Edge，arc，link）とからなる**連結**な図形を**グラフ**（graph）という．各辺の両端は頂点に終わり，頂点以外では交差しない．

球面の上に描かれたグラフを**球面グラフ**とよぶ．

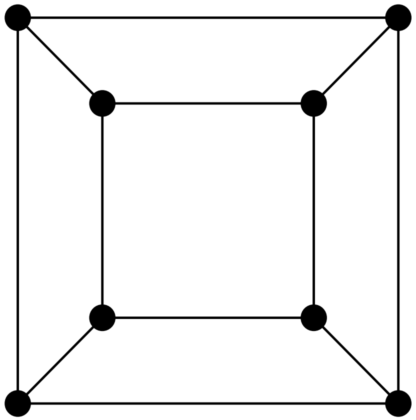
球面グラフは球面をいくつかの領域に分割する．そのひとつひとつの領域を**面**（Face）とよぶ．

練習１.　図３において，頂点の個数 V ，辺の個数 E ，面の個数 F を数えよ.

$$V - E + F = \boxed{}$$

という関係式が成り立つ.

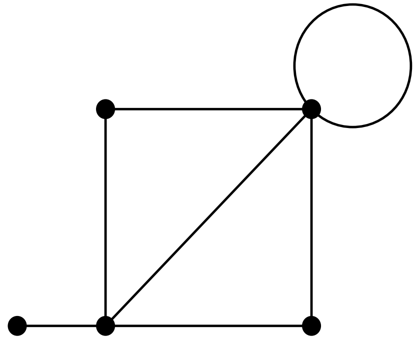
また，各面は何本の辺で囲まれている（と考えればよい）か.



$V =$

$E =$

$F =$

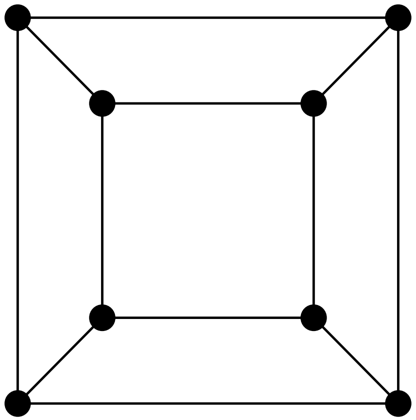


$V =$

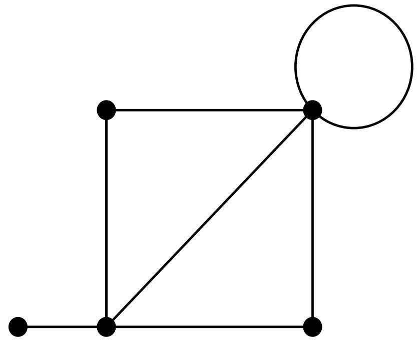
$E =$

$F =$

図3



$V = 8$
$E = 12$
$F = 6$



$V = 5$
$E = 7$
$F = 4$

図３（正解）

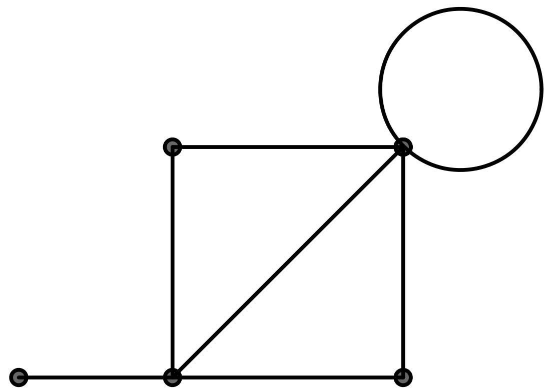
定理１．（Euler の球面グラフ定理，Eulerの公式）球面グラフにおいて，

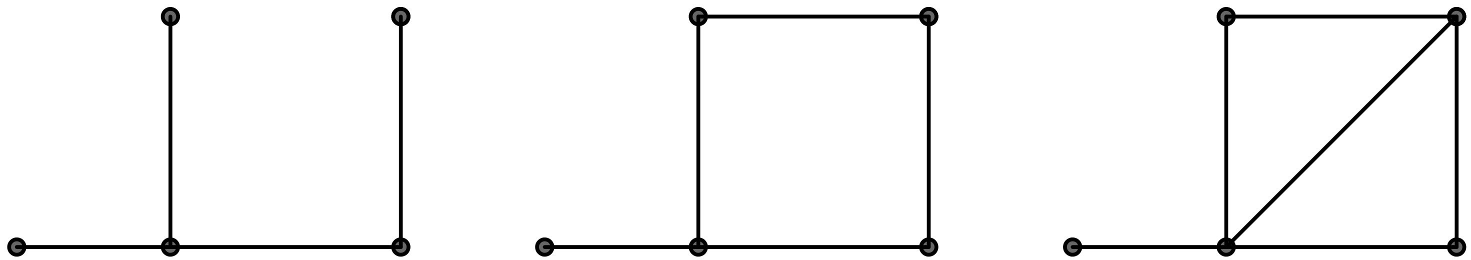
V，E，F の間には

$$V - E + F = 2$$

という関係式が成り立つ．

証明の考え方





- **オイラー**　Leonhard Euler (1707–1783).

　スイスの数学者．グラフ理論を含む多くの数学の分野の始祖．18世紀最大の数学者．数学の歴史の中でも数人中の一人に数えられる．オイラーの肖像画はスイスの10フラン紙幣に使われている．オイラー全集は全部で74巻もあり，年間の執筆ページ数は平均すると約800ページにも及ぶ．鳥が羽ばたくのと同じように、また人が呼吸するのと同じように計算をし続けたと伝えられている．

- 一筆書き定理
- $$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$
- $$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

- 球面グラフの各面において，その面を１周するためにたどらなければならない辺の本数をその**面の次数**という.

- 球面グラフの各面の次数の総和は $2E$ に等しい（**握面補題**）.

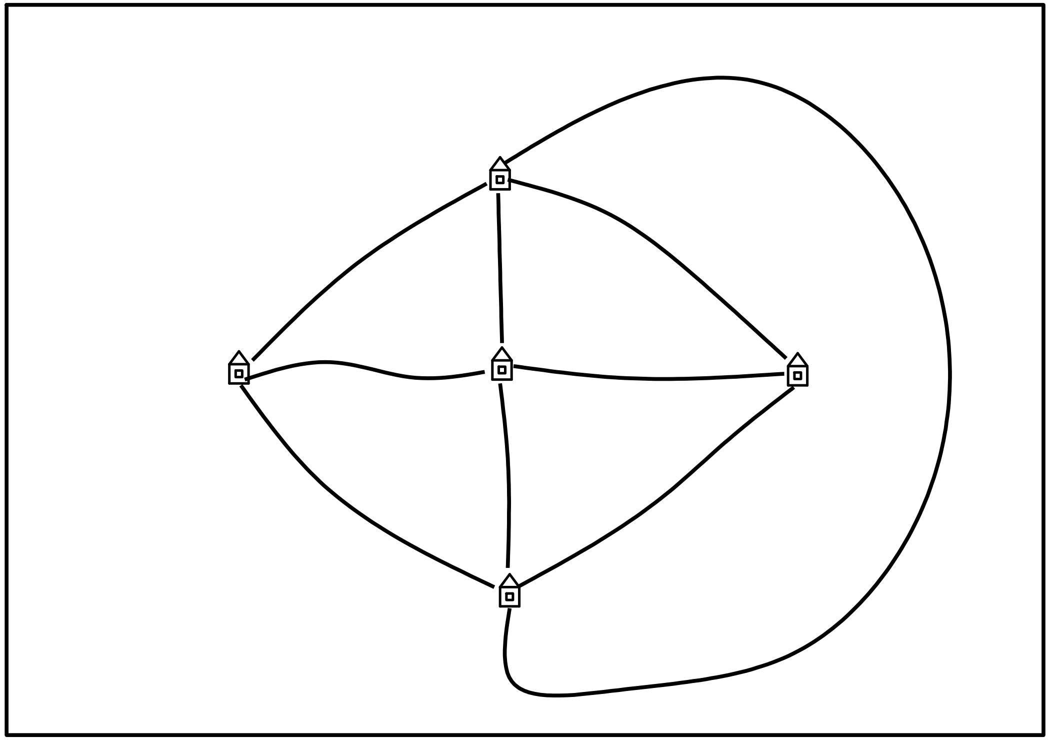


図２　５つの城（建設中）

定理２.　球面グラフにおいて，どの面も３本以上の辺で囲まれている (どの面の次数も３以上) ならば

$$3F \leqq \boxed{} E$$

である．従って，このとき，

$$V - \frac{1}{3}E \geqq 2$$

が成り立つ．

定理２.　球面グラフにおいて，どの面も３本以上の辺で囲まれている(どの面の次数も３以上)ならば

$$3F \leqq 2E$$

である．従って，このとき，頂点と辺の関係式

$$V - \frac{1}{3}E \geqq 2$$

が成り立つ.

実際

$3F \leqq 2E$ より $F \leqq \dfrac{2}{3}E$ だから

$$2 = V - E + F \leqq V - E + \frac{2}{3}E = V - \frac{1}{3}E$$

練習２. もし王様の遺言が実現されたとすると，$V = \square$，$E = \square$ だから，代入して計算すると

$$V - \frac{1}{3}E = \square$$

である.

ヒント　Eは異なる５つのものから２つを選び出す組み合わせの数に等しい.

練習２. もし王様の遺言が実現されたとすると，$V = 5$, $E = 10$ だから，代入して計算すると

$$V - \frac{1}{3}E = 5 - \frac{10}{3} = \frac{5}{3}$$

である.

しかし，この式の値は定理２によると**２以上**でなければならない.

矛盾！

結論

　５人の王子に課された「５つの城をそのどの２つの対も交差することのない道路で連結せよ」という王様の遺言は … 実現 …

できない!

練習３.　王様の遺言はドーナツ面（torus）上では実現されることを示せ（図4）.

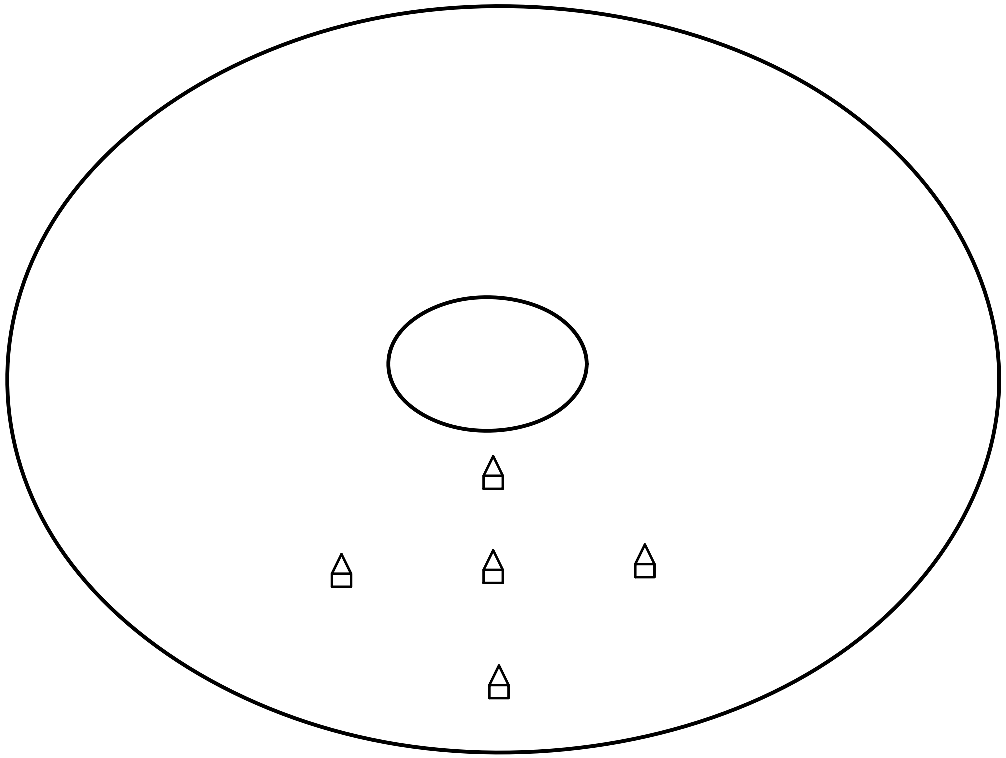


図４　ドーナツ面上の５つの城（問題）

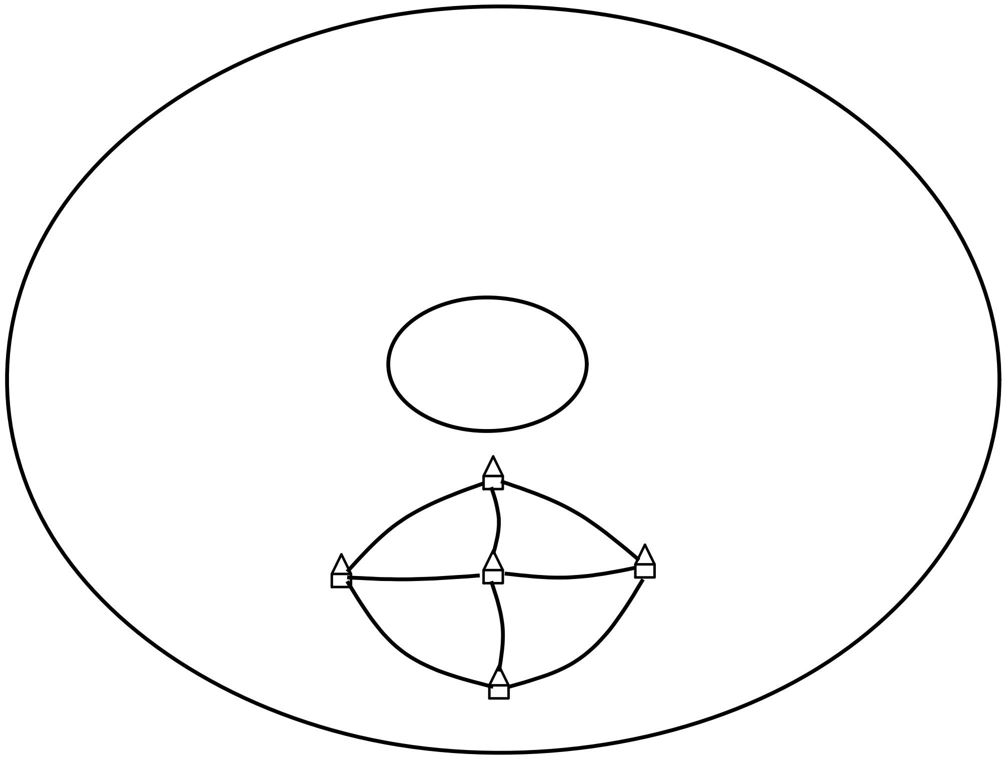


図４　ドーナツ面上の５つの城（建設中）

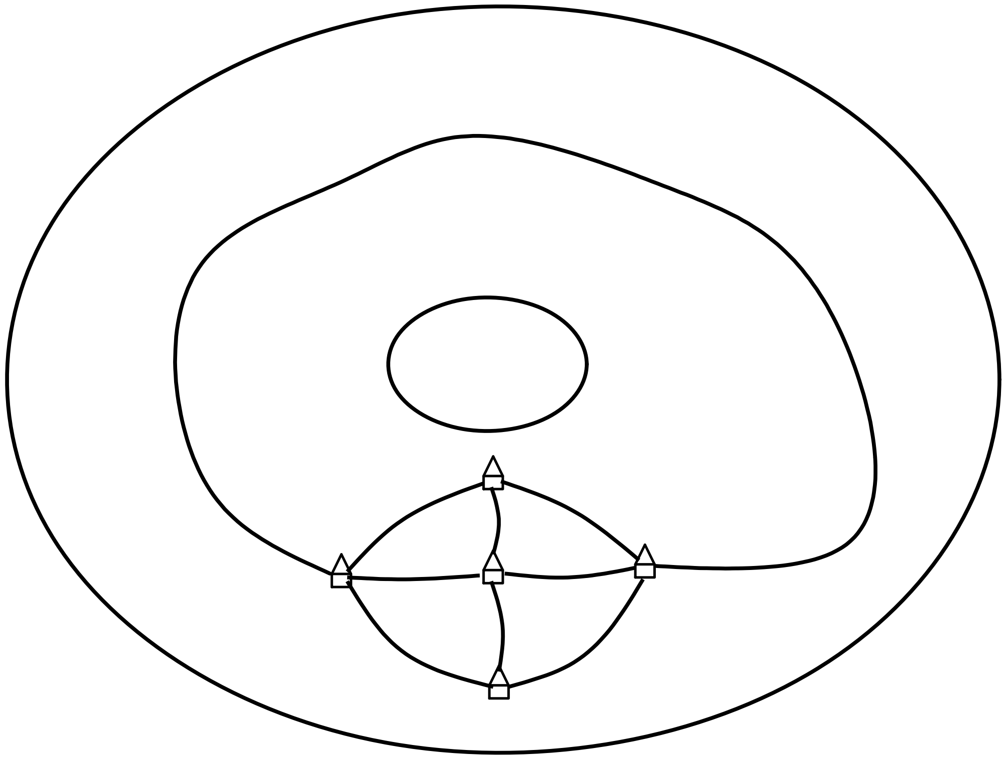


図４　ドーナツ面上の５つの城（建設中）

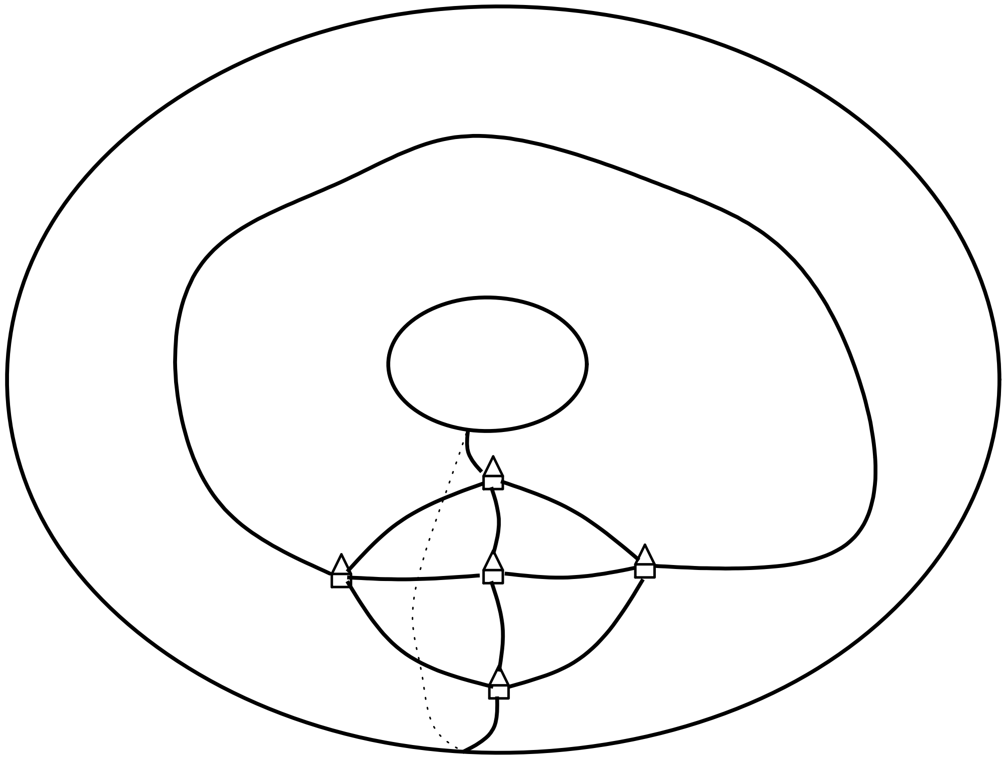


図4　ドーナツ面上の５つの城（完成）

練習4.　ドーナツ面（torus）上の王様の遺言によってできたグラフに対しては,

$V = \square$, $E = \square$, $F = \square$ だから,

$$V - E + F = \square$$

である.

練習4.　ドーナツ面（torus）上の王様の遺言によってできたグラフに対しては,

$V=5$, $E=10$, $F=5$ だから,

$$V-E+F=0$$

である.

定理３. （Euler のドーナツ面グラフ定理）torus上の（交差のない）グラフにおいて，V ，E ，F の間には

$$0 \leqq V - E + F \leqq 2$$

という関係式が成り立つ.

どの面の中にも**非分離閉曲線**が描けないようにすると，左辺で等号が成り立つ.（粗く言うと、どの面も多角形（多辺形）になっているということ.）

練習５．　図５において，上下の辺を糊で接着すると，どんな形ができるか．さらに，左右の辺も糊で接着すると，どんな形ができるか．

ＴＶゲームでＲＰＧとよばれるものにはよくある設定である．

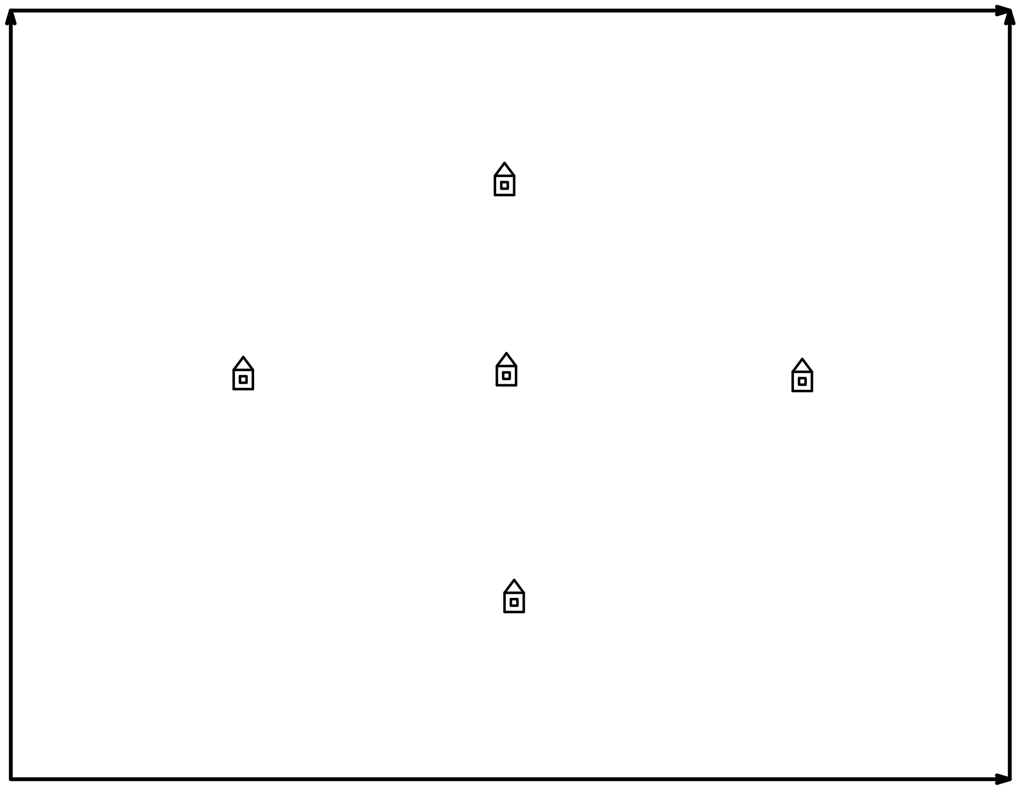
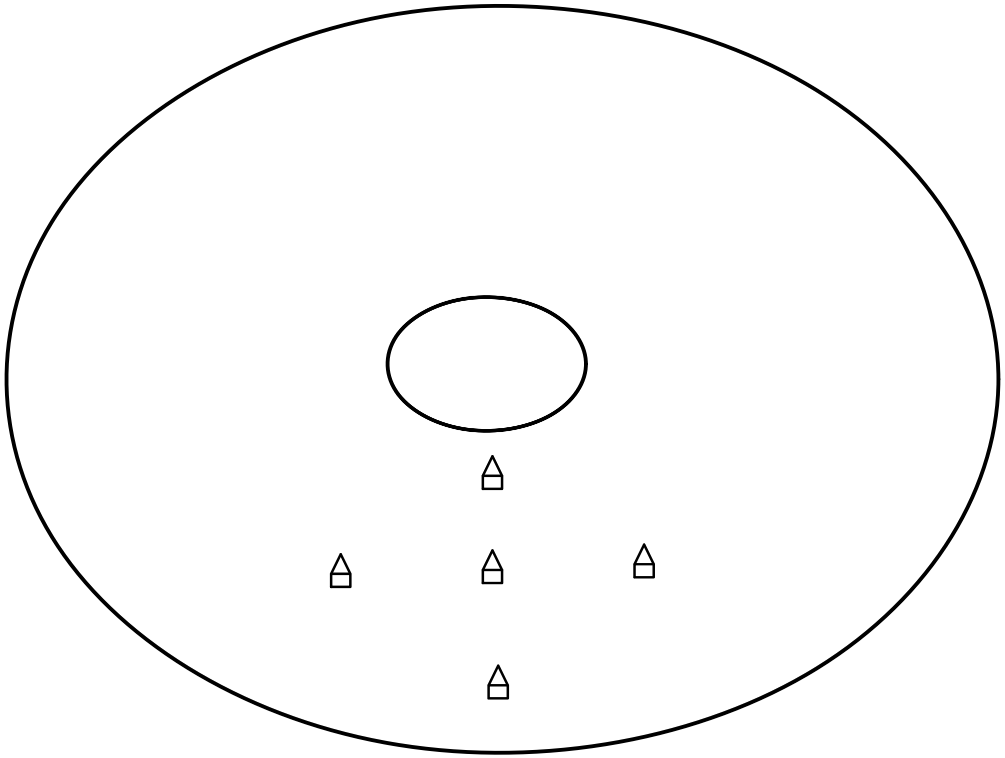


図５　上下の辺を糊で接着する．左右の辺も糊で接着する．

　RPGの主人公は球面世界ではなく、ドーナツ面世界に住んでいる！



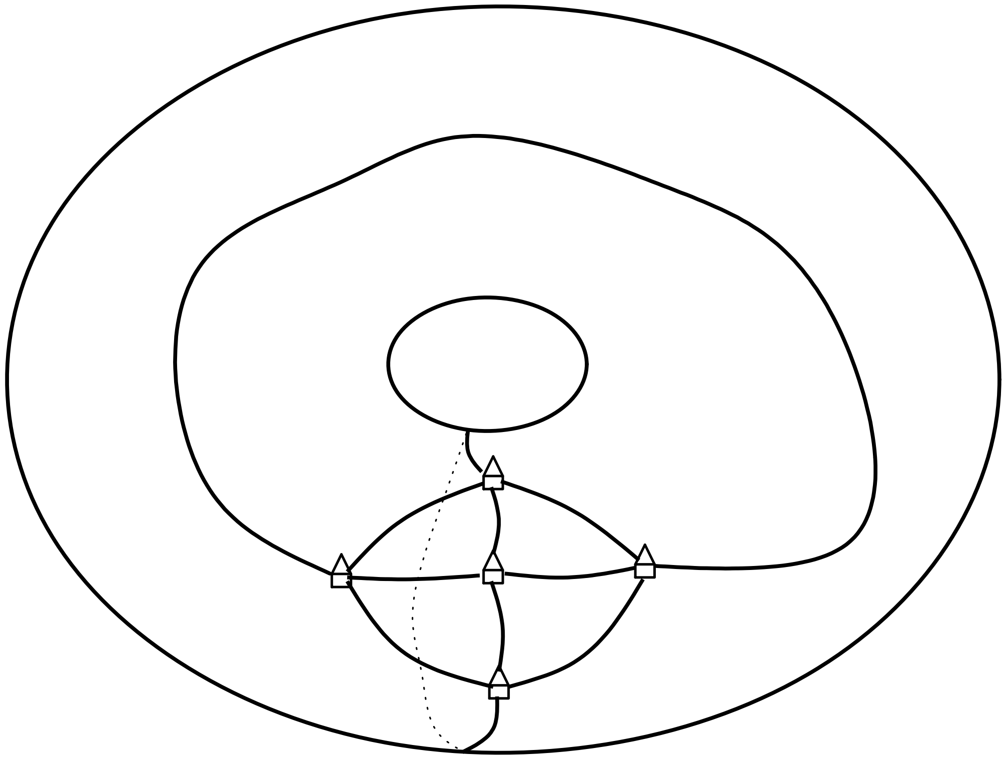


図４　ドーナツ面上の５つの城（完成）

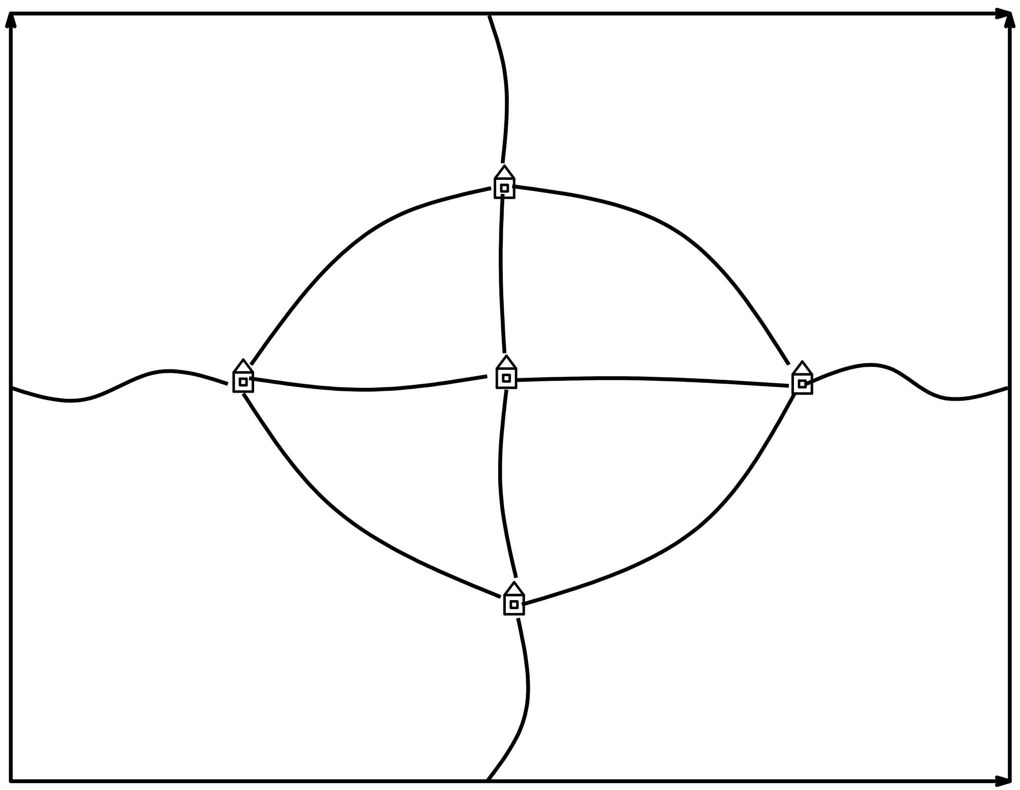
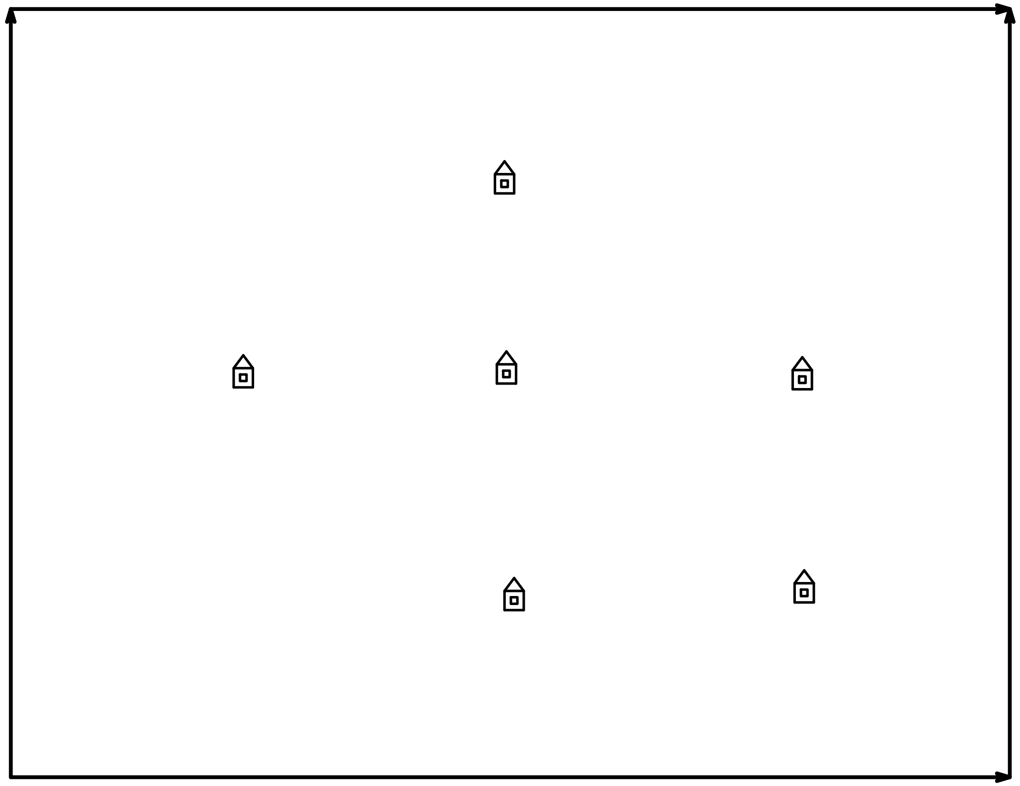
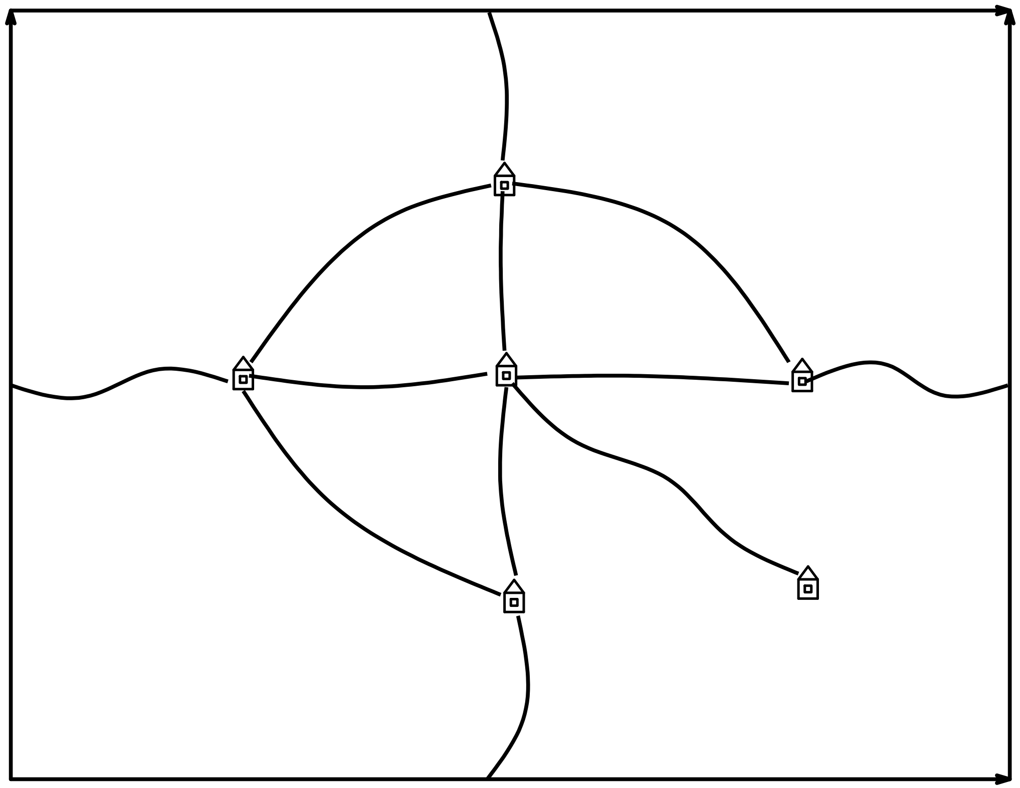


図５（ドーナツ面の展開図上での王様の遺言）

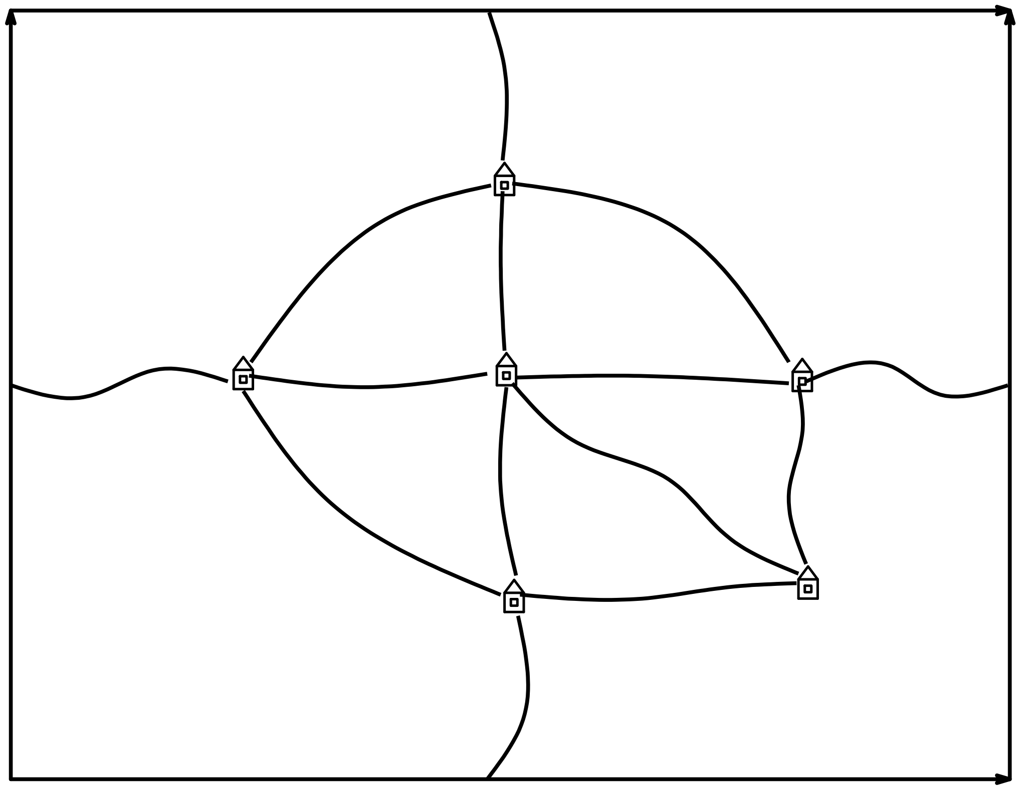
練習６．　図６を用いて，ドーナツ面上で６人の王子様問題を考えよ．



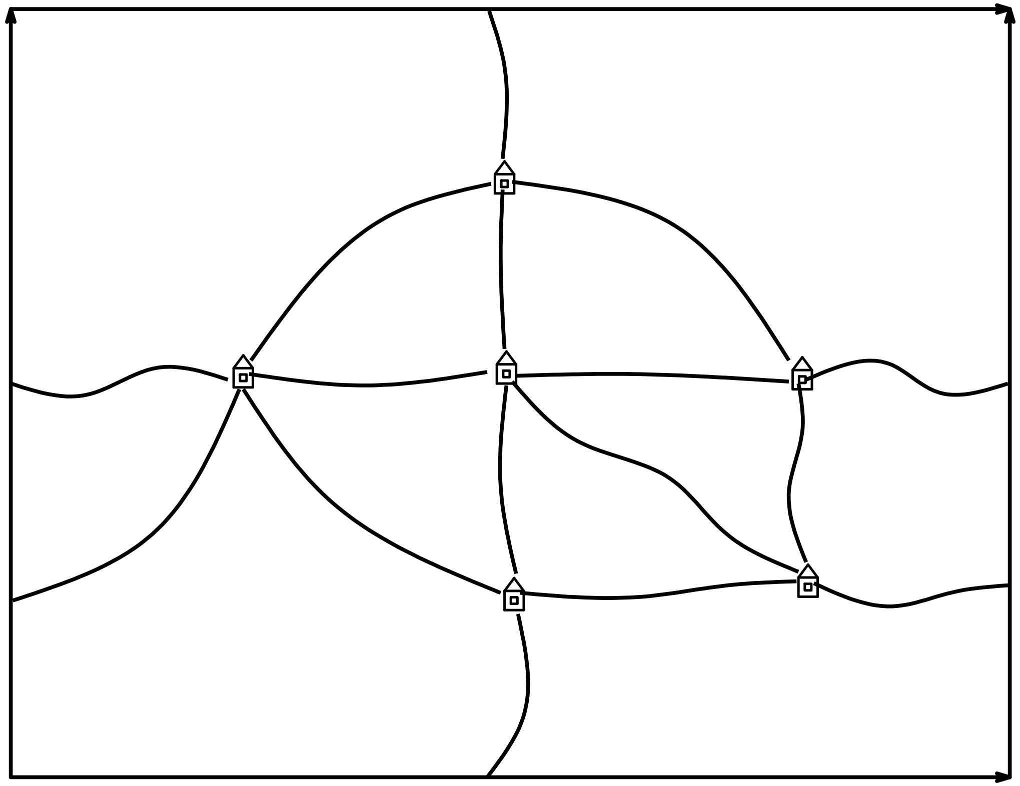
ドーナツ面上の６つの城（問題）



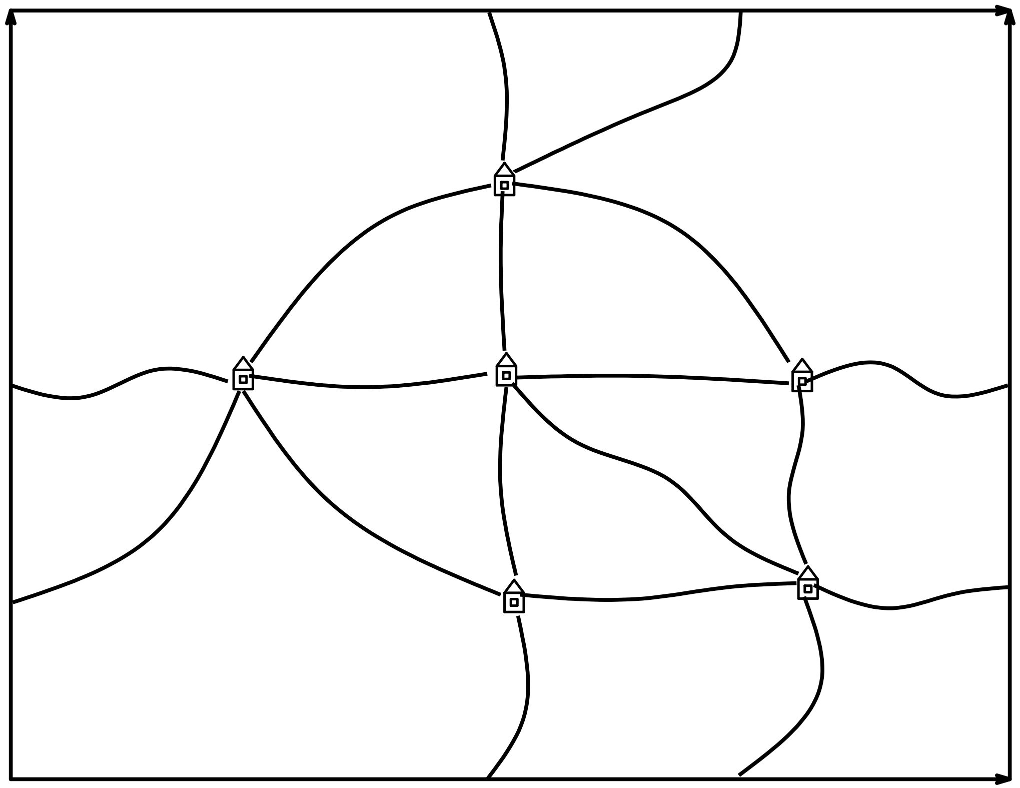
ドーナツ面上の６つの城（建設中）



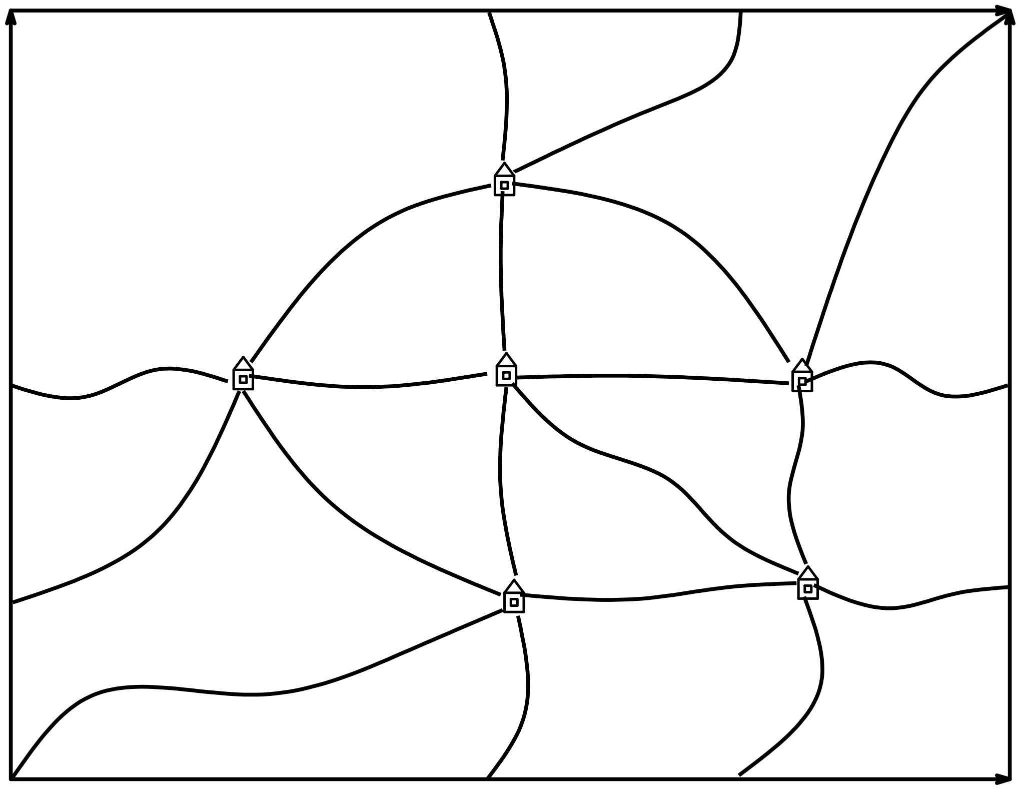
ドーナツ面上の６つの城（建設中）



ドーナツ面上の６つの城（建設中）

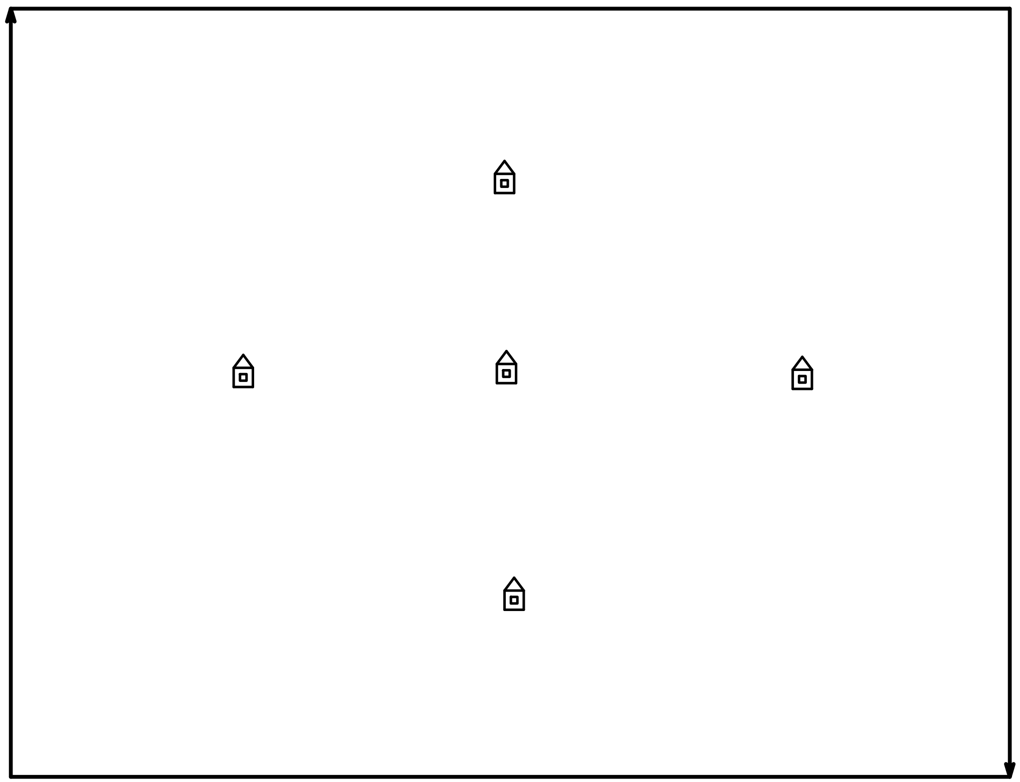


ドーナツ面上の６つの城（建設中）



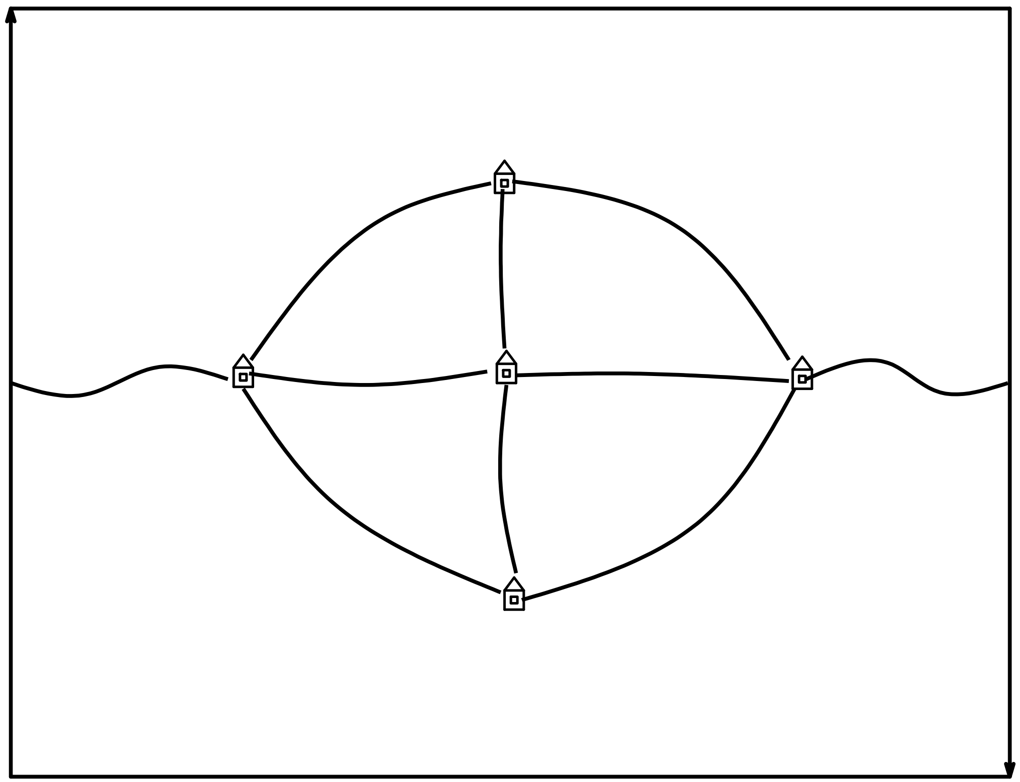
ドーナツ面上の６つの城（完成）

練習７．　Möbius帯上で５人の王子様問題を考えよ．Möbius帯はどんな展開図を持ち，どの辺どうしを接着すればよいか．

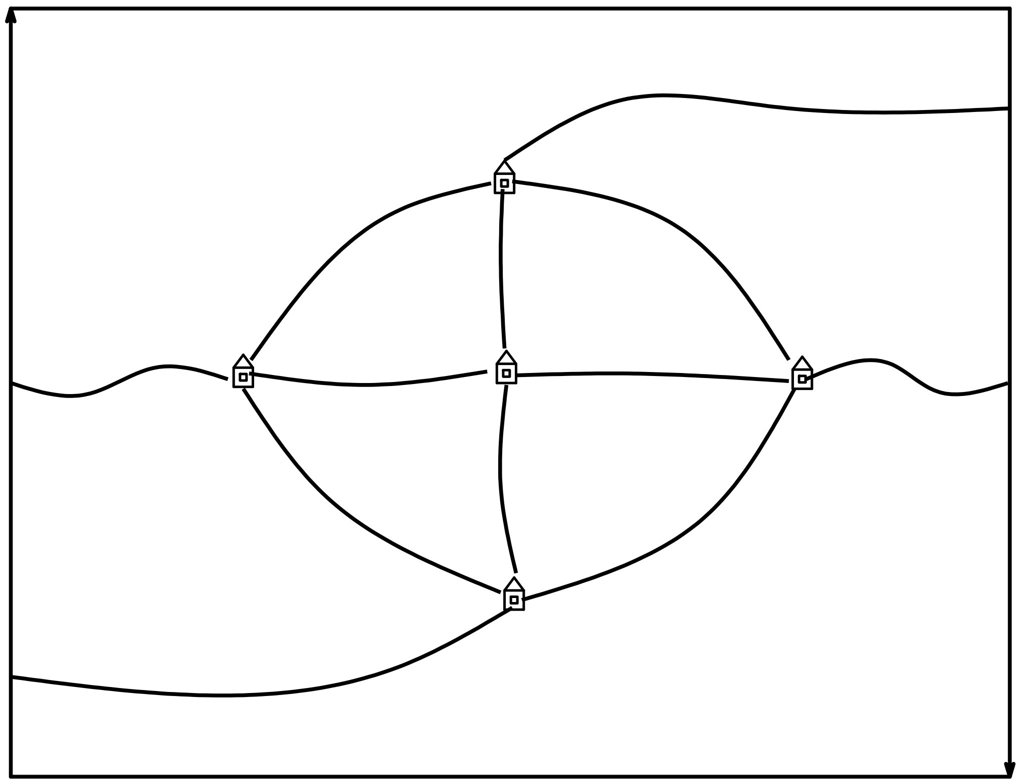


左右の辺を上下逆に糊で接着する.

Möbius帯上の５つの城（問題）

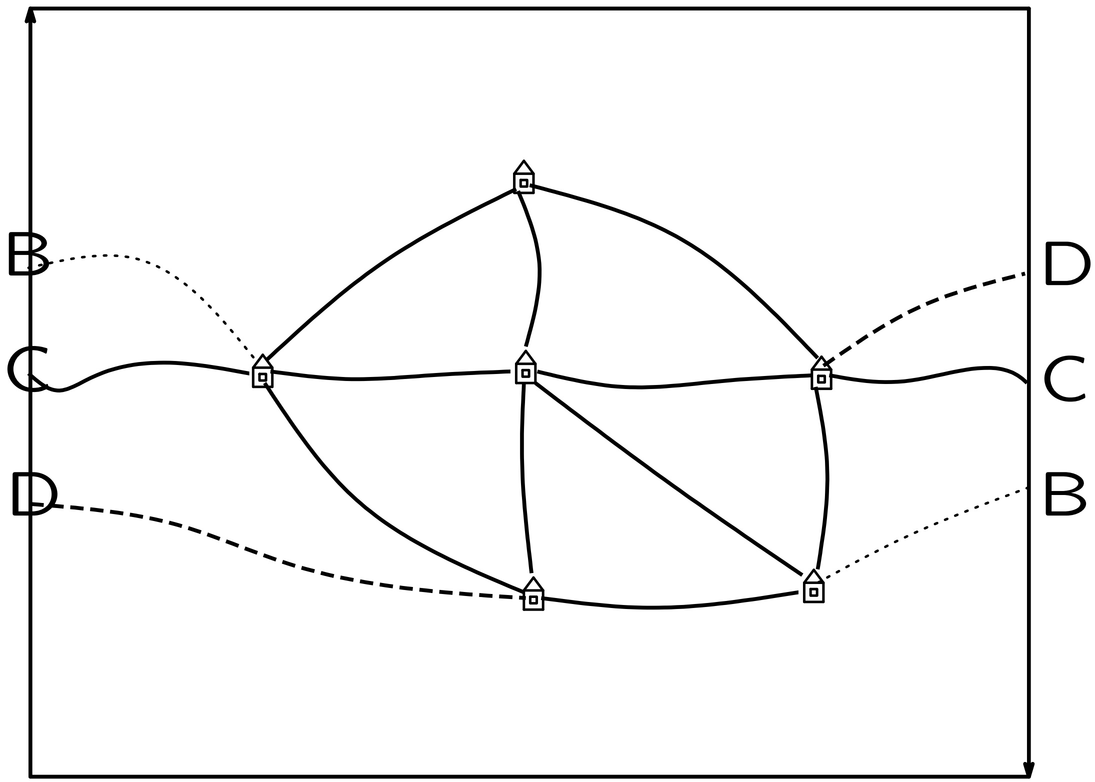


Möbius帯上の５つの城（建設中）

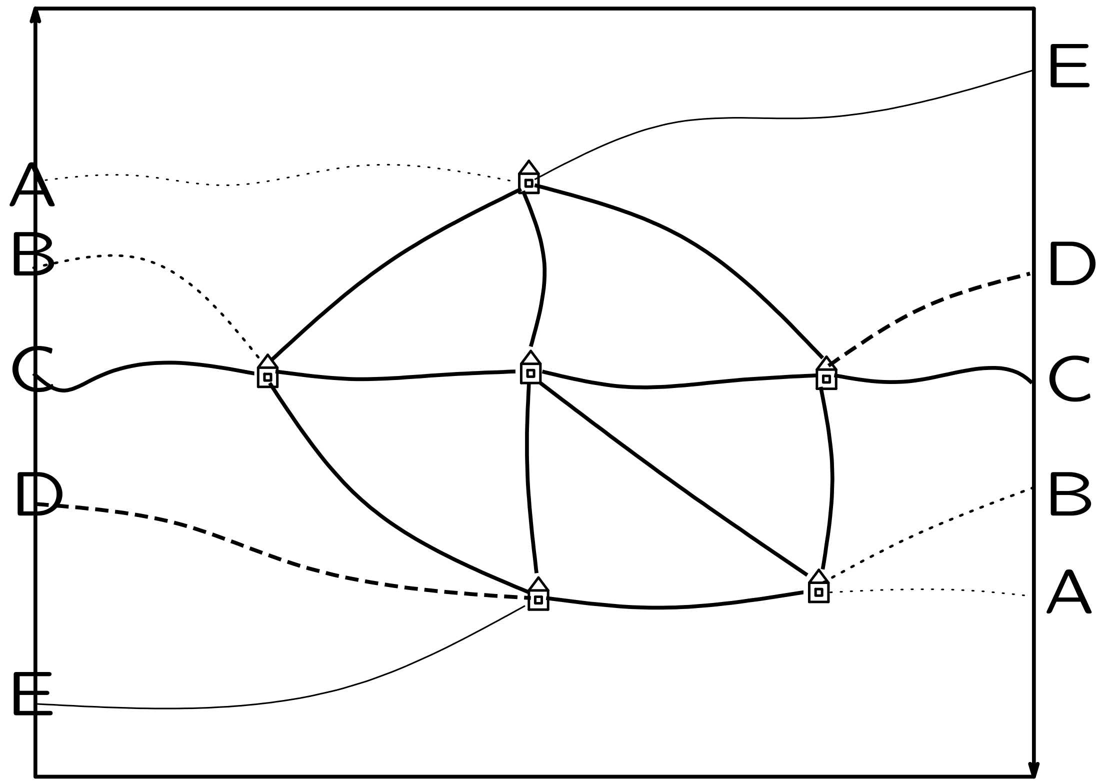


Möbius帯上の５つの城（完成）

- Möbius帯上で６人の王子様問題を考えよ.

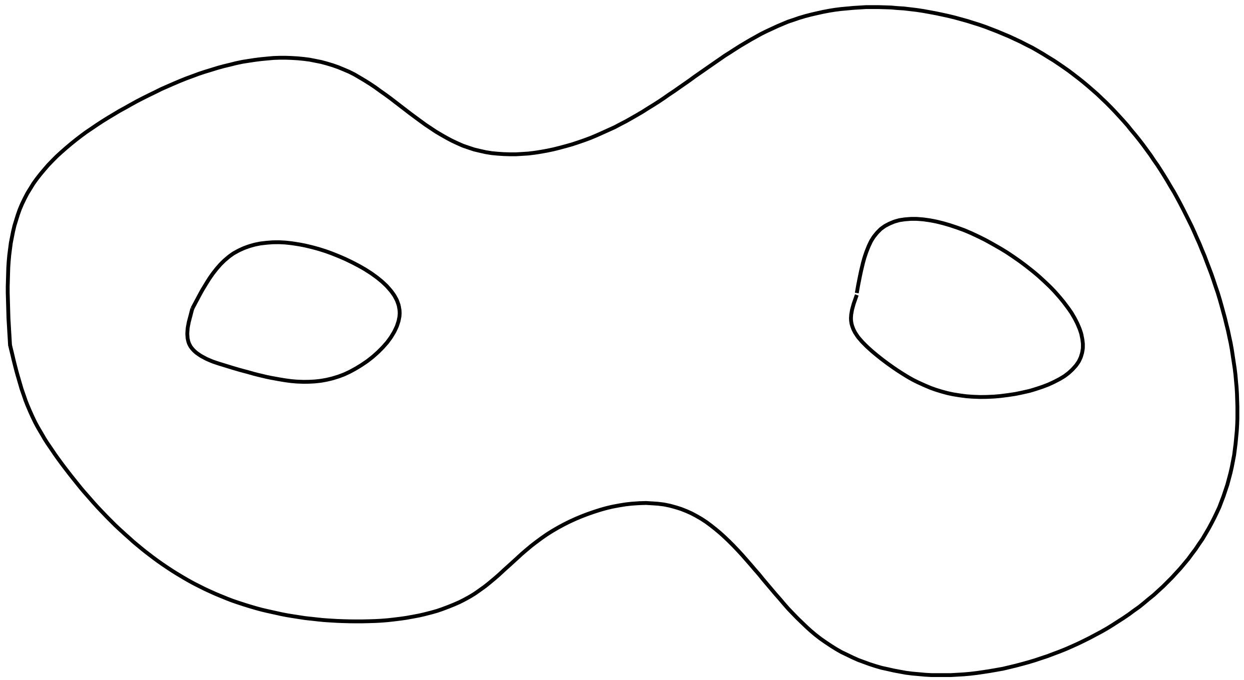


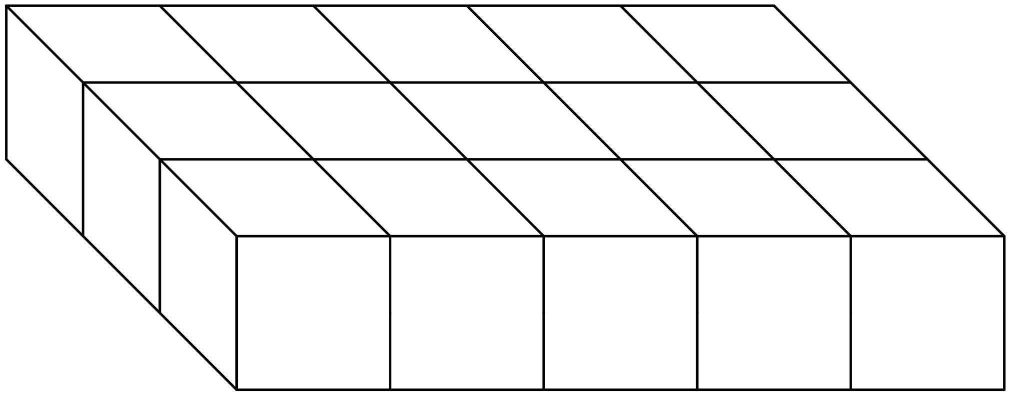
Möbius帯上の６つの城（建設中）



Möbius帯上の６つの城（完成）

練習８.　２個穴空きドーナツ面ではEulerの公式はどのようなものになると考えられるか.





$V - E + F = 2$ が成立している．

真ん中のブロックが抜けると，$V - E + F = \boxed{}$

- **一般化されたEulerの公式**

  g個穴空きドーナツ面ではつぎの公式がなりたつ.

$$2 - 2g \leqq V - E + F \leqq 2$$

どの面の中にも**非分離閉曲線**が描けないようにすると，左辺で等号が成り立つ.

定理4（Ringel-Youngs, 1968）

$$g(K_n) = \lceil \frac{1}{12}(n-3)(n-4) \rceil$$

例えば $g(K_5) = 1$,　$g(K_6) = \boxed{}$, $g(K_7) = \boxed{}$,

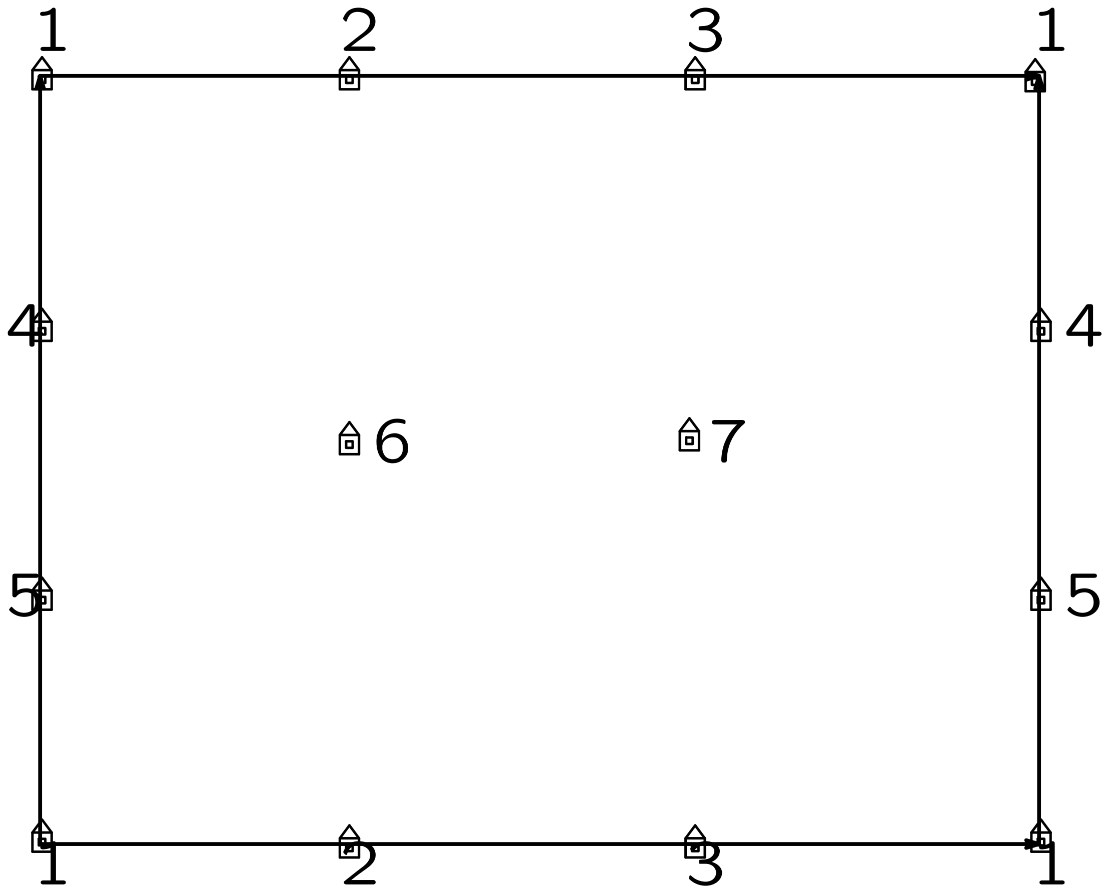
$g(K_8) = \boxed{}$, $\cdots$.

(証明の半分)

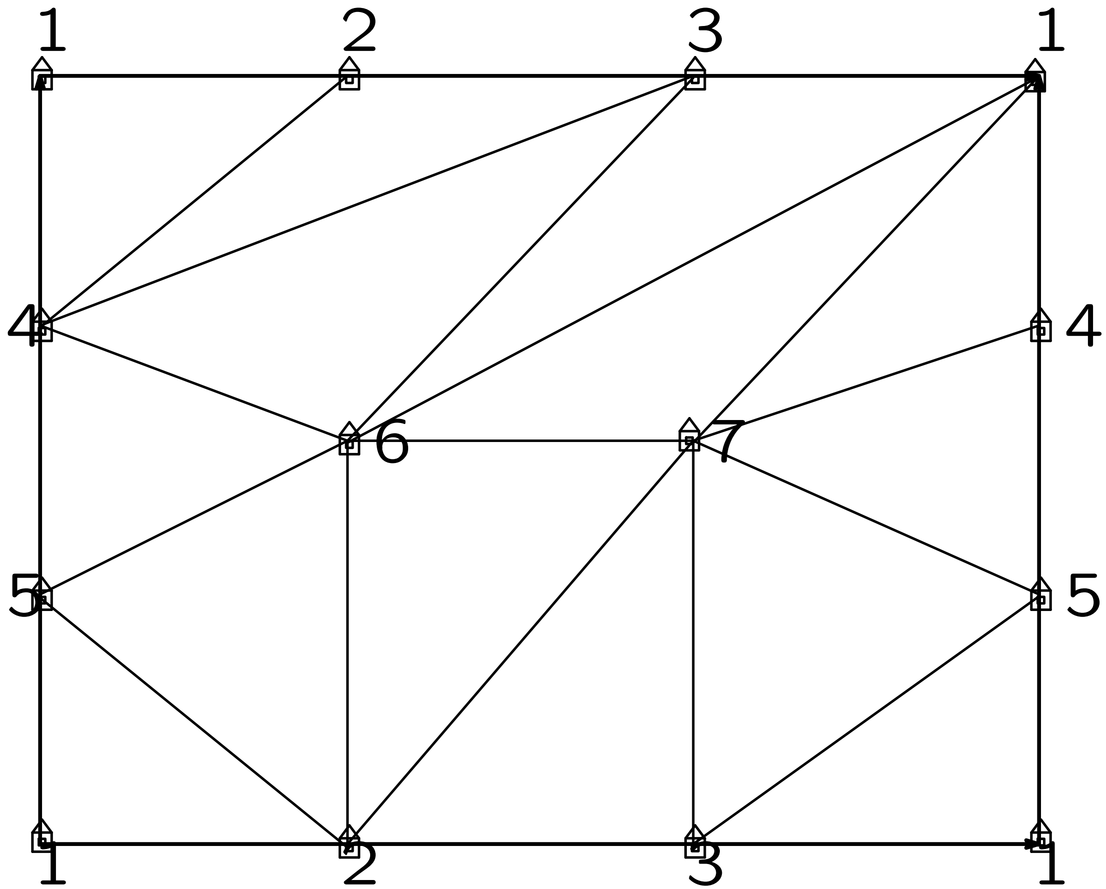
各面の次数は３以上だから，$3F \leqq 2E$．よって $2-2g \leqq V-\dfrac{E}{3}$.

したがって

$$
\begin{aligned}
g &\geqq \frac{1}{2}\left(\frac{E}{3}-V+2\right)=\frac{E}{6}-\frac{V}{2}+1 \\
&=\frac{1}{6}\cdot\frac{n(n-1)}{2}-\frac{n}{2}+1=\frac{1}{12}\left(n^2-7n+12\right) \\
&=\frac{1}{12}(n-3)(n-4)
\end{aligned}
$$



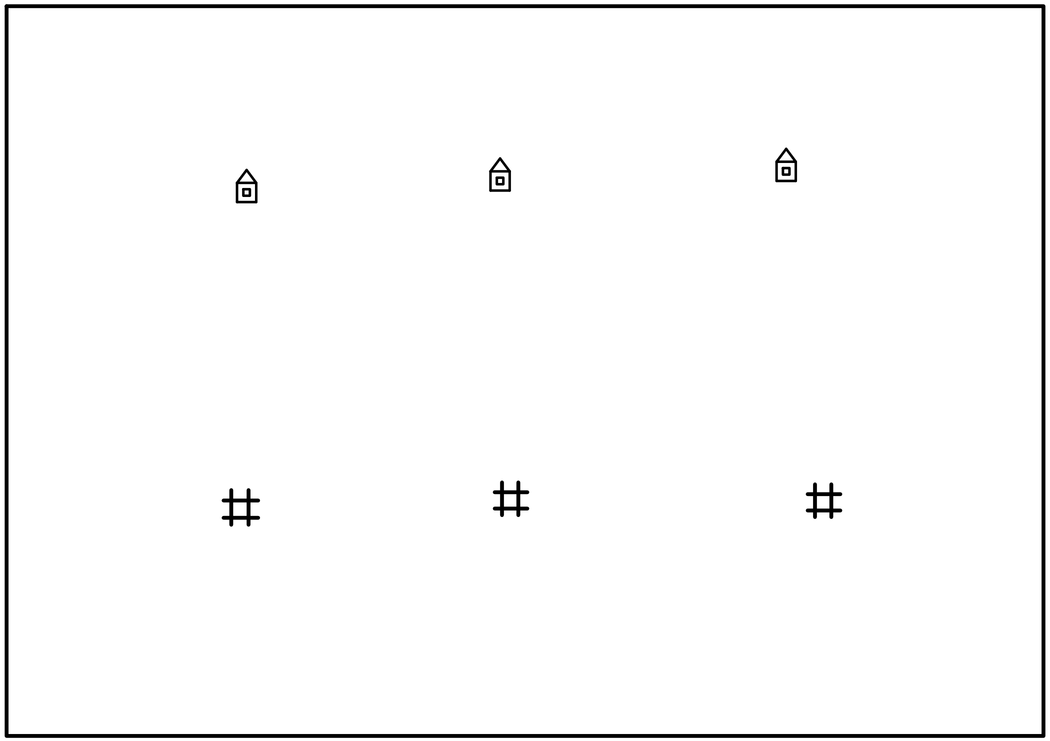
ドーナツ面上の７つの城（問題）



ドーナツ面上の７つの城（完成）

問題２.　仲の悪い隣組の３軒が水，油および糖蜜の井戸を共同で用いている．お互い出会うのを嫌って，３軒の各家から３つの井戸へ行く交差しない道を作ることにした．これは可能か．

（ヒント．定理２を少なくとも４本の辺で囲まれているグラフに対して考える）



定理4（Ringel-Youngs）

$$g(K_n) = \lceil \frac{1}{12}(n-3)(n-4) \rceil$$

$$g(K_{m,n}) = \lceil \frac{1}{4}(m-2)(n-2) \rceil$$

参考書

1．数学小景　（岩波書店）

2．グラフ理論へのアプローチ　（日本評論社）

3．正多面体を解く　（東海大学出版会）

4．美しい数学　（青土社）

- **Eulerの公式について**

(1)　Eulerの多面体公式とも呼ばれる.

　1750年11月のゴールドバッハ(Christian Goldbach, 1690−1764)宛の手紙に書かれていた.

　ゴールドバッハ予想

４以上の全ての偶数は，２つの素数の和で表せる.

(2)　同じ大きさの正多角形で囲まれ、どの頂点にも同数個の正多角形が集まっている凸の立体を**正多面体**または**プラトンの正多面体**という.

正多面体は 正４，６，８，１２，２０面体の５種類だけが存在する.

(3)　２種類以上の辺の長さが等しい正多角形を使ってできる凸多面体で，各頂点での正多角形の並び方が同じもので、正多角柱と正多角反柱を除いたものを**準正多面体**または**アルキメデスの多面体**という.

サッカーボールは正５角形１２個，正６角形２０個を使った準正多面体

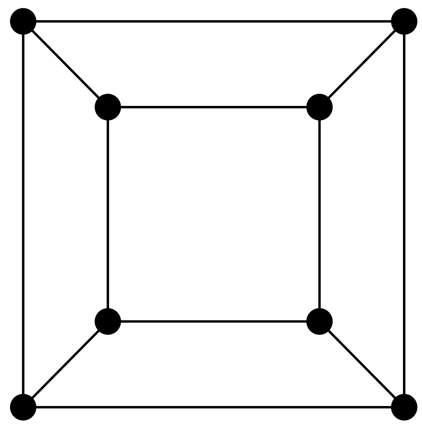
サッカーボールの各頂点に炭素原子がある分子を フラーレン C60という

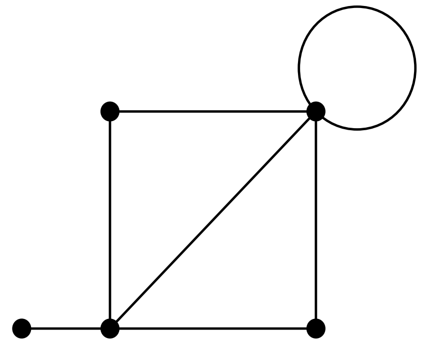
- 　頂点に接続している辺の本数をその**頂点の次数**という．ただし，ループは２と数える．

- **オイラーの一筆書き定理**

　あたえられたグラフが**オイラーグラフ**である必要十分条件はグラフが**連結**で，かつ，**全ての頂点の次数が偶数**であることである．

　あたえられたグラフが**半オイラーグラフ**である必要十分条件はグラフが**連結**で，かつ，**次数が奇数の頂点が２個**であることである．





- **問**

次のグラフは何筆書きできるか.