

グラディエント・フローによる4次元 $N=1$ 超対称ヤン・ミルズ理論における超対称カレントの構成

鈴木博

九州大学

2017/07/18 益川塾 @ 京都産業大学

- K. Hieda, A. Kasai, H. Makino and H.S., “4D $\mathcal{N} = 1$ SYM supercurrent in terms of the gradient flow,” PTEP **2017**, no. 6, 063B03 (2017) [arXiv:1703.04802 [hep-lat]].

- 素粒子論での場の量子論の特徴

正則化 vs 対称性

- 素粒子論での場の量子論の特徴
- 極めて高い対称性（ローレンツ対称性、ゲージ対称性、カイラル対称性...）

正則化 vs 対称性

- 素粒子論での場の量子論の特徴
- 極めて高い対称性（ローレンツ対称性、ゲージ対称性、カイラル対称性...）
- 繰り込まれた理論は、対応する Ward-高橋関係式を満たすべき

正則化 vs 対称性

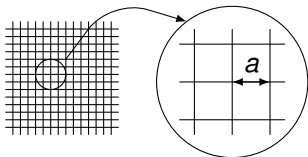
- 素粒子論での場の量子論の特徴
- 極めて高い対称性（ローレンツ対称性、ゲージ対称性、カイラル対称性...）
- 繰り込まれた理論は、対応する Ward-高橋関係式を満たすべき
- ネーターカレントをどう作るか？

正則化 vs 対称性

- 素粒子論での場の量子論の特徴
- 極めて高い対称性（ローレンツ対称性、ゲージ対称性、カイラル対称性...）
- 繰り込まれた理論は、対応する Ward-高橋関係式を満たすべき
- ネーターカレントをどう作るか？
- 正則化が対称性を保つ時 \Rightarrow ネーターの方法

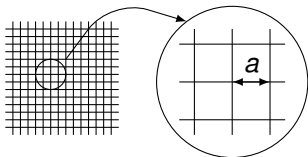
正則化 vs 対称性

- 素粒子論での場の量子論の特徴
- 極めて高い対称性（ローレンツ対称性、ゲージ対称性、カイラル対称性...）
- 繰り込まれた理論は、対応する Ward-高橋関係式を満たすべき
- ネーターカレントをどう作るか？
- 正則化が対称性を保つ時 \Rightarrow ネーターの方法
- 正則化が対称性を保たない時（格子正則化 vs 並進対称性） \Rightarrow 厄介



正則化 vs 対称性

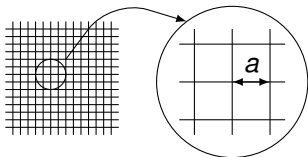
- 素粒子論での場の量子論の特徴
- 極めて高い対称性（ローレンツ対称性、ゲージ対称性、カイラル対称性...）
- 繰り込まれた理論は、対応する Ward-高橋関係式を満たすべき
- ネーターカレントをどう作るか？
- 正則化が対称性を保つ時 \Rightarrow ネーターの方法
- 正則化が対称性を保たない時（格子正則化 vs 並進対称性） \Rightarrow 厄介



- 紫外発散 \Leftrightarrow 複合演算子

正則化 vs 対称性

- 素粒子論での場の量子論の特徴
- 極めて高い対称性（ローレンツ対称性、ゲージ対称性、カイラル対称性...）
- 繰り込まれた理論は、対応する Ward-高橋関係式を満たすべき
- ネーターカレントをどう作るか？
- 正則化が対称性を保つ時 \Rightarrow ネーターの方法
- 正則化が対称性を保たない時（格子正則化 vs 並進対称性） \Rightarrow 厄介



- 紫外発散 \Leftrightarrow 複合演算子
- **グラディエント・フロー**という手法が興味深いアプローチを与える。

グラディエント・フローによる複合演算子の構成

- グラディエント・フロー (Narayanan–Neuberger (2006), Lüscher (2010))

$$\partial_t B_\mu^a(t, x) = -g_0^2 \frac{\delta S_{\text{YM}}}{\delta B_\mu^a(t, x)} = D_\nu G_{\nu\mu}^a(t, x) = \Delta B_\mu^a(t, x) + \dots, \quad t \geq 0,$$

ここで、 $D_\nu G_{\nu\mu}^a = \partial_\nu G_{\nu\mu}^a + f^{abc} B_\nu^b G_{\nu\mu}^c,$

$$G_{\mu\nu}^a(t, x) = \partial_\mu B_\nu^a(t, x) - \partial_\nu B_\mu^a(t, x) + f^{abc} B_\mu^b(t, x) B_\nu^c(t, x).$$

- 初期値は裸のゲージ場

$$B_\mu(t=0, x) = A_\mu(x).$$

- 一種の熱拡散方程式 (拡散長 $x \sim \sqrt{8t}$)。場の配位を滑らかにする。

グラディエント・フローによる複合演算子の構成

- グラディエント・フロー (Narayanan–Neuberger (2006), Lüscher (2010))

$$\partial_t B_\mu^a(t, x) = -g_0^2 \frac{\delta S_{\text{YM}}}{\delta B_\mu^a(t, x)} = D_\nu G_{\nu\mu}^a(t, x) = \Delta B_\mu^a(t, x) + \dots, \quad t \geq 0,$$

ここで、 $D_\nu G_{\nu\mu}^a = \partial_\nu G_{\nu\mu}^a + f^{abc} B_\nu^b G_{\nu\mu}^c,$

$$G_{\mu\nu}^a(t, x) = \partial_\mu B_\nu^a(t, x) - \partial_\nu B_\mu^a(t, x) + f^{abc} B_\mu^b(t, x) B_\nu^c(t, x).$$

- 初期値は裸のゲージ場

$$B_\mu(t=0, x) = A_\mu(x).$$

- 一種の熱拡散方程式 (拡散長 $x \sim \sqrt{8t}$)。場の配位を滑らかにする。
- フローさせた場 $B_\mu(t, x)$ ($t > 0$) から作った任意の局所積が、自動的に繰り込まれた複合演算子になる (Lüscher–Weisz (2011))。例えば、

$$g_R^2(\mu = \sqrt{8t}) \propto \langle t^2 G_{\mu\nu}^a(t, x) G_{\mu\nu}^a(t, x) \rangle.$$

グラディエント・フローによる複合演算子の構成

- グラディエント・フロー (Narayanan–Neuberger (2006), Lüscher (2010))

$$\partial_t B_\mu^a(t, x) = -g_0^2 \frac{\delta S_{\text{YM}}}{\delta B_\mu^a(t, x)} = D_\nu G_{\nu\mu}^a(t, x) = \Delta B_\mu^a(t, x) + \dots, \quad t \geq 0,$$

ここで、 $D_\nu G_{\nu\mu}^a = \partial_\nu G_{\nu\mu}^a + f^{abc} B_\nu^b G_{\nu\mu}^c,$

$$G_{\mu\nu}^a(t, x) = \partial_\mu B_\nu^a(t, x) - \partial_\nu B_\mu^a(t, x) + f^{abc} B_\mu^b(t, x) B_\nu^c(t, x).$$

- 初期値は裸のゲージ場

$$B_\mu(t=0, x) = A_\mu(x).$$

- 一種の熱拡散方程式 (拡散長 $x \sim \sqrt{8t}$)。場の配位を滑らかにする。
- フローさせた場 $B_\mu(t, x)$ ($t > 0$) から作った任意の局所積が、自動的に繰り込まれた複合演算子になる (Lüscher–Weisz (2011))。例えば、

$$g_R^2(\mu = \sqrt{8t}) \propto \langle t^2 G_{\mu\nu}^a(t, x) G_{\mu\nu}^a(t, x) \rangle.$$

- 複合演算子の正則化によらない表式 (格子ゲージ理論への応用)

グラディエント・フローによる複合演算子の構成

- フェルミオンに対しても (Lüscher (2013))

$$\partial_t \chi(t, \mathbf{x}) = \Delta \chi(t, \mathbf{x}),$$

$$\chi(t=0, \mathbf{x}) = \psi(\mathbf{x}),$$

$$\partial_t \bar{\chi}(t, \mathbf{x}) = \bar{\chi}(t, \mathbf{x}) \overleftarrow{\Delta},$$

$$\bar{\chi}(t=0, \mathbf{x}) = \bar{\psi}(\mathbf{x}),$$

ここで

$$\Delta = D_\mu D_\mu,$$

$$D_\mu = \partial_\mu + B_\mu,$$

$$\overleftarrow{\Delta} = \overleftarrow{D}_\mu \overleftarrow{D}_\mu,$$

$$\overleftarrow{D}_\mu \equiv \overleftarrow{\partial}_\mu - B_\mu.$$

グラディエント・フローによる複合演算子の構成

- フェルミオンに対しても (Lüscher (2013))

$$\begin{aligned}\partial_t \chi(t, \mathbf{x}) &= \Delta \chi(t, \mathbf{x}), & \chi(t=0, \mathbf{x}) &= \psi(\mathbf{x}), \\ \partial_t \bar{\chi}(t, \mathbf{x}) &= \bar{\chi}(t, \mathbf{x}) \overleftarrow{\Delta}, & \bar{\chi}(t=0, \mathbf{x}) &= \bar{\psi}(\mathbf{x}),\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\Delta &= D_\mu D_\mu, & D_\mu &= \partial_\mu + B_\mu, \\ \overleftarrow{\Delta} &= \overleftarrow{D}_\mu \overleftarrow{D}_\mu, & \overleftarrow{D}_\mu &\equiv \overleftarrow{\partial}_\mu - B_\mu.\end{aligned}$$

- フローさせたフェルミオンは波動関数繰り込みが必要:

$$\begin{aligned}\chi_R(t, \mathbf{x}) &= Z_\chi^{1/2} \chi(t, \mathbf{x}), & \bar{\chi}_R(t, \mathbf{x}) &= Z_\chi^{1/2} \bar{\chi}(t, \mathbf{x}), \\ Z_\chi &= 1 + \frac{g^2}{(4\pi)^2} C_2(R) 3 \frac{1}{\epsilon} + O(g^4).\end{aligned}$$

グラディエント・フローによる複合演算子の構成

- フェルミオンに対しても (Lüscher (2013))

$$\begin{aligned}\partial_t \chi(t, x) &= \Delta \chi(t, x), & \chi(t=0, x) &= \psi(x), \\ \partial_t \bar{\chi}(t, x) &= \bar{\chi}(t, x) \overleftarrow{\Delta}, & \bar{\chi}(t=0, x) &= \bar{\psi}(x),\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}\Delta &= D_\mu D_\mu, & D_\mu &= \partial_\mu + B_\mu, \\ \overleftarrow{\Delta} &= \overleftarrow{D}_\mu \overleftarrow{D}_\mu, & \overleftarrow{D}_\mu &\equiv \overleftarrow{\partial}_\mu - B_\mu.\end{aligned}$$

- フローさせたフェルミオンは波動関数繰り込みが必要:

$$\begin{aligned}\chi_R(t, x) &= Z_\chi^{1/2} \chi(t, x), & \bar{\chi}_R(t, x) &= Z_\chi^{1/2} \bar{\chi}(t, x), \\ Z_\chi &= 1 + \frac{g^2}{(4\pi)^2} C_2(R) 3 \frac{1}{\epsilon} + O(g^4).\end{aligned}$$

- しかし、依然として $\chi_R(t, x)$ と $\bar{\chi}_R(t, x)$ の任意の局所積は、自動的に繰り込まれた演算子

エネルギー運動量テンソル (EMT) の正則化に依らない表式 (Suzuki (2013), Makino–H.S. (2014))

- Universal formula (全てが明白に有限量) :

$$\begin{aligned} & \{T_{\mu\nu}\}_R(x) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ c_1(t) G_{\mu\rho}^a(t, x) G_{\nu\rho}^a(t, x) + \left[c_2(t) - \frac{1}{4} c_1(t) \right] \delta_{\mu\nu} G_{\rho\sigma}^a(t, x) G_{\rho\sigma}^a(t, x) \right. \\ & \quad + c_3(t) \overset{\circ}{\chi}(t, x) \left(\gamma_\mu \overleftrightarrow{D}_\nu + \gamma_\nu \overleftrightarrow{D}_\mu \right) \dot{\chi}(t, x) \\ & \quad \left. + [c_4(t) - 2c_3(t)] \delta_{\mu\nu} \overset{\circ}{\chi}(t, x) \overleftrightarrow{D} \dot{\chi}(t, x) + c_5'(t) \overset{\circ}{\chi}(t, x) \dot{\chi}(t, x) - \text{VEV} \right\}, \end{aligned}$$

ここで ($\bar{}$ は MS スキームでの running パラメター)、

$$c_1(t) = \frac{1}{\bar{g}(1/\sqrt{8t})^2} - b_0 \ln \pi - \frac{1}{(4\pi)^2} \left[\frac{7}{3} C_2(G) - \frac{3}{2} T(R) N_f \right],$$

$$c_2(t) = \frac{1}{8} \frac{1}{(4\pi)^2} \left[\frac{11}{3} C_2(G) + \frac{11}{3} T(R) N_f \right], \quad c_3(t) = \frac{1}{4} \left\{ 1 + \frac{\bar{g}(1/\sqrt{8t})^2}{(4\pi)^2} C_2(R) \left[\frac{3}{2} + \ln(432) \right] \right\},$$

$$c_4(t) = \frac{1}{8} d_0 \bar{g}(1/\sqrt{8t})^2, \quad c_5'(t) = -\bar{m}(1/\sqrt{8t}) \left\{ 1 + \frac{\bar{g}(1/\sqrt{8t})^2}{(4\pi)^2} C_2(R) \left[3 \ln \pi + \frac{7}{2} + \ln(432) \right] \right\}.$$

$$(b_0 = \frac{1}{(4\pi)^2} \left[\frac{11}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} T(R) N_f \right], \quad d_0 = \frac{1}{(4\pi)^2} 6C_2(R))$$

- ここで、フェルミオン場のあらわな波動関数繰り込みを避けるため、以下の変数を導入した：

$$\hat{\chi}(t, \mathbf{x}) = c \frac{\chi(t, \mathbf{x})}{\sqrt{t^2 \langle \bar{\chi}(t, \mathbf{x}) \overleftrightarrow{D} \chi(t, \mathbf{x}) \rangle}} = \chi_R(t, \mathbf{x}) + O(g^2),$$

ここで

$$c \equiv \sqrt{\frac{-2 \dim(R)}{(4\pi)^2}}.$$

$\hat{\bar{\chi}}(t, \mathbf{x})$ も同様。

- 波動関数繰り込み因子 Z_χ が分子分母でキャンセルするため、 $\hat{\chi}(t, \mathbf{x})$ と $\hat{\bar{\chi}}(t, \mathbf{x})$ の任意の局所積は繰り込まれた複合演算子になる。

基本的なアイデア

- 次元正則化は並進対称性を明白に保つので、次元正則化では正しい EMT の具体的表式を知っている！

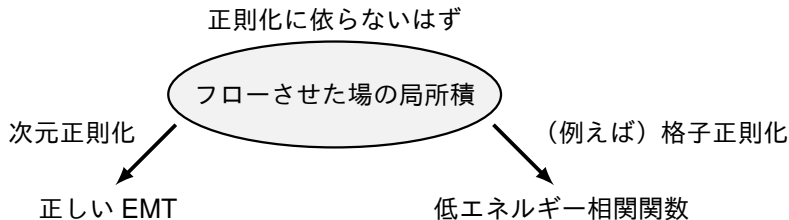
$$\begin{aligned} & \{T_{\mu\nu}\}_R(x) \\ &= \frac{1}{g_0^2} \left[F_{\mu\rho}^a(x) F_{\nu\rho}^a(x) - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}^a(x) F_{\rho\sigma}^a(x) \right] \\ & \quad + \frac{1}{4} \bar{\psi}(x) \left(\gamma_\mu \overleftrightarrow{D}_\nu + \gamma_\nu \overleftrightarrow{D}_\mu \right) \psi(x) - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \bar{\psi}(x) \overleftrightarrow{D} \psi(x) - \delta_{\mu\nu} m_0 \bar{\psi}(x) \psi(x) - \text{VEV}. \end{aligned}$$

基本的なアイデア

- 次元正則化は並進対称性を明白に保つので、次元正則化では正しい EMT の具体的表式を知っている！

$$\begin{aligned} & \{T_{\mu\nu}\}_R(x) \\ &= \frac{1}{g_0^2} \left[F_{\mu\rho}^a(x) F_{\nu\rho}^a(x) - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}^a(x) F_{\rho\sigma}^a(x) \right] \\ & \quad + \frac{1}{4} \bar{\psi}(x) \left(\gamma_\mu \overleftrightarrow{D}_\nu + \gamma_\nu \overleftrightarrow{D}_\mu \right) \psi(x) - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \bar{\psi}(x) \overleftrightarrow{D} \psi(x) - \delta_{\mu\nu} m_0 \bar{\psi}(x) \psi(x) - \text{VEV}. \end{aligned}$$

- フローさせた場の局所積で、上の表式に一致するものを構成する：

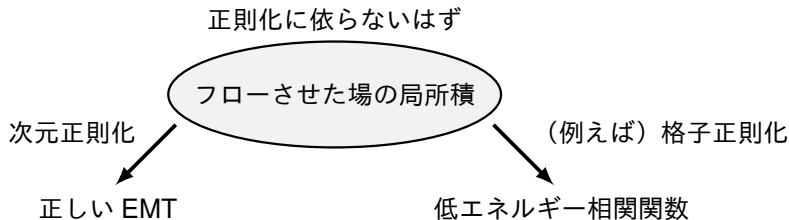


基本的なアイデア

- 次元正則化は並進対称性を明白に保つので、次元正則化では正しい EMT の具体的表式を知っている！

$$\begin{aligned} & \{T_{\mu\nu}\}_R(x) \\ &= \frac{1}{g_0^2} \left[F_{\mu\rho}^a(x) F_{\nu\rho}^a(x) - \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} F_{\rho\sigma}^a(x) F_{\rho\sigma}^a(x) \right] \\ & \quad + \frac{1}{4} \bar{\psi}(x) \left(\gamma_\mu \overleftrightarrow{D}_\nu + \gamma_\nu \overleftrightarrow{D}_\mu \right) \psi(x) - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \bar{\psi}(x) \overleftrightarrow{D} \psi(x) - \delta_{\mu\nu} m_0 \bar{\psi}(x) \psi(x) - \text{VEV}. \end{aligned}$$

- フローさせた場の局所積で、上の表式に一致するものを構成する：



- グラディエント・フローを用いて、異なる正則化間の橋渡しをする

具体的にどうやるか？（小フロー時間展開）

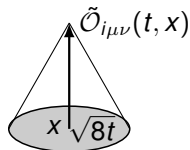
- フローさせた場の局所積と元のゲージ理論の複合演算子の関係は、一般には極めて非自明である。

具体的にどうやるか？（小フロー時間展開）

- フローさせた場の局所積と元のゲージ理論の複合演算子の関係は、一般には極めて非自明である。
- しかし、 $t \rightarrow 0$ の極限では、両者の関係が簡単化する可能性がある。

具体的にどうやるか？（小フロー時間展開）

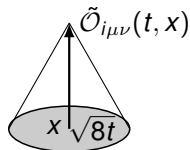
- フローさせた場の局所積と元のゲージ理論の複合演算子の関係は、一般には極めて非自明である。
- しかし、 $t \rightarrow 0$ の極限では、両者の関係が簡単化する可能性がある。
- 小フロー時間展開 (Lüscher–Weisz (2011)):



$$\tilde{\mathcal{O}}_{i\mu\nu}(t, x) = \langle \tilde{\mathcal{O}}_{i\mu\nu}(t, x) \rangle \mathbb{1} + \sum_j \zeta_{ij}(t) [\mathcal{O}_{j\mu\nu}(x) - \text{VEV}] + \mathcal{O}(t).$$

具体的にどうやるか？（小フロー時間展開）

- フローさせた場の局所積と元のゲージ理論の複合演算子の関係は、一般には極めて非自明である。
- しかし、 $t \rightarrow 0$ の極限では、両者の関係が簡単化する可能性がある。
- 小フロー時間展開 (Lüscher–Weisz (2011)):



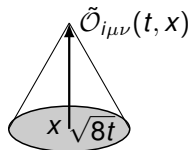
$$\tilde{O}_{i\mu\nu}(t, x) = \langle \tilde{O}_{i\mu\nu}(t, x) \rangle \mathbb{1} + \sum_j \zeta_{ij}(t) [O_{j\mu\nu}(x) - \text{VEV}] + O(t).$$

- これを逆解きして、

$$O_{i\mu\nu}(x) - \text{VEV} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \sum_j (\zeta^{-1})_{ij}(t) [\tilde{O}_{j\mu\nu}(t, x) - \langle \tilde{O}_{j\mu\nu}(t, x) \rangle \mathbb{1}] \right\}.$$

具体的にどうやるか？（小フロー時間展開）

- フローさせた場の局所積と元のゲージ理論の複合演算子の関係は、一般には極めて非自明である。
- しかし、 $t \rightarrow 0$ の極限では、両者の関係が簡単化する可能性がある。
- 小フロー時間展開 (Lüscher–Weisz (2011)):



$$\tilde{O}_{i\mu\nu}(t, x) = \langle \tilde{O}_{i\mu\nu}(t, x) \rangle \mathbb{1} + \sum_j \zeta_{ij}(t) [\mathcal{O}_{j\mu\nu}(x) - \text{VEV}] + O(t).$$

- これを逆解きして、

$$\mathcal{O}_{i\mu\nu}(x) - \text{VEV} = \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ \sum_j (\zeta^{-1})_{ij}(t) [\tilde{O}_{j\mu\nu}(t, x) - \langle \tilde{O}_{j\mu\nu}(t, x) \rangle \mathbb{1}] \right\}.$$

- つまり、もし係数 $\zeta_{ij}(t)$ の $t \rightarrow 0$ の振る舞いが分かれば、4次元の複合演算子が引き出せる。

さらに... 繰り込み群的議論

- 上式の複合演算子を裸のものとするならば、

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right)_0 \zeta_{ij}(t) = 0,$$

であり、 $\zeta_{ij}(t)$ は、running パラメータで表した時に、繰り込みスケール μ に依存しない。そこで、例えば、 $\mu = 1/\sqrt{8t}$ と取ることができる:

$$\zeta_{ij}(t) [g, m; \mu] = \zeta_{ij}(t) \left[\bar{g}(1/\sqrt{8t}), \bar{m}(1/\sqrt{8t}); 1/\sqrt{8t} \right].$$

さらに... 繰り込み群的議論

- 上式の複合演算子を裸のものとするならば、

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu}\right)_0 \zeta_{ij}(t) = 0,$$

であり、 $\zeta_{ij}(t)$ は、running パラメータで表した時に、繰り込みスケール μ に依存しない。そこで、例えば、 $\mu = 1/\sqrt{8t}$ と取ることができる:

$$\zeta_{ij}(t) [g, m; \mu] = \zeta_{ij}(t) [\bar{g}(1/\sqrt{8t}), \bar{m}(1/\sqrt{8t}); 1/\sqrt{8t}].$$

- $t \rightarrow 0$ では漸近的自由性より $\bar{g}(1/\sqrt{8t}) \rightarrow 0$ であり、摂動論が正当化される。

さらに... 繰り込み群的議論

- 上式の複合演算子を裸のものとするならば、

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right)_0 \zeta_{ij}(t) = 0,$$

であり、 $\zeta_{ij}(t)$ は、running パラメータで表した時に、繰り込みスケール μ に依存しない。そこで、例えば、 $\mu = 1/\sqrt{8t}$ と取ることができる:

$$\zeta_{ij}(t) [g, m; \mu] = \zeta_{ij}(t) \left[\bar{g}(1/\sqrt{8t}), \bar{m}(1/\sqrt{8t}); 1/\sqrt{8t} \right].$$

- $t \rightarrow 0$ では漸近的自由性より $\bar{g}(1/\sqrt{8t}) \rightarrow 0$ であり、摂動論が正当化される。
- $t \rightarrow 0$ での展開係数 $\zeta_{ij}(t)$ は、摂動論で評価できる。

さらに... 繰り込み群的議論

- 上式の複合演算子を裸のものとするならば、

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right)_0 \zeta_{ij}(t) = 0,$$

であり、 $\zeta_{ij}(t)$ は、running パラメータで表した時に、繰り込みスケール μ に依存しない。そこで、例えば、 $\mu = 1/\sqrt{8t}$ と取ることができる:

$$\zeta_{ij}(t) [g, m; \mu] = \zeta_{ij}(t) \left[\bar{g}(1/\sqrt{8t}), \bar{m}(1/\sqrt{8t}); 1/\sqrt{8t} \right].$$

- $t \rightarrow 0$ では漸近的自由性より $\bar{g}(1/\sqrt{8t}) \rightarrow 0$ であり、摂動論が正当化される。
- $t \rightarrow 0$ での展開係数 $\zeta_{ij}(t)$ は、摂動論で評価できる。
- 一方、 $\tilde{O}_{i\mu\nu}(t, x)$ の行列要素は非摂動論的情報を持っている。

さらに... 繰り込み群的議論

- 上式の複合演算子を裸のものとするならば、

$$\left(\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right)_0 \zeta_{ij}(t) = 0,$$

であり、 $\zeta_{ij}(t)$ は、running パラメーターで表した時に、繰り込みスケール μ に依存しない。そこで、例えば、 $\mu = 1/\sqrt{8t}$ と取ることができる:

$$\zeta_{ij}(t) [g, m; \mu] = \zeta_{ij}(t) \left[\bar{g}(1/\sqrt{8t}), \bar{m}(1/\sqrt{8t}); 1/\sqrt{8t} \right].$$

- $t \rightarrow 0$ では漸近的自由性より $\bar{g}(1/\sqrt{8t}) \rightarrow 0$ であり、摂動論が正当化される。
- $t \rightarrow 0$ での展開係数 $\zeta_{ij}(t)$ は、摂動論で評価できる。
- 一方、 $\tilde{O}_{i\mu\nu}(t, x)$ の行列要素は非摂動論的情報を持っている。
- 状況は Wilson の OPE に類似

エネルギー運動量テンソル (EMT) の表式

- Universal formula (全てが明白に有限量) :

$$\begin{aligned}
 & \{T_{\mu\nu}\}_R(x) \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ c_1(t) G_{\mu\rho}^a(t, x) G_{\nu\rho}^a(t, x) + \left[c_2(t) - \frac{1}{4} c_1(t) \right] \delta_{\mu\nu} G_{\rho\sigma}^a(t, x) G_{\rho\sigma}^a(t, x) \right. \\
 &\quad + c_3(t) \overset{\circ}{\chi}(t, x) \left(\gamma_\mu \overleftarrow{D}_\nu + \gamma_\nu \overleftarrow{D}_\mu \right) \dot{\chi}(t, x) \\
 &\quad \left. + [c_4(t) - 2c_3(t)] \delta_{\mu\nu} \overset{\circ}{\chi}(t, x) \overleftarrow{D} \dot{\chi}(t, x) + c_5'(t) \overset{\circ}{\chi}(t, x) \dot{\chi}(t, x) - \text{VEV} \right\},
 \end{aligned}$$

ここで ($\bar{}$ は MS スキームでの running パラメター),

$$c_1(t) = \frac{1}{\bar{g}(1/\sqrt{8t})^2} - b_0 \ln \pi - \frac{1}{(4\pi)^2} \left[\frac{7}{3} C_2(G) - \frac{3}{2} T(R) N_f \right],$$

$$c_2(t) = \frac{1}{8} \frac{1}{(4\pi)^2} \left[\frac{11}{3} C_2(G) + \frac{11}{3} T(R) N_f \right], \quad c_3(t) = \frac{1}{4} \left\{ 1 + \frac{\bar{g}(1/\sqrt{8t})^2}{(4\pi)^2} C_2(R) \left[\frac{3}{2} + \ln(432) \right] \right\},$$

$$c_4(t) = \frac{1}{8} d_0 \bar{g}(1/\sqrt{8t})^2, \quad c_5'(t) = -\bar{m}(1/\sqrt{8t}) \left\{ 1 + \frac{\bar{g}(1/\sqrt{8t})^2}{(4\pi)^2} C_2(R) \left[3 \ln \pi + \frac{7}{2} + \ln(432) \right] \right\}.$$

$$(b_0 = \frac{1}{(4\pi)^2} \left[\frac{11}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} T(R) N_f \right], \quad d_0 = \frac{1}{(4\pi)^2} 6 C_2(R))$$

エネルギー運動量テンソル (EMT) の表式

- Universal formula (全てが明白に有限量) :

$$\begin{aligned} & \{T_{\mu\nu}\}_R(x) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left\{ c_1(t) G_{\mu\rho}^a(t, x) G_{\nu\rho}^a(t, x) + \left[c_2(t) - \frac{1}{4} c_1(t) \right] \delta_{\mu\nu} G_{\rho\sigma}^a(t, x) G_{\rho\sigma}^a(t, x) \right. \\ & \quad + c_3(t) \overset{\circ}{\chi}(t, x) \left(\gamma_\mu \overleftarrow{D}_\nu + \gamma_\nu \overleftarrow{D}_\mu \right) \dot{\chi}(t, x) \\ & \quad \left. + [c_4(t) - 2c_3(t)] \delta_{\mu\nu} \overset{\circ}{\chi}(t, x) \overleftarrow{D} \dot{\chi}(t, x) + c_5'(t) \overset{\circ}{\chi}(t, x) \dot{\chi}(t, x) - \text{VEV} \right\}, \end{aligned}$$

ここで ($\bar{}$ は MS スキームでの running パラメター),

$$c_1(t) = \frac{1}{\bar{g}(1/\sqrt{8t})^2} - b_0 \ln \pi - \frac{1}{(4\pi)^2} \left[\frac{7}{3} C_2(G) - \frac{3}{2} T(R) N_f \right],$$

$$c_2(t) = \frac{1}{8} \frac{1}{(4\pi)^2} \left[\frac{11}{3} C_2(G) + \frac{11}{3} T(R) N_f \right], \quad c_3(t) = \frac{1}{4} \left\{ 1 + \frac{\bar{g}(1/\sqrt{8t})^2}{(4\pi)^2} C_2(R) \left[\frac{3}{2} + \ln(432) \right] \right\},$$

$$c_4(t) = \frac{1}{8} d_0 \bar{g}(1/\sqrt{8t})^2, \quad c_5'(t) = -\bar{m}(1/\sqrt{8t}) \left\{ 1 + \frac{\bar{g}(1/\sqrt{8t})^2}{(4\pi)^2} C_2(R) \left[3 \ln \pi + \frac{7}{2} + \ln(432) \right] \right\}.$$

$$(b_0 = \frac{1}{(4\pi)^2} \left[\frac{11}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} T(R) N_f \right], \quad d_0 = \frac{1}{(4\pi)^2} 6 C_2(R))$$

- Closed form で求まるところが面白い。

$SU(3)$ ヤン・ミルズ理論の EMT の 1 点関数

- FlowQCD Collaboration (Asakawa–Hatsuda–Iritani–Itou–Kitazawa–H.S.)

$SU(3)$ ヤン・ミルズ理論の EMT の 1 点関数

- FlowQCD Collaboration (Asakawa–Hatsuda–Iritani–Itou–Kitazawa–H.S.)
- 有限温度での EMT の 1 点関数：トレースアノマリーとエントロピー密度：

$$\langle \varepsilon - 3p \rangle = - \langle \{ T_{\mu\mu} \}_R(x) \rangle,$$

$$\langle \varepsilon + p \rangle = - \langle \{ T_{00} \}_R(x) \rangle + \frac{1}{3} \sum_{i=1,2,3} \langle \{ T_{ii} \}_R(x) \rangle.$$

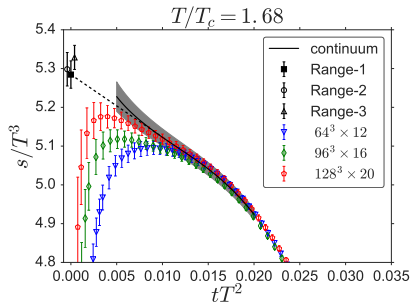
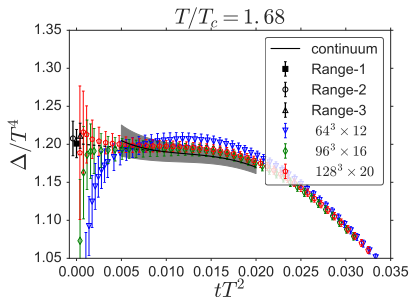
SU(3) ヤン・ミルズ理論の EMT の 1 点関数

- FlowQCD Collaboration (Asakawa–Hatsuda–Iritani–Itou–Kitazawa–H.S.)
- 有限温度での EMT の 1 点関数：トレースアノマリーとエントロピー密度：

$$\langle \varepsilon - 3p \rangle = - \langle \{ T_{\mu\mu} \}_R(x) \rangle,$$

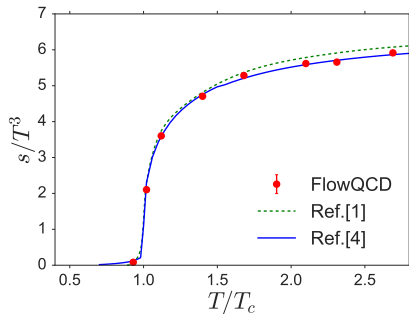
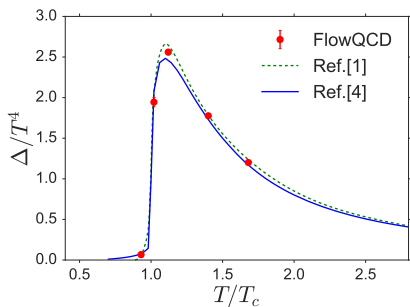
$$\langle \varepsilon + p \rangle = - \langle \{ T_{00} \}_R(x) \rangle + \frac{1}{3} \sum_{i=1,2,3} \langle \{ T_{ii} \}_R(x) \rangle.$$

- 格子間隔 $a = 0.013\text{--}0.061 \text{ fm} \ll \sqrt{8t}$ 、配位数 $\sim 1000\text{--}2000$ ：



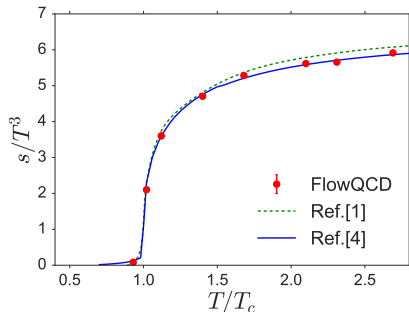
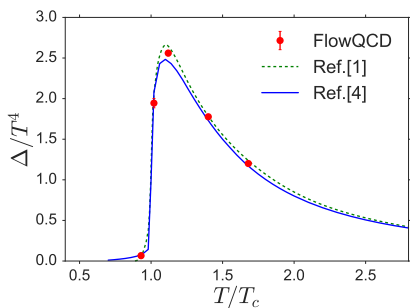
SU(3) ヤン・ミルズ理論の EMT の 1 点関数

- 有限温度での EMT の 1 点関数：トレースアノマリーとエントロピー密度：



SU(3) ヤン・ミルズ理論の EMT の 1 点関数

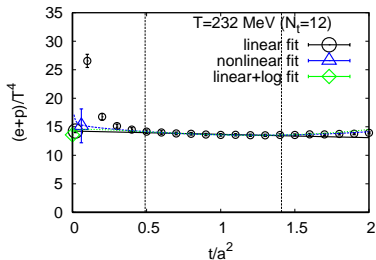
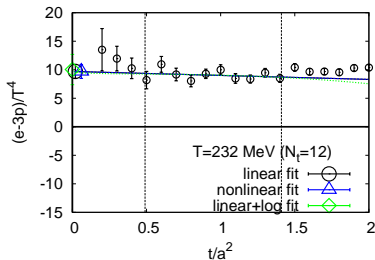
- 有限温度での EMT の 1 点関数：トレースアノマリーとエントロピー密度：



- うまく行っている！ 推論に疑いの余地はないように思われる。

最近では、 $N_f = 2 + 1$ full QCD にも応用 (to appear in PRD)

- WHOT-QCD Collaboration (Ejiri–Iwami–Kanaya–Kitazawa–H.S.–Taniguchi–Umeda–Wakabayashi)
- 格子間隔 $a = 0.070$ fm 固定, $m_\pi/m_\rho \simeq 0.63$, $m_{\eta_{ss}}/m_\phi \simeq 0.74$, $N_s = 32$, 配位数 ~ 100 – 1000 .



最近では、 $N_f = 2 + 1$ full QCD にも応用 (to appear in PRD)

- 格子間隔 $a = 0.070$ fm 固定, $m_\pi/m_\rho \simeq 0.63$, $m_{\eta_{ss}}/m_\phi \simeq 0.74$, $N_s = 32$, 配位数 $\sim 100-1000$.

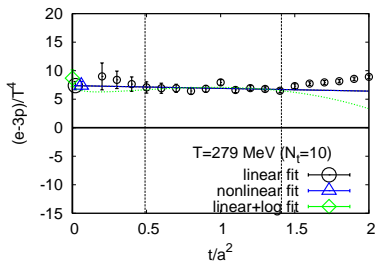


Figure: $(e - 3p)/T^4$, $T = 279$ MeV

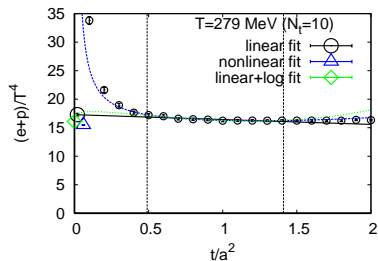


Figure: $(e + p)/T^4$, $T = 279$ MeV

最近では、 $N_f = 2 + 1$ full QCD にも応用 (to appear in PRD)

- 格子間隔 $a = 0.070$ fm 固定, $m_\pi/m_\rho \simeq 0.63$, $m_{\eta_{ss}}/m_\phi \simeq 0.74$, $N_s = 32$, 配位数 ~ 100 – 1000 .

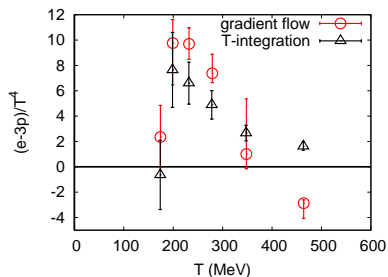


Figure: Black: T. Umeda et al. [WHOT-QCD Collaboration] (2012)

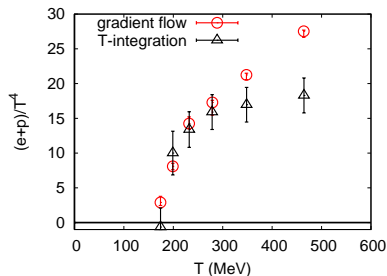


Figure: Black: T. Umeda et al. [WHOT-QCD Collaboration] (2012)

素粒子論で重要な他のネーターカレント

- カイラルカレントも OK (Endo–Hieda–Miura–H.S., 2015, Hieda–H.S., 2016)

素粒子論で重要な他のネーターカレント

- カイラルカレントも OK (Endo–Hieda–Miura–H.S., 2015, Hieda–H.S., 2016)
- ここでは、**超対称カレント**を考える。

素粒子論で重要な他のネーターカレント

- カイラルカレントも OK (Endo–Hieda–Miura–H.S., 2015, Hieda–H.S., 2016)
- ここでは、**超対称カレント**を考える。
- 格子正則化は超対称性を壊す

素粒子論で重要な他のネーターカレント

- カイラルカレントも OK (Endo–Hieda–Miura–H.S., 2015, Hieda–H.S., 2016)
- ここでは、**超対称カレント**を考える。
- 格子正則化は超対称性を壊す
- 超対称 Ward–高橋関係式を回復するパラメータチューニング

素粒子論で重要な他のネーターカレント

- カイラルカレントも OK (Endo–Hieda–Miura–H.S., 2015, Hieda–H.S., 2016)
- ここでは、**超対称カレント**を考える。
- 格子正則化は超対称性を壊す
- 超対称 Ward–高橋関係式を回復するパラメータチューニング
- 正しく規格化された保存する超対称カレントの情報は極めて有用であろう！

素粒子論で重要な他のネーターカレント

- カイラルカレントも OK (Endo–Hieda–Miura–H.S., 2015, Hieda–H.S., 2016)
- ここでは、**超対称カレント**を考える。
- 格子正則化は超対称性を壊す
- 超対称 Ward–高橋関係式を回復するパラメータチューニング
- 正しく規格化された保存する超対称カレントの情報は極めて有用であろう！
- ここでは、もっとも単純な 4 次元 $\mathcal{N} = 1$ 超対称 Yang–Mills 理論を考える

素粒子論で重要な他のネーターカレント

- カイラルカレントも OK (Endo–Hieda–Miura–H.S., 2015, Hieda–H.S., 2016)
- ここでは、**超対称カレント**を考える。
- 格子正則化は超対称性を壊す
- 超対称 Ward–高橋関係式を回復するパラメータチューニング
- 正しく規格化された保存する超対称カレントの情報は極めて有用であろう！
- ここでは、もっとも単純な 4 次元 $\mathcal{N} = 1$ 超対称 Yang–Mills 理論を考える
- Off-shell 超多重項でのグラディエントフロー (Kikuchi–Onogi, 2014)

素粒子論で重要な他のネーターカレント

- カイラルカレントも OK (Endo–Hieda–Miura–H.S., 2015, Hieda–H.S., 2016)
- ここでは、**超対称カレント**を考える。
- 格子正則化は超対称性を壊す
- 超対称 Ward–高橋関係式を回復するパラメータチューニング
- 正しく規格化された保存する超対称カレントの情報は極めて有用であろう！
- ここでは、もっとも単純な 4 次元 $\mathcal{N} = 1$ 超対称 Yang–Mills 理論を考える
- Off-shell 超多重項でのグラディエントフロー (Kikuchi–Onogi, 2014)
- 格子シミュレーションへの応用を考えると、物理的な場だけを含む Wess–Zumino ゲージを取りたい

素粒子論で重要な他のネーターカレント

- カイラルカレントも OK (Endo–Hieda–Miura–H.S., 2015, Hieda–H.S., 2016)
- ここでは、**超対称カレント**を考える。
- 格子正則化は超対称性を壊す
- 超対称 Ward–高橋関係式を回復するパラメータチューニング
- 正しく規格化された保存する超対称カレントの情報は極めて有用であろう！
- ここでは、もっとも単純な 4 次元 $\mathcal{N} = 1$ 超対称 Yang–Mills 理論を考える
- Off-shell 超多重項でのグラディエントフロー (Kikuchi–Onogi, 2014)
- 格子シミュレーションへの応用を考えると、物理的な場だけを含む Wess–Zumino ゲージを取りたい
- まずは摂動論でよいので、**WT 関係式を満たす超対称カレントの表式が必要！**

素粒子論で重要な他のネーターカレント

- カイラルカレントも OK (Endo–Hieda–Miura–H.S., 2015, Hieda–H.S., 2016)
- ここでは、**超対称カレント**を考える。
- 格子正則化は超対称性を壊す
- 超対称 Ward–高橋関係式を回復するパラメータチューニング
- 正しく規格化された保存する超対称カレントの情報は極めて有用であろう！
- ここでは、もっとも単純な 4 次元 $\mathcal{N} = 1$ 超対称 Yang–Mills 理論を考える
- Off-shell 超多重項でのグラディエントフロー (Kikuchi–Onogi, 2014)
- 格子シミュレーションへの応用を考えると、物理的な場だけを含む Wess–Zumino ゲージを取りたい
- まずは摂動論でよいので、**WT 関係式を満たす超対称カレントの表式が必要！**
- 実はこれが複雑！（まだ誰もやっていなかった...）

Wess-Zumino ゲージでの 4D $\mathcal{N} = 1$ SYM の複雑さ

- 超対称性を明白に保つ正則化がない。ここでは次元正則化を用いた：

$$S = \frac{1}{4g_0^2} \int d^D x F_{\mu\nu}^a(x) F_{\mu\nu}^a(x) + \frac{1}{2} \int d^D x \bar{\psi}^a(x) \mathcal{D}^{ab} \psi^b(x).$$

Wess-Zumino ゲージでの 4D $\mathcal{N} = 1$ SYM の複雑さ

- 超対称性を明白に保つ正則化がない。ここでは次元正則化を用いた：

$$S = \frac{1}{4g_0^2} \int d^D x F_{\mu\nu}^a(x) F_{\mu\nu}^a(x) + \frac{1}{2} \int d^D x \bar{\psi}^a(x) \mathcal{D}^{ab} \psi^b(x).$$

- Wess-Zumino ゲージでは超対称変換が**非線形**

$$\begin{aligned} \delta_\xi A_\mu(x) &= g_0 \bar{\xi} \gamma_\mu \psi(x), \\ \delta_\xi \psi(x) &= -\frac{1}{2g_0} \sigma_{\mu\nu} \xi F_{\mu\nu}(x), \quad \delta_\xi \bar{\psi}(x) = \frac{1}{2g_0} \bar{\xi} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x). \end{aligned}$$

このため、Ward-高橋関係式は必然的に**複合演算子の繰り込み**を含む。

Wess-Zumino ゲージでの 4D $\mathcal{N} = 1$ SYM の複雑さ

- 超対称性を明白に保つ正則化がない。ここでは次元正則化を用いた：

$$S = \frac{1}{4g_0^2} \int d^D x F_{\mu\nu}^a(x) F_{\mu\nu}^a(x) + \frac{1}{2} \int d^D x \bar{\psi}^a(x) \mathcal{D}^{ab} \psi^b(x).$$

- Wess-Zumino ゲージでは超対称変換が**非線形**

$$\begin{aligned} \delta_\xi A_\mu(x) &= g_0 \bar{\xi} \gamma_\mu \psi(x), \\ \delta_\xi \psi(x) &= -\frac{1}{2g_0} \sigma_{\mu\nu} \xi F_{\mu\nu}(x), \quad \delta_\xi \bar{\psi}(x) = \frac{1}{2g_0} \bar{\xi} \sigma_{\mu\nu} F_{\mu\nu}(x). \end{aligned}$$

このため、Ward-高橋関係式は必然的に**複合演算子の繰り込み**を含む。

- ゲージ固定項、Faddeev-Popov ゴースト項が、**超対称性を破る**：

$$S_{\text{gf}} + S_{c\bar{c}} = \frac{\lambda_0}{2g_0^2} \int d^D x \partial_\mu A_\mu^a(x) \partial_\nu A_\nu^a(x) - \frac{1}{g_0^2} \int d^D x \bar{c}^a(x) \partial_\mu \mathcal{D}_\mu^{ab} c^b(x).$$

ゴーストは超対称変換を受けないとする。

超対称 Ward–高橋関係式

- 汎関数積分

$$\int d\mu e^{-S-S_{\text{gf}}-S_{\text{c}\bar{c}}} A_{\alpha}^b(y) \bar{\psi}^c(z),$$

および

$$\int d\mu e^{-S-S_{\text{gf}}-S_{\text{c}\bar{c}}} \bar{\psi}^b(y) c^c(z) \bar{c}^d(w),$$

の積分変数に対して、パラメターを局所化 $\xi \rightarrow \xi(x)$ した超対称変換を考える。

超対称 Ward–高橋関係式

- 汎関数積分

$$\int d\mu e^{-S-S_{\text{gf}}-S_{\text{c}\bar{c}}} A_{\alpha}^b(y) \bar{\psi}^c(z),$$

および

$$\int d\mu e^{-S-S_{\text{gf}}-S_{\text{c}\bar{c}}} \bar{\psi}^b(y) c^c(z) \bar{c}^d(w),$$

の積分変数に対して、パラメターを局所化 $\xi \rightarrow \xi(x)$ した超対称変換を考える。

- 作用の変分は

$$\delta_{\xi} S = \int d^D x [\partial_{\mu} \bar{\xi}(x) S_{\mu}(x) - \bar{\xi}(x) X_{\text{Fierz}}(x)],$$

ここで、

$$S_{\mu}(x) \equiv -\frac{1}{2g_0} \sigma_{\rho\sigma} \gamma_{\mu} \psi^a(x) F_{\rho\sigma}^a(x),$$

$$X_{\text{Fierz}}(x) \equiv \frac{1}{2} g_0 f^{abc} \gamma_{\mu} \psi^a(x) \bar{\psi}^b(x) \gamma_{\mu} \psi^c(x).$$

後者は、 $D \neq 4$ での Fierz 恒等式の破れ。古典的には $D \rightarrow 4$ で消える。

超対称 Ward-高橋関係式

- また、

$$\delta_{\xi} (\mathcal{S}_{\text{gf}} + \mathcal{S}_{c\bar{c}}) = - \int d^D x \bar{\xi}(x) [X_{\text{gf}}(x) + X_{c\bar{c}}(x)],$$

ここで

$$X_{\text{gf}}(x) \equiv \frac{\lambda_0}{g_0} \partial_{\mu} \partial_{\nu} A_{\nu}^a(x) \gamma_{\mu} \psi^a(x),$$

$$X_{c\bar{c}}(x) \equiv \frac{1}{g_0} f^{abc} \partial_{\mu} \bar{c}^a(x) c^b(x) \gamma_{\mu} \psi^c(x).$$

超対称 Ward-高橋関係式

- また、

$$\delta_{\xi} (\mathcal{S}_{\text{gf}} + \mathcal{S}_{c\bar{c}}) = - \int d^D x \bar{\xi}(x) [X_{\text{gf}}(x) + X_{c\bar{c}}(x)],$$

ここで

$$X_{\text{gf}}(x) \equiv \frac{\lambda_0}{g_0} \partial_{\mu} \partial_{\nu} A_{\nu}^a(x) \gamma_{\mu} \psi^a(x),$$

$$X_{c\bar{c}}(x) \equiv \frac{1}{g_0} f^{abc} \partial_{\mu} \bar{c}^a(x) c^b(x) \gamma_{\mu} \psi^c(x).$$

- 以上から、以下の恒等式が得られる：

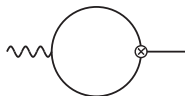
$$\begin{aligned} & \langle [\partial_{\mu} \mathcal{S}_{\mu}(x) + X_{\text{Fierz}}(x) + X_{\text{gf}}(x) + X_{c\bar{c}}(x)] A_{\alpha}^b(y) \bar{\psi}^c(z) \rangle \\ &= -\delta(x-y) \langle g_0 \gamma_{\alpha} \psi^b(y) \bar{\psi}^c(z) \rangle - \delta(x-z) \left\langle A_{\alpha}^b(y) \frac{1}{2g_0} \sigma_{\beta\gamma} F_{\beta\gamma}^c(z) \right\rangle, \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} & \langle [\partial_{\mu} \mathcal{S}_{\mu}(x) + X_{\text{Fierz}}(x) + X_{\text{gf}}(x) + X_{c\bar{c}}(x)] \bar{\psi}^b(y) c^c(z) \bar{c}^d(w) \rangle \\ &= -\delta(x-y) \left\langle \frac{1}{2g_0} \sigma_{\beta\gamma} F_{\beta\gamma}^b(y) c^c(z) \bar{c}^d(w) \right\rangle. \end{aligned}$$

$X_{\text{Fierz}}(x)$ の効果

- $X_{\text{Fierz}}(x)$ は、 $D \neq 4$ での Fierz 恒等式の破れ。古典的には $D \rightarrow 4$ で消えるが 1 ループでは、



のダイアグラムより、

$$X_{\text{Fierz}}(x) \stackrel{D \rightarrow 4}{\rightarrow} \frac{g_0}{(4\pi)^2} C_2(G) \frac{2}{3} \partial_\mu F_{\mu\nu}^a(x) \gamma_\nu \psi^a(x).$$

- これは、作用への有限の補正として吸収できる：

$$S' = -\frac{1}{(4\pi)^2} C_2(G) \frac{1}{6} \int d^D x F_{\mu\nu}^a(x) F_{\mu\nu}^a(x).$$

- この補正のあと、

$$\langle \rangle \rightarrow \langle \rangle'.$$

- 従って、恒等式は

$$\begin{aligned} & \langle [\partial_\mu S_\mu(x) + X_{gf}(x) + X_{c\bar{c}}(x)] A_\alpha^b(y) \bar{\psi}^c(z) \rangle' \\ &= -\delta(x-y) \langle g_0 \gamma_\alpha \psi^b(y) \bar{\psi}^c(z) \rangle' - \delta(x-z) \left\langle A_\alpha^b(y) \frac{1}{2g_0} \sigma_{\beta\gamma} F_{\beta\gamma}^c(z) \right\rangle', \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} & \langle [\partial_\mu S_\mu(x) + X_{gf}(x) + X_{c\bar{c}}(x)] \bar{\psi}^b(y) c^c(z) \bar{c}^d(w) \rangle' \\ &= -\delta(x-y) \left\langle \frac{1}{2g_0} \sigma_{\beta\gamma} F_{\beta\gamma}^b(y) c^c(z) \bar{c}^d(w) \right\rangle'. \end{aligned}$$

MS スキームでの繰り込み

- 以下、MS スキームでの繰り込み（繰り込みスケール μ ）を行うことにして、

$$\Delta \equiv \frac{g^2}{(4\pi)^2} C_2(G) \frac{1}{\epsilon}, \quad D = 4 - 2\epsilon,$$

とおく。

MS スキームでの繰り込み

- 以下、MS スキームでの繰り込み（繰り込みスケール μ ）を行うことにして、

$$\Delta \equiv \frac{g^2}{(4\pi)^2} C_2(G) \frac{1}{\epsilon}, \quad D = 4 - 2\epsilon,$$

とおく。

- ファインマンゲージ $\lambda_0 = 1$ では、

$$g_0 = \mu^\epsilon \left(1 - \frac{3}{2}\Delta\right) g,$$

$$\lambda_0 = (1 - \Delta) \lambda,$$

$$A_\mu^a(x) = (1 - \Delta) A_{\mu R}^a(x), \quad \frac{1}{g_0} A_\mu^a(x) = \left(1 + \frac{1}{2}\Delta\right) \frac{1}{g} A_{\mu R}^a(x),$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi^a(x) \\ \bar{\psi}^a(x) \end{array} \right\} = \left(1 - \frac{1}{2}\Delta\right) \left\{ \begin{array}{l} \psi_R^a(x) \\ \bar{\psi}_R^a(x) \end{array} \right\},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c^a(x) \\ \bar{c}^a(x) \end{array} \right\} = \left(1 - \frac{5}{4}\Delta\right) \left\{ \begin{array}{l} c_R^a(x) \\ \bar{c}_R^a(x) \end{array} \right\},$$

$$F_{\mu\nu}^a(x) = \left(1 - \frac{5}{2}\Delta\right) [\partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x)] + \left(1 - \frac{11}{4}\Delta\right) \{f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c\}_R(x).$$

複合演算子の繰り込み

- さらに、WT 関係式中の複合演算子に対しては、1 ループまでの解析により

$$\begin{aligned} X_{gf}(x) + X_{c\bar{c}}(x) \\ \equiv (1 + \Delta) X_{gfR}(x) + (1 - \Delta) X_{c\bar{c}R}(x) \\ + \Delta \partial_\mu \left\{ -\frac{1}{2g} \sigma_{\rho\sigma} \gamma_\mu \psi_R^a(x) [\partial_\rho A_{\sigma R}^a(x) - \partial_\sigma A_{\rho R}^a(x)] \right\} \\ + 2\Delta \left(-\frac{1}{g^2} \right) \partial_\mu \partial_\mu A_{\nu R}^a(x) g \gamma_\nu \psi_R^a(x) \\ + \frac{3}{2} \Delta \frac{1}{2g} [\partial_\mu A_{\nu R}^a(x) - \partial_\nu A_{\mu R}^a(x)] \sigma_{\mu\nu} \not{\partial} \psi_R^a(x) \\ + \Delta \frac{1}{4g} \partial_\mu \left\{ [A_{\nu R}^a(x) \gamma_\nu \gamma_\mu + 2A_{\mu R}^a(x)] \not{\partial} \psi_R^a(x) \right\} + \Delta \mathcal{O}(A_{\mu R}^2), \end{aligned}$$

および

$$S_\mu(x) \equiv S_{\mu R}(x) - \Delta \frac{1}{4g} [A_{\nu R}^a(x) \gamma_\nu \gamma_\mu + 2A_{\mu R}^a(x)] \not{\partial} \psi_R^a(x) + \Delta \mathcal{O}(A_{\mu R}^2),$$

の繰り込みが分かる。これら繰り込まれた量で恒等式を書き直すと、...

繰り込まれた量での超対称 WT 関係式

- 繰り込まれた量での超対称 WT 関係式、

$$\begin{aligned} & \left\langle \left[\partial_\mu \mathcal{S}_{\mu R}(x) + X_{gfR}(x) + X_{c\bar{c}R}(x) + \Delta \mathcal{O}(A_{\mu R}^2) \right] A_{\alpha R}^b(y) \bar{\psi}_R^c(z) \right\rangle' \\ &= -\delta(x-y) \left\langle g_{\gamma\alpha} \psi_R^b(y) \bar{\psi}_R^c(z) \right\rangle' \\ & \quad - \delta(x-z) \left\langle A_{\alpha R}^b(y) \frac{1}{2g} \sigma_{\beta\gamma} \left[\partial_\beta A_{\gamma R}^c(z) - \partial_\gamma A_{\beta R}^c(z) + \{f^{cde} A_\beta^d A_\gamma^e\}_R(z) \right] \right\rangle'. \end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned} & \left\langle \left[\partial_\mu \mathcal{S}_{\mu R}(x) + X_{gfR}(x) + X_{c\bar{c}R}(x) + \Delta \mathcal{O}(A_{\mu R}^2) \right] \bar{\psi}_R^b(y) c_R^c(z) \bar{c}_R^d(w) \right\rangle' \\ &= -\delta(x-y) \left\langle \frac{1}{2g} \sigma_{\beta\gamma} \left[\partial_\beta A_{\gamma R}^b(y) - \partial_\gamma A_{\beta R}^b(y) + \{f^{bef} A_\beta^e A_\gamma^f\}_R(y) \right] c_R^c(z) \bar{c}_R^d(w) \right\rangle'. \end{aligned}$$

が得られる。

- 全てが繰り込まれた量で書かれており、これが量子論における超対称性の実現とみなせる。

繰り込まれた量での超対称 WT 関係式

- 繰り込まれた量での超対称 WT 関係式、

$$\begin{aligned} & \left\langle \left[\partial_\mu \mathbf{S}_{\mu R}(x) + X_{\text{gf}R}(x) + X_{\text{c}\bar{\text{c}}R}(x) + \Delta \mathcal{O}(A_{\mu R}^2) \right] A_{\alpha R}^b(y) \bar{\psi}_R^c(z) \right\rangle' \\ &= -\delta(x-y) \left\langle g_{\gamma\alpha} \psi_R^b(y) \bar{\psi}_R^c(z) \right\rangle' \\ & \quad - \delta(x-z) \left\langle A_{\alpha R}^b(y) \frac{1}{2g} \sigma_{\beta\gamma} \left[\partial_\beta A_{\gamma R}^c(z) - \partial_\gamma A_{\beta R}^c(z) + \{f^{cde} A_\beta^d A_\gamma^e\}_R(z) \right] \right\rangle'. \end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned} & \left\langle \left[\partial_\mu \mathbf{S}_{\mu R}(x) + X_{\text{gf}R}(x) + X_{\text{c}\bar{\text{c}}R}(x) + \Delta \mathcal{O}(A_{\mu R}^2) \right] \bar{\psi}_R^b(y) c_R^c(z) \bar{c}_R^d(w) \right\rangle' \\ &= -\delta(x-y) \left\langle \frac{1}{2g} \sigma_{\beta\gamma} \left[\partial_\beta A_{\gamma R}^b(y) - \partial_\gamma A_{\beta R}^b(y) + \{f^{bef} A_\beta^e A_\gamma^f\}_R(y) \right] c_R^c(z) \bar{c}_R^d(w) \right\rangle'. \end{aligned}$$

が得られる。

- 全てが繰り込まれた量で書かれており、これが量子論における超対称性の実現とみなせる。
- 我々の知る限り、こうした解析を具体的にやった初めての例

繰り込まれた量での超対称 WT 関係式

- 上の導出では、

$$\begin{aligned} \left\langle \left(-\frac{1}{g^2} \right) \partial_\mu \partial_\mu A_{\nu R}^a(x) A_{\rho R}^b(y) \right\rangle' &= \delta^{ab} \delta_{\nu\rho} \delta(x-y), \\ \langle \partial \psi_R^a(x) \bar{\psi}_R^b(y) \rangle' &= \delta^{ab} \delta(x-y), \\ \langle X_{c\bar{c}R}(x) A_{\alpha R}^b(y) \bar{\psi}_R^c(z) \rangle' &= 0, \\ \left\langle \left(-\frac{1}{g^2} \right) \partial_\mu \partial_\mu A_{\nu R}^a(x) g_{\gamma\nu} \psi_R^a(x) \bar{\psi}_R^b(y) c_R^c(z) \bar{c}_R^d(w) \right\rangle' \\ &= \langle X_{c\bar{c}}(x) \bar{\psi}_R^b(y) c_R^c(z) \bar{c}_R^d(w) \rangle', \end{aligned}$$

といった、tree-level で成立する関係式を用いた。

繰り込まれた量での超対称 WT 関係式

- 上の導出では、

$$\begin{aligned} \left\langle \left(-\frac{1}{g^2} \right) \partial_\mu \partial_\mu A_{\nu R}^a(x) A_{\rho R}^b(y) \right\rangle' &= \delta^{ab} \delta_{\nu\rho} \delta(x-y), \\ \langle \partial \psi_R^a(x) \bar{\psi}_R^b(y) \rangle' &= \delta^{ab} \delta(x-y), \\ \langle X_{c\bar{c}R}(x) A_{\alpha R}^b(y) \bar{\psi}_R^c(z) \rangle' &= 0, \\ \left\langle \left(-\frac{1}{g^2} \right) \partial_\mu \partial_\mu A_{\nu R}^a(x) g_{\gamma\nu} \psi_R^a(x) \bar{\psi}_R^b(y) c_R^c(z) \bar{c}_R^d(w) \right\rangle' \\ &= \langle X_{c\bar{c}}(x) \bar{\psi}_R^b(y) c_R^c(z) \bar{c}_R^d(w) \rangle', \end{aligned}$$

といった、tree-level で成立する関係式を用いた。

- 従って、1 ループレベルでは、上の

$$\partial_\mu S_{\mu R}(x) + X_{gfR}(x) + X_{c\bar{c}R}(x),$$

の組み合わせが、正しい超対称変換を生成する。

次元正則化における超対称カレント

- ゲージ不変な演算子の on-shell 相関関数の中では

$$\partial_\mu S_{\mu R}(x) + X_{gfR}(x) + X_{c\bar{c}R}(x) \rightarrow \partial_\mu S_{\mu R}(x),$$

かつ、

$$S_{\mu R}(x) \rightarrow -\frac{1}{2g_0} \sigma_{\rho\sigma} \gamma_\mu \psi^a(x) F_{\rho\sigma}^a(x) + O(g_0^3),$$

と置き換えて良いことが議論できる。これが、次元正則化における正しく規格化された保存する超対称カレントである！（やっと分かった...）

次元正則化における超対称カレント

- ゲージ不変な演算子の on-shell 相関関数の中では

$$\partial_\mu S_{\mu R}(x) + X_{gfR}(x) + X_{c\bar{c}R}(x) \rightarrow \partial_\mu S_{\mu R}(x),$$

かつ、

$$S_{\mu R}(x) \rightarrow -\frac{1}{2g_0} \sigma_{\rho\sigma} \gamma_\mu \psi^a(x) F_{\rho\sigma}^a(x) + O(g_0^3),$$

と置き換えて良いことが議論できる。これが、次元正則化における正しく規格化された保存する超対称カレントである！（やっと分かった...）

- これをフローされた場の $t \rightarrow 0$ の振る舞いで書き直す。

- $S_{\mu R}(x)$ をフローされた場の $t \rightarrow 0$ の振る舞いで書き直す。1 ループまでで

$$\begin{aligned} \psi^a(x) F_{\mu\nu}^a(x) &= \left[1 - \zeta_1^{(1)}(t) \right] \chi^a(t, x) G_{\mu\nu}^a(t, x) \\ &\quad - \zeta_2^{(1)}(t) \left[\gamma_\mu \gamma_\rho \chi^a(t, x) G_{\rho\nu}^a(t, x) - \gamma_\nu \gamma_\rho \chi^a(t, x) G_{\rho\mu}^a(t, x) \right] \\ &\quad - \zeta_3^{(1)}(t) \sigma_{\rho\sigma} \sigma_{\mu\nu} \chi^a(t, x) G_{\rho\sigma}^a(t, x) + O(t), \end{aligned}$$

とすると、(背景場の方法を用いた) 幾分長い計算ののち、

$$\zeta_1^{(1)}(t) = \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} C_2(G) \frac{-2}{D-4} (8\pi t)^{2-D/2},$$

$$\zeta_2^{(1)}(t) = \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} C_2(G) \frac{2}{(D-4)(D-2)} (8\pi t)^{2-D/2},$$

$$\zeta_3^{(1)}(t) = \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} C_2(G) \frac{4}{(D-4)(D-2)D} (8\pi t)^{2-D/2},$$

を得る。

グラディエント・フローによる超対称カレントの表示

- これを用いて、最終的に超対称カレントの表示、

$$S_{\mu R}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2\bar{g}(1/\sqrt{8t})} \left\{ 1 + \frac{\bar{g}(1/\sqrt{8t})^2}{(4\pi)^2} C_2(G) \left[-\frac{7}{2} - \frac{3}{2} \ln \pi + \frac{1}{2} \ln(432) \right] \right\} \right. \\ \left. \times \sigma_{\rho\sigma} \gamma_{\mu} \dot{\chi}^a(t, x) G_{\rho\sigma}^a(t, x) - \frac{\bar{g}(1/\sqrt{8t})}{(4\pi)^2} C_2(G) 3\gamma_{\nu} \dot{\chi}^a(t, x) G_{\nu\mu}^a(t, x) \right),$$

を得る。

グラディエント・フローによる超対称カレントの表示

- これを用いて、最終的に超対称カレントの表示、

$$S_{\mu R}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2\bar{g}(1/\sqrt{8t})} \left\{ 1 + \frac{\bar{g}(1/\sqrt{8t})^2}{(4\pi)^2} C_2(G) \left[-\frac{7}{2} - \frac{3}{2} \ln \pi + \frac{1}{2} \ln(432) \right] \right\} \right. \\ \left. \times \sigma_{\rho\sigma} \gamma_{\mu} \dot{\chi}^a(t, x) G_{\rho\sigma}^a(t, x) - \frac{\bar{g}(1/\sqrt{8t})}{(4\pi)^2} C_2(G) 3\gamma_{\nu} \dot{\chi}^a(t, x) G_{\nu\mu}^a(t, x) \right),$$

を得る。

- 確かに明白に有限（ネーターカレントなのでそうになっていないとまずい）。
- 正則化によらない表式（格子ゲージ理論への応用）
- 超共形アノマリー（gamma-trace アノマリー）

$$\gamma_{\mu} S_{\mu R}(x) = -\frac{g}{(4\pi)^2} C_2(G) 3\sigma_{\mu\nu} \psi^a(x) F_{\nu\mu}^a(x) + O(g^3),$$

の形が見て取れる（正しく規格化された保存する超対称カレントの特徴）。

グラディエント・フローによる超対称カレントの表示 (改良版)

- 2ループまでの超共形アノマリー

$$\gamma_\mu S_{\mu R}(x) = -\frac{\beta(g)}{g^2} \{ \sigma_{\mu\nu} \psi^a F_{\mu\nu}^a \}_R(x),$$

ここで、

$$\beta(g) = -b_0 g^3 - b_1 g^5 + \mathcal{O}(g^7), \quad b_0 = \frac{1}{(4\pi)^2} 3C_2(G), \quad b_1 = \frac{1}{(4\pi)^4} 6C_2(G)^2,$$

の情報を用いると、

$$S_{\mu R}(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2\bar{g}(1/\sqrt{8t})} \left\{ 1 + \frac{\bar{g}(1/\sqrt{8t})^2}{(4\pi)^2} C_2(G) \left[-\frac{7}{2} - \frac{3}{2} \ln \pi + \frac{1}{2} \ln(432) \right] \right\} \right. \\ \left. \times \sigma_{\rho\sigma} \gamma_\mu \dot{\chi}^a(t, x) G_{\rho\sigma}^a(t, x) \right. \\ \left. - \frac{\bar{g}(1/\sqrt{8t})}{(4\pi)^2} C_2(G) 3 \left\{ 1 + \frac{\bar{g}(1/\sqrt{8t})^2}{(4\pi)^2} C_2(G) \left[4 + \frac{3}{2} \ln \pi + \frac{1}{2} \ln(432) \right] \right\} \right. \\ \left. \times \gamma_\nu \dot{\chi}^a(t, x) G_{\nu\mu}^a(t, x) \right).$$

まとめと今後の展望

- グラディエント・フローとその小フロー時間展開を用いて、4次元 $\mathcal{N} = 1$ 超対称 Yang–Mills 理論における、正しく規格化された保存する超対称カレントの正則化に依らない表式を得た。

まとめと今後の展望

- グラディエント・フローとその小フロー時間展開を用いて、4次元 $\mathcal{N} = 1$ 超対称 Yang–Mills 理論における、正しく規格化された保存する超対称カレントの正則化に依らない表式を得た。
- 格子ゲージ理論における超対称カレントの相関関数へ応用可能。

まとめと今後の展望

- グラディエント・フローとその小フロー時間展開を用いて、4次元 $\mathcal{N} = 1$ 超対称 Yang-Mills 理論における、正しく規格化された保存する超対称カレントの正則化に依らない表式を得た。
- 格子ゲージ理論における超対称カレントの相関関数へ応用可能。
- 例えば、パラメータチューニング (gaugino mass) に有用であろう。

まとめと今後の展望

- グラディエント・フローとその小フロー時間展開を用いて、4次元 $\mathcal{N} = 1$ 超対称 Yang-Mills 理論における、正しく規格化された保存する超対称カレントの正則化に依らない表式を得た。
- 格子ゲージ理論における超対称カレントの相関関数へ応用可能。
- 例えば、パラメータチューニング (gaugino mass) に有用であろう。
- goldstino の物理への応用？

まとめと今後の展望

- グラディエント・フローとその小フロー時間展開を用いて、4次元 $\mathcal{N} = 1$ 超対称 Yang–Mills 理論における、正しく規格化された保存する超対称カレントの正則化に依らない表式を得た。
- 格子ゲージ理論における超対称カレントの相関関数へ応用可能。
- 例えば、パラメータチューニング (gaugino mass) に有用であろう。
- goldstino の物理への応用？
- より複雑な、スカラー場を含んだ超対称性理論への拡張：

$$\partial_t \varphi(t, \mathbf{x}) = D_\mu D_\mu \varphi(t, \mathbf{x}), \quad \varphi(t=0, \mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}).$$

まとめと今後の展望

- グラディエント・フローとその小フロー時間展開を用いて、4次元 $\mathcal{N} = 1$ 超対称 Yang–Mills 理論における、正しく規格化された保存する超対称カレントの正則化に依らない表式を得た。
- 格子ゲージ理論における超対称カレントの相関関数へ応用可能。
- 例えば、パラメータチューニング (gaugino mass) に有用であろう。
- goldstino の物理への応用？
- より複雑な、スカラー場を含んだ超対称性理論への拡張：

$$\partial_t \varphi(t, x) = D_\mu D_\mu \varphi(t, x), \quad \varphi(t=0, x) = \phi(x).$$

- まずは、4次元 $\mathcal{N} = 2$ もしくは $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang–Mills 理論が自然なターゲット。

まとめと今後の展望

- グラディエント・フローとその小フロー時間展開を用いて、4次元 $\mathcal{N} = 1$ 超対称 Yang–Mills 理論における、正しく規格化された保存する超対称カレントの正則化に依らない表式を得た。
- 格子ゲージ理論における超対称カレントの相関関数へ応用可能。
- 例えば、パラメータチューニング (gaugino mass) に有用であろう。
- goldstino の物理への応用？
- より複雑な、スカラー場を含んだ超対称性理論への拡張：

$$\partial_t \varphi(t, x) = D_\mu D_\mu \varphi(t, x), \quad \varphi(t=0, x) = \phi(x).$$

- まずは、4次元 $\mathcal{N} = 2$ もしくは $\mathcal{N} = 4$ 超対称 Yang–Mills 理論が自然なターゲット。
- より大局的には、場の量子論にとって、グラディエント・フローとは結局何なのか？