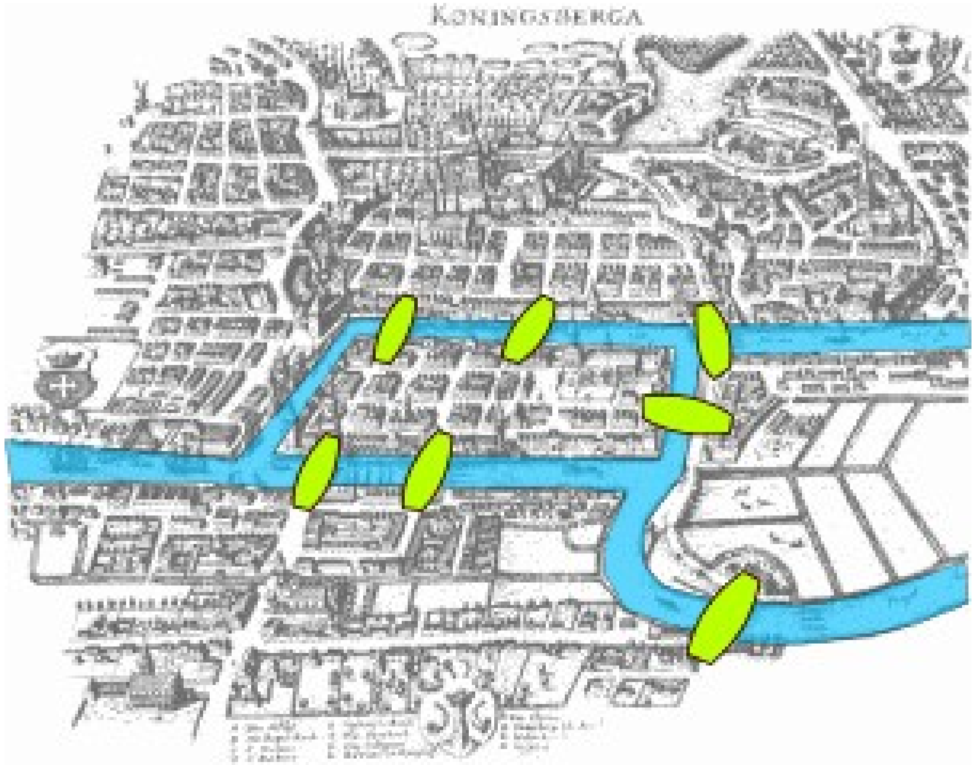
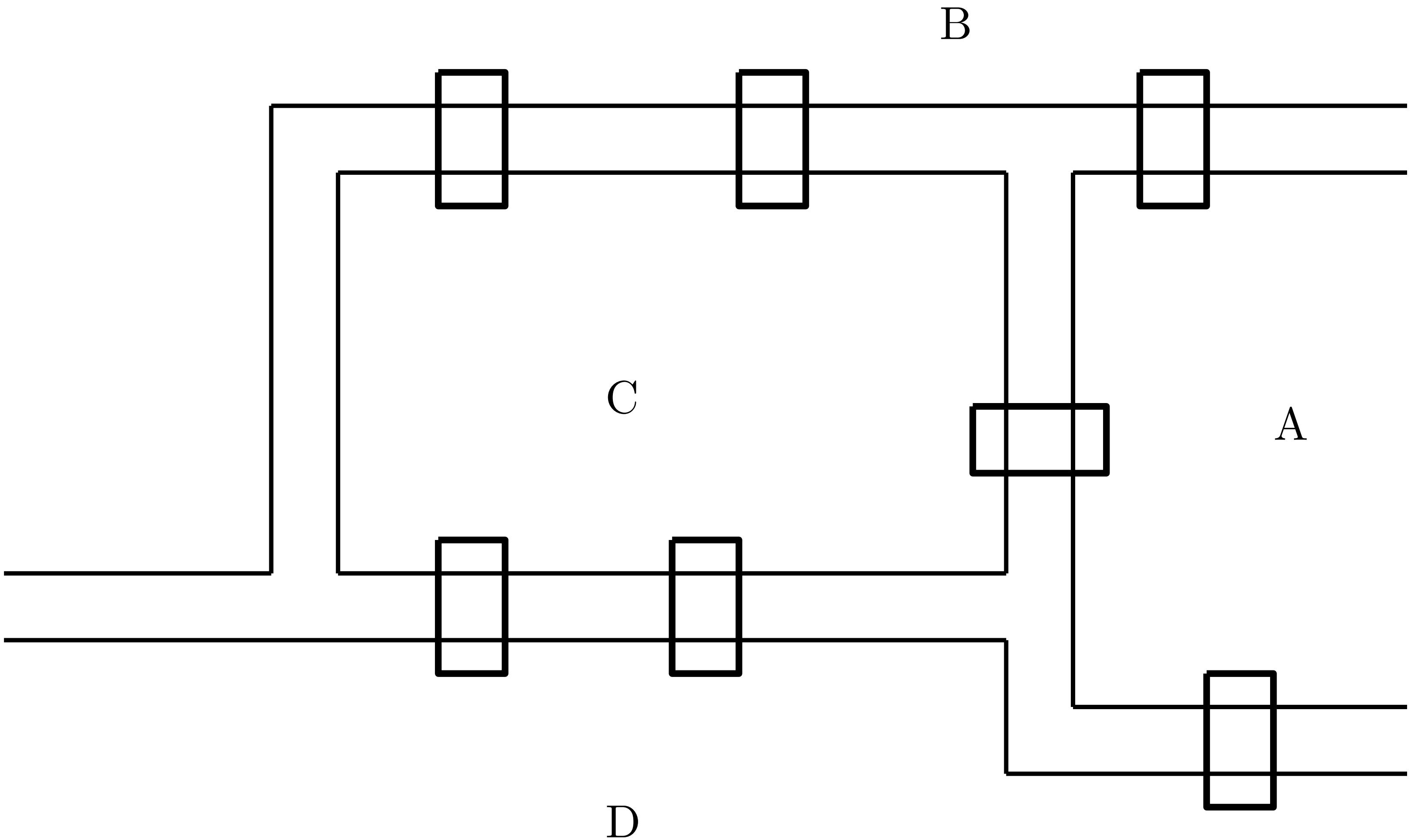
「一筆書きできますか？」

問題

全ての橋を 1 度ずつ渡って，出発点へ戻って来ることができるか．



ケーニヒスベルグの 7 橋



ケーニヒスベルグの 7 橋渡り問題

18 世紀の初め頃，プロシアのケーニヒスベルグの町には 7 本の橋が架かっていた．ケーニヒスベルグの人たちは，全ての橋を 1 度ずつ渡って，出発点へ戻って来る道順を見つけ出すことができなかった．そして，この仕事はできないものだと市民たちは信じ始めていました．

しかし，これが**不可能なことが証明**したのは，オイラー

[Solutio problematis ad geometriam situs pertinents.]

(位置の幾何学に関する一問題の解)　(1736)

であった．

オイラー

Leonhard Euler (1707–1783).

スイスの数学者．グラフ理論を含む多くの数学の分野の始祖.

18 世紀最大の数学者．数学の歴史の中でも数人中の一人に数えられている.

オイラーの肖像画はスイスの 10 フラン紙幣に使われている.

オイラー全集は全部で 74 巻もあり，年間の執筆ページ数は平均すると約 800 ページにも及ぶ．鳥が羽ばたくのと同じように、また人が呼吸するのと同じように計算をし続けたと伝えられている.


SCHWEIZERISCHE NATIONALBANK
BANCA NAZIUNALA SVIZRA
10
Zehn Franken
10
BANQUE NATIONALE SUISSE
BANCA NAZIONALE SVIZZERA
87C1180753
Dix Francs
87C1180753
10
Dieci Franchi

オイラーの解決法

橋の長さ，陸地，島の大きさ，形は何の役割も果たしていない．橋，陸地，島が

どのように繋がっているかという関係が大切.

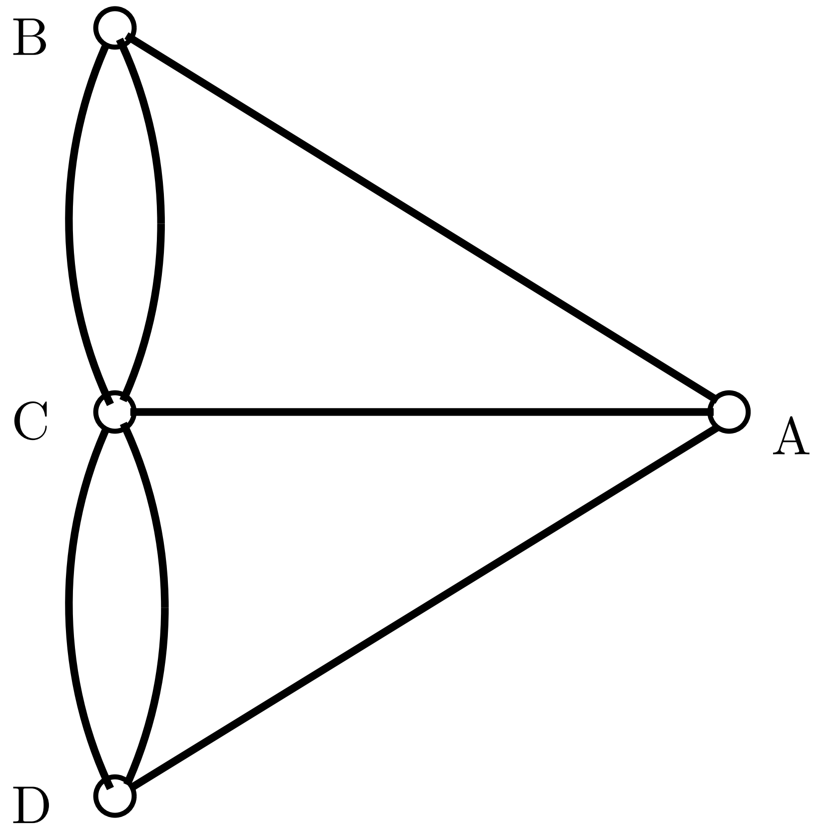
地図を簡略化して，陸地（島）を点，橋を線で表した．（グラフの考え方）

問題の道順が見つけられるかどうかは、この

グラフが一筆書きできるかどうか

を調べればよいことになる．

簡略化した地図



グラフの定義

いくつかの点（頂点，Vertex）とそれらを結ぶ線（辺，Edge）とからなる図形をグラフという．各辺の両端はいずれかの頂点に終わり，頂点以外では交差しない．

また，グラフが連結であるとは，グラフのどの 2 つの頂点を選んでも，幾本かの辺をたどって片方の頂点からもう一方へ行けることである．

グラフとして表されるものにはどんなものがあるか？

一筆書きの定義

全ての辺を丁度１回ずつ通る連続曲線を描くことが出来るとき，グラフは**一筆書きできる**という．ただし，頂点は何度通ってもかまわない．

一筆書きして，しかも，出発点（始点）に戻ってこれるとき，

オイラーグラフ

であるという．

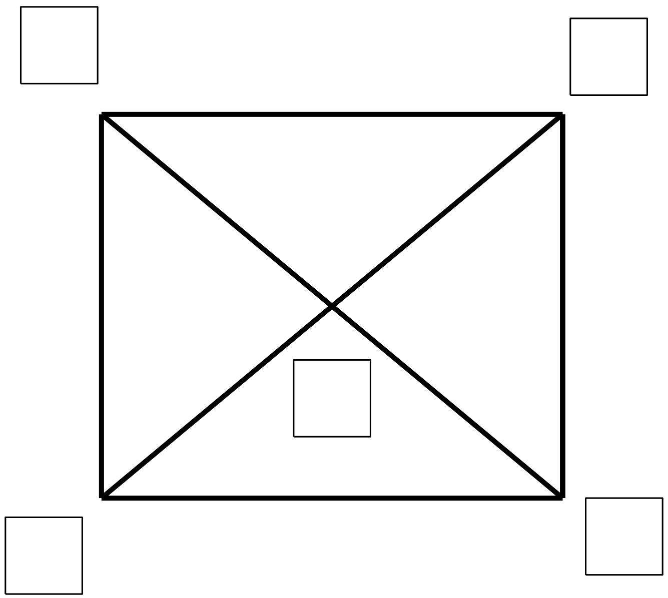
一筆書きできるが，始点と終点が異なる（出発点に戻ってこれない）とき，

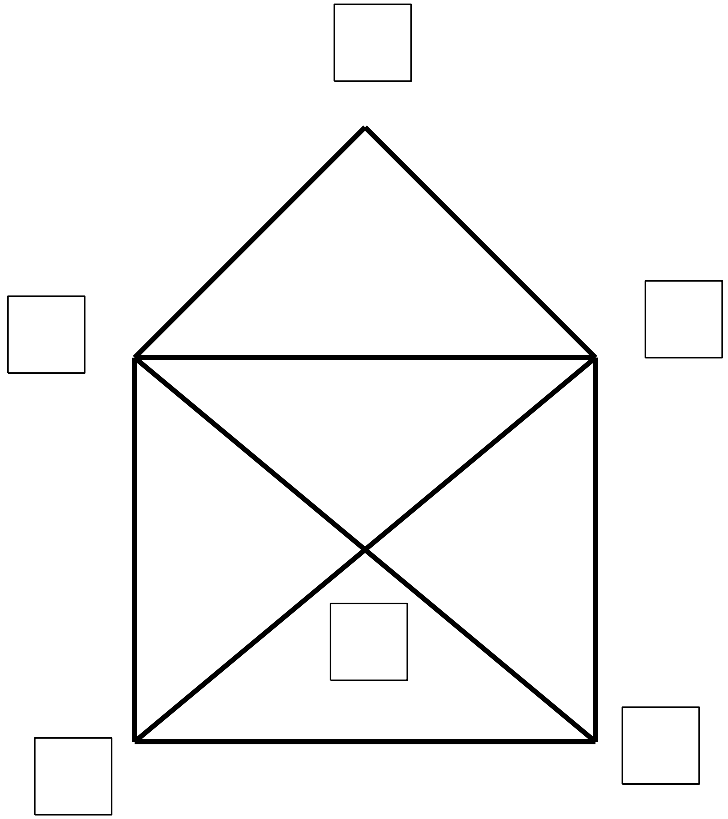
半オイラーグラフ

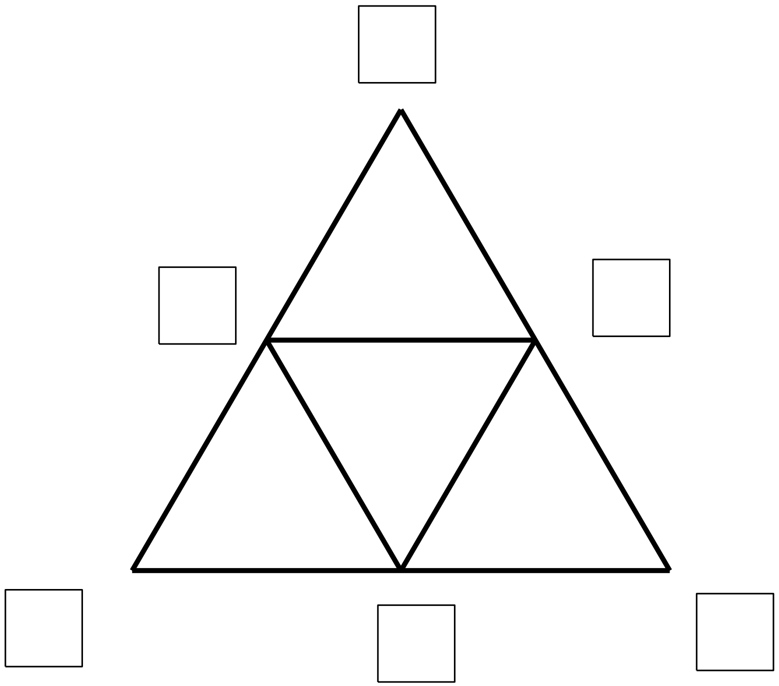
であるという（ことにする）．

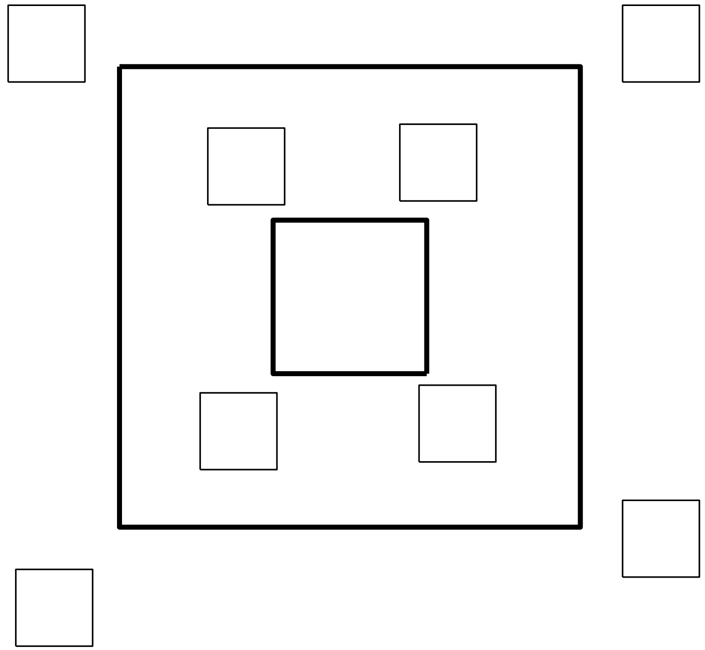
問題

一筆書きできる図形はどれとどれか？（頂点の丸印は省略）









頂点の次数

各頂点において，その頂点から出ている辺の本数を，その

頂点の次数

という．

また，その次数が奇数である頂点を**奇点**といい，次数が偶数である頂点を**偶点**という．

前の問題で各頂点の次数を書き込め．

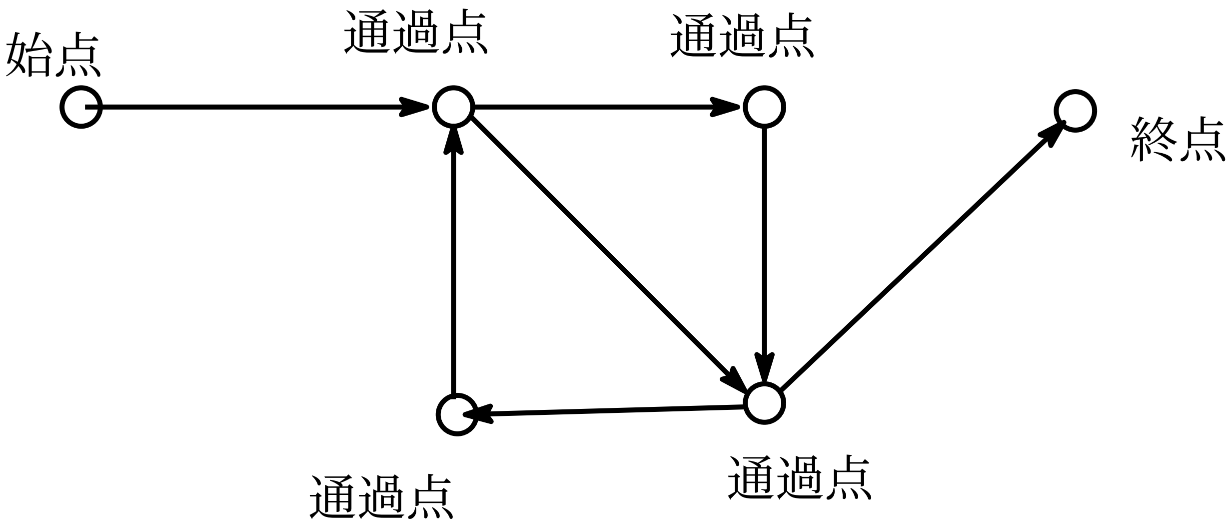
予想

グラフが一筆書きできるための条件を予想せよ.

始点，終点，通過点 (証明の準備)

半オイラーグラフの頂点は始点，終点各１つとそれ以外の通過点とからなる．それぞれの次数はどのようでなければならないか？

オイラーグラフのときはどうか.



オイラーの一筆書き定理

連結なグラフが**オイラーグラフ** $\Longleftrightarrow$ **奇点が 0 個**

連結なグラフが**半オイラーグラフ** $\Longleftrightarrow$ **奇点が 2 個**

（$\Rightarrow$ の証明）

　一筆書きができれば、出発点でも終点でもない頂点（通過点）はすべて偶点になることに注意すればよい.

握手補題

どんなグラフにおいても各頂点の次数の総和は，辺の個数の 2 倍に等しい．とくに，**各頂点の次数の総和は偶数**である．

（証明）　グラフを杭とロープに例えると、頂点の次数＝ロープの結び目の数であることに注意すると、ロープの結び目の数の総和＝ロープの本数の 2 倍である．

握手補題の系

どんなグラフでも奇点は偶数個

（$\Leftarrow$ の証明）

逆の証明には辺の本数 n に関する**数学的帰納法**をもちいる．

$n = 1$ のときは，明らかに成り立つ．

$n \leqq k$（k 本以下の辺をもつ）連結なグラフにおいて，帰納法の仮定が成り立つと仮定する．

いま，$k+1$ 本の辺をもつ連結なグラフ $\mathbf{G}$ をもってくる．

$\mathbf{G}$ から辺を 1 本除いて，k 本の辺をもつグラフにするが，$\mathbf{G}$ にループがあれば，そのループを除けば，帰納法の仮定から，もとの $\mathbf{G}$ も一筆書きができる．

そこで $\mathbf{G}$ にループがないときだけ考えればよい．

(i) **G** の奇点が 0 個のとき

G から（任意に）頂点 P、Q を結ぶ辺 $\overline{\mathrm{PQ}}$ を除く（辺だけ除く）.
残ったグラフは連結（辺は k 本）で、奇点が 2 個である（なぜか？）.
従って，P→ $\cdots$ →Q の一筆書きができる.
この後，Q→P で **G** の元へ戻る一筆書きができる.

(ii) $\mathbf{G}$ の奇点が 2 個のとき

P を奇点の片方とする．$\mathbf{G}$ から $\overline{\mathrm{PQ}}$ を除く．（P は偶点になった．）

(ii-a) $\mathbf{G} - \overline{\mathrm{PQ}}$ が連結なとき

(ii-a-1) Q が奇点だったとき（残ったグラフでは Q は偶点）

Q$\to \cdots \to$Q の一筆書きができる．その後 Q$\to$P.

(ii-a-2) Q が偶点だったとき（残ったグラフでは Q は奇点）

残ったグラフに奇点が 1 個ある．その点を R とする．

R$\to \cdots \to$Q の一筆書きができる．その後 Q$\to$P.

(ii-b) $\mathbf{G}-\overline{\mathrm{PQ}}$ が連結でないとき

$\mathbf{G}-\overline{\mathrm{PQ}}$ は P を含む成分 $\mathbf{G}_1$ と，Q を含む成分 $\mathbf{G}_2$ に分かれる．

$\mathbf{G}_1$ は連結で，奇点はないので，P$\rightarrow\cdots\rightarrow$P の $\mathbf{G}_1$ の一筆書きができる．

(ii-b-1) Q が奇点だったとき（残ったグラフでは Q は偶点）

Q$\rightarrow\cdots\rightarrow$Q の $\mathbf{G}_2$ の一筆書きができる．Q$\rightarrow$P のあと，P$\rightarrow\cdots\rightarrow$P の $\mathbf{G}_1$ の一筆書きに続ける．

(ii-b-2) Q が偶点だったとき（残ったグラフでは Q は奇点）

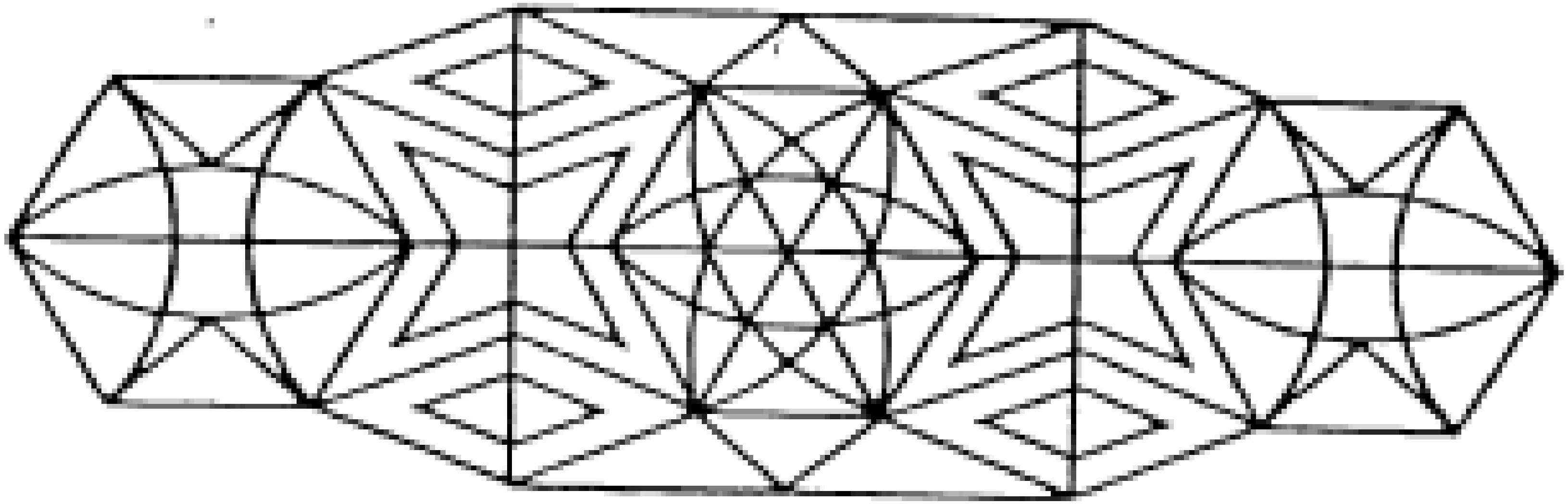
$\mathbf{G}_1$ に奇点が 1 個ある．その点を R とする．

R$\rightarrow\cdots\rightarrow$Q の一筆書きができる．その後 Q$\rightarrow$P．P$\rightarrow\cdots\rightarrow$P の $\mathbf{G}_1$ の一筆書きに続ける．

Fleury のアルゴリズム

オイラーグラフで実際に一筆書きをする（**オイラー閉路**を得る）ためのアルゴリズム．

適当な頂点から出発する．現在いる頂点に接続している辺で，それを消すことによってグラフが連結でなくならないものを選択し，その辺のもう一方の端の頂点に行き，その辺をグラフから除く．この操作を，全ての辺がグラフから除かれるまで続ける．

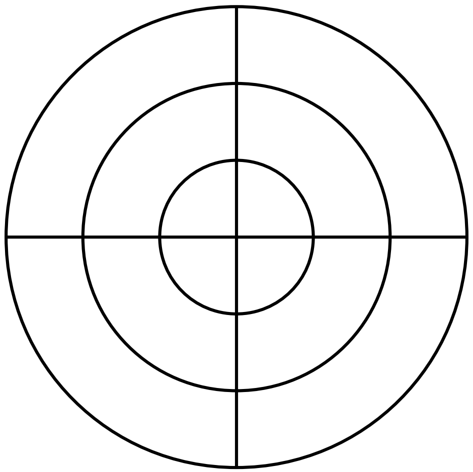


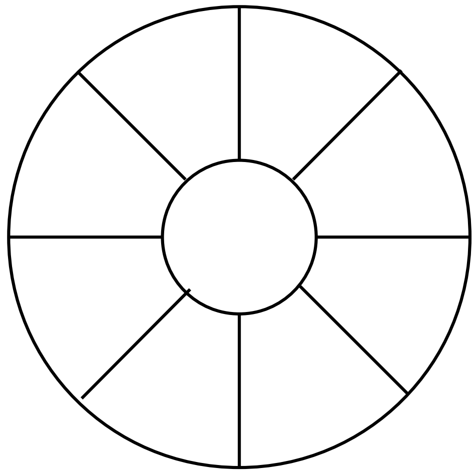
問

ドミノとオイラーグラフの関係を調べよ.

問

次のグラフは何筆書きできるか.





n 筆書き

1. 奇点が奇数個のグラフは存在しない.
2. 奇点が 0 個の連結なグラフはオイラーグラフ.
3. 奇点が 2 個の連結なグラフは半オイラーグラフ.
4. 奇点が $2n \quad (n \geqq 2)$ 個の連結なグラフは n 筆書きできる.

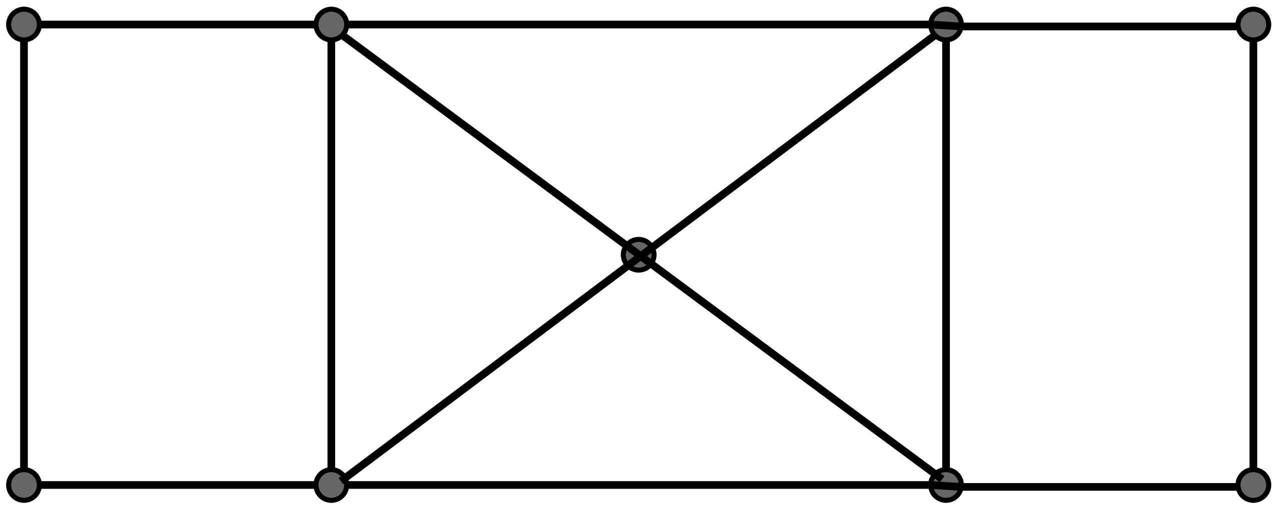
何度か一筆書きを行い，一度通った辺は除いていくことにする．一回の一筆書きで，奇点を 2 個偶点にできる．従って，奇点が $2n$ 個の連結なグラフは少なくとも，n 筆は必要である.
一方，奇点が 4 個あるとき，そのうちの 2 個を仮の辺で結ぶと，奇点が 2 個になる．このグラフは一筆書きができる．途中で仮の辺を通るので，もとのグラフは 2 筆書きできる.

奇点が $2n$ 個の連結なグラフは，何個仮の辺をつけると，一筆書きできるようになるか考えると，n 筆書きできることが示せる.

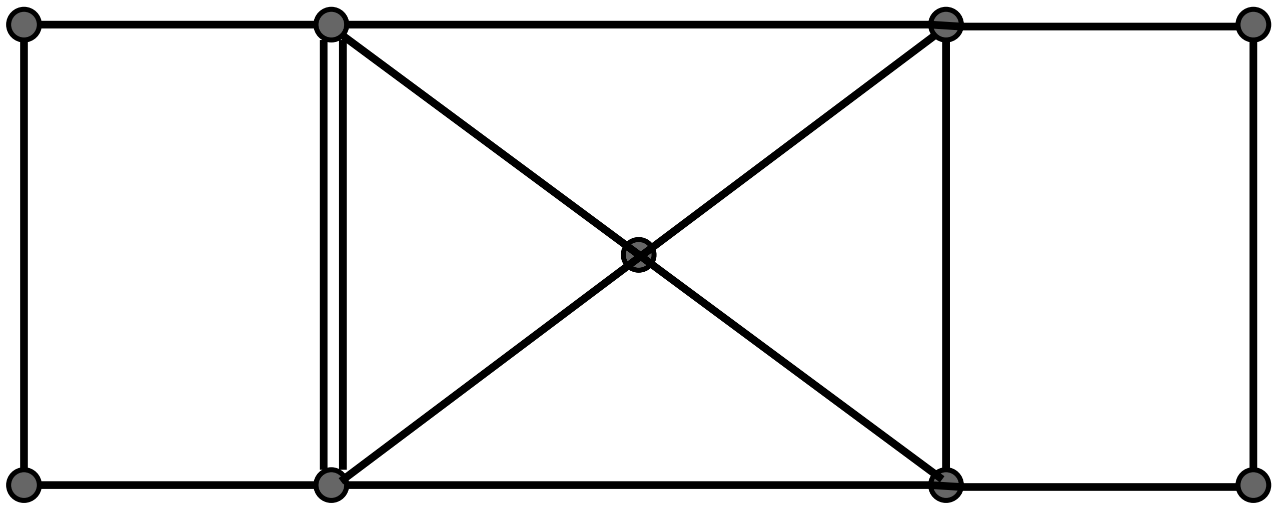
公園の除雪

次の公園のすべての道の雪を除雪して、もと（車庫）へ戻りたい．ただし，移動する距離を最短にしたい．どのような道順をたどればよいか．距離は図を見たままとする．

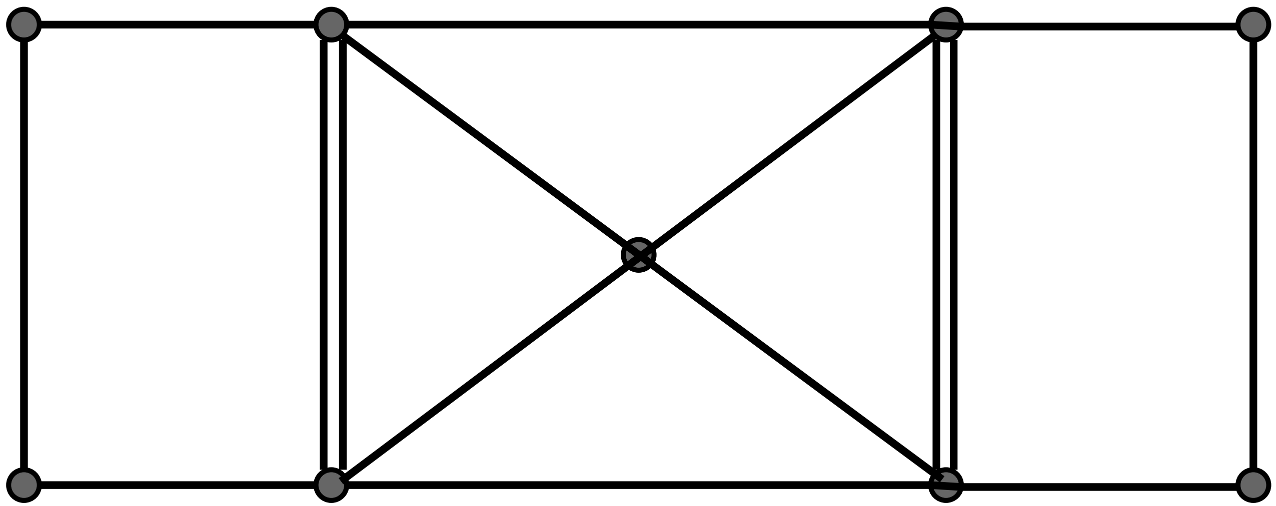
1. 奇点が 0 個のとき



2. 奇点が 2 個のとき



3. 奇点が 4 個以上のとき



中国郵便配達員問題 (Chinese postman problem)

　郵便配達員が，担当区域の全ての通りを通って郵便物を配達し，それから郵便局に戻ろうとしている．配達のために回る総距離を最小にするには道順をどのように決めればよいか.

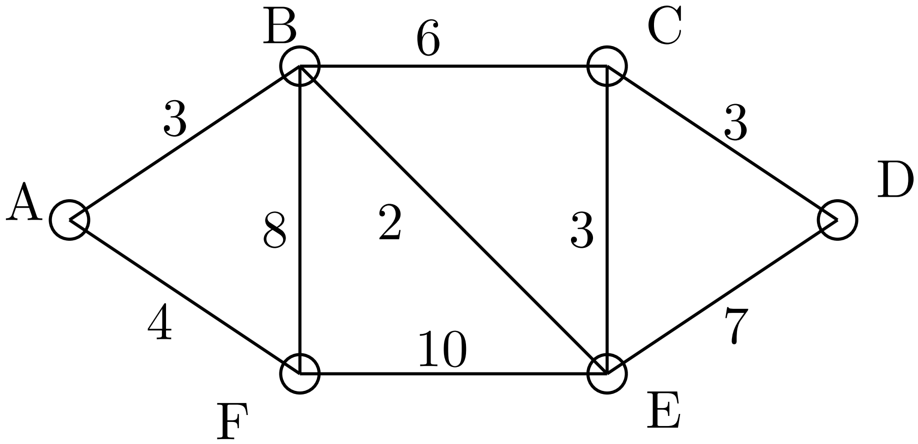
　中国人の数学者　管　梅谷 (Mei-Gu Kwan)　によって 1962 年定式化された問題.

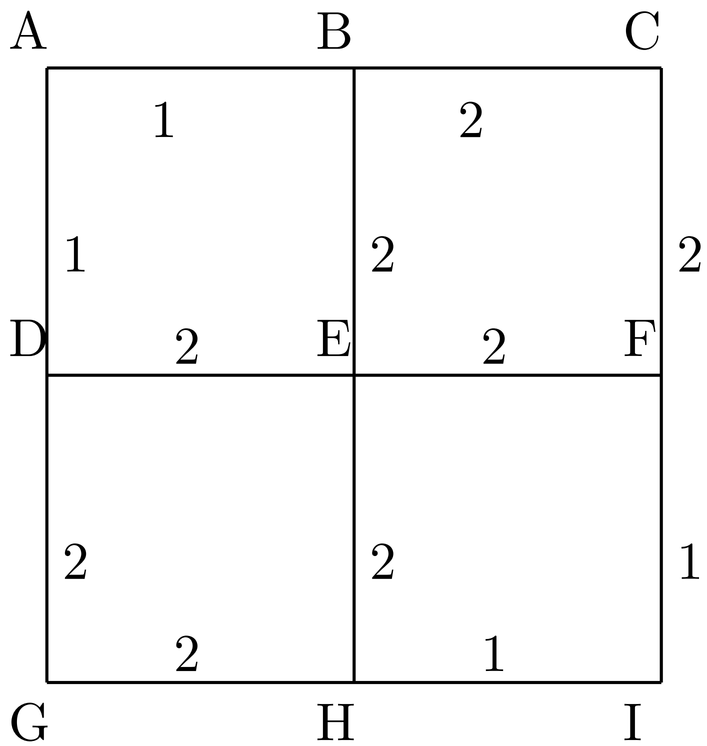
重みつきグラフ (Weighted Graph)

　重みつきグラフとは，その全ての辺に，その辺の重み (weight) とよばれる，正の数が割り当てられているグラフのことである.

　どの辺もすべて少なくとも 1 度は通ってもとへ戻る道で，その重みの総和が最小なるものを求めよ.

問 (Chinese postman problem)




A
B
C
1
2
1
2
2
D
2
E
2
F
2
2
1
2
1
G
H
I

参考書・資料

1. 数学小景　（岩波書店）
2. グラフ理論へのアプローチ　（日本評論社）
3. 文科系の応用数学入門　（牧野書店）
4. 組み合わせ最適化　（朝倉書店）
5. 美しい数学　（青土社）
6. 数は魔術師　（白揚社）
7. Wikipedia