

弦の場の理論における 位相的構造と反転対称性

小路田 俊子

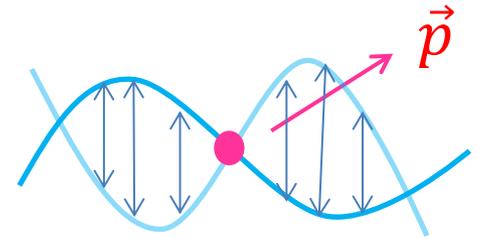
with 畑氏(京都大学)

(2015.4.9 益川塾セミナー)

目次

- 弦の場の理論とは (Cubic String Field Theory)
- 弦の場の理論の位相的構造
- 相関関数の反転対称性
- 結論

弦の場の理論



弦理論には原理が無い

固定された背景時空中のon-shell振幅の摂動論的ルール

▷ 「弦の場の理論」 弦理論のoff-shellかつ非摂動論的定式化

c.f. 点粒子の場: 空間の各点に力学変数 $\phi(x)$ を導入し、粒子の生成消滅を行うことで粒子の無限多体系を扱った。

力学変数:「弦の場」

弦の配位 $X^\mu(\sigma, \tau = 0)$ を引数に持つ汎関数 $\Psi[X^\mu(\sigma), b(\sigma), c(\sigma)]$

弦の配位 $X^\mu(\sigma)$ の生成消滅

世界面ゴースト

→ (開弦、閉弦、巻きついた弦、超弦、、、)

※ 共変不変な弦の場を構成するために、 $X^0(\sigma)$ も含む

成分場展開 (Fock state 表示)

$$\text{c.f.} \quad \phi(x) = \int d^4p (e^{-ipx} a_p^\dagger + e^{ipx} a_p)$$

$$\Psi[\underline{X}, b, c(\sigma)] = \int d^{26}p e^{ipx} [|0\rangle t(p) + \alpha_{-1}^\mu |0\rangle A_\mu(p) + c |0\rangle B(p) + \dots]$$

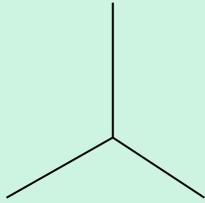
弦座標

Yang-Mills場+高階テンソル場

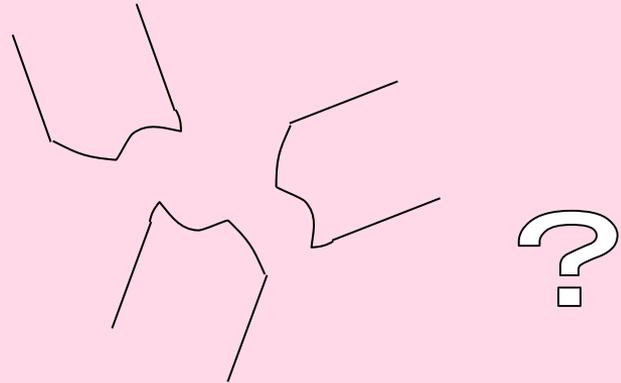
第二量子化：展開係数を演算子へ格上げし、弦の場を演算子へ

作用

$$S = \frac{1}{2} \int \Psi * Q_B \Psi + \frac{1}{3} \int \Psi * \Psi * \Psi + \dots$$



$$\delta(x_1 - x_2)\delta(x_2 - x_3)\delta(x_3 - x_1)$$



$$Q_B : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \quad * : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \quad \int : \mathcal{A} \rightarrow \text{C数}$$

\mathcal{A} : 弦の場の空間

* 積、 \int は弦の特殊な貼り合わせ方

運動項

場の揺らぎが十分小さい時に、場の運動方程式の解として
第一量子化された弦理論の物理的条件を再現せよ



明白に共変な量子化を行えば、
BRST電荷で物理的状态が与えられる。

$$Q_B |\text{Phys}\rangle = 0$$

$$Q_B = \int d\sigma \left(T^m + \frac{1}{2} T^{gh} \right) \quad [\text{Kato, Ogawa}]$$

作用の成分場展開

$$\frac{1}{2} \int \Psi * Q_B \Psi = -\frac{1}{2} \int d^{26}x \, \underline{t(x)} (\partial^\mu \partial_\mu + 1) t(x) + \frac{1}{4} \underline{F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}} - \frac{1}{2} (B - \partial_\mu A^\mu)^2 + \dots$$

タキオン

Massless gauge場

ゲージ対称性

$$S = \frac{1}{2} \int \Psi * Q_B \Psi$$
$$= -\frac{1}{2} \int d^{26}x t(x) (\partial^\mu \partial_\mu + 1) t(x) + \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (B - \partial_\mu A^\mu)^2 + \dots$$

ゲージ不変性 $\delta\Psi = Q_B \Lambda$

$$t(x) \rightarrow t(x)$$

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \chi(x)$$

$$B(x) \rightarrow B(x) - \partial^2 \chi(x)$$

...

タキオン場

U(1)場

Yang-Mills理論のゲージ対称性の線形部分を含み、
より高階の足を持つ場の対称性を含む場の理論

**→相互作用を入れて Yang-Mills 理論の対称性を含む
より大きな対称性を持つように構成**

Cubic String Field Theory ['86 Witten]

For open bosonic

$$S = \frac{1}{2} \int \Psi * Q_B \Psi + \frac{1}{3} \int \Psi * \Psi * \Psi$$

★ 作用の中に現れる演算の満たす性質

$$Q_B^2 = 0$$

$$Q_B(\Psi * \Phi) = (Q_B \Psi) * \Phi + (-1)^\Psi \Psi * Q_B \Phi$$

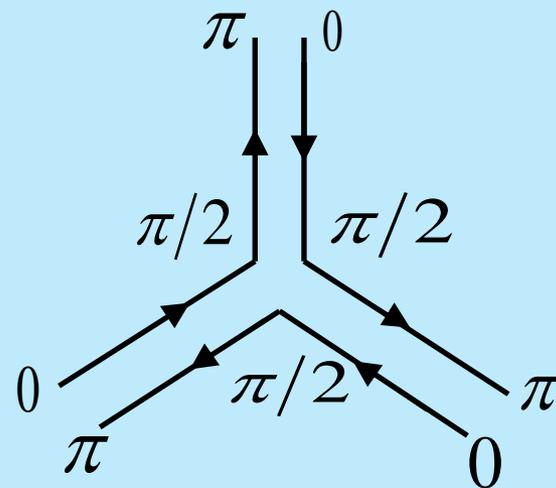
$$(\Psi * \Phi) * \Sigma = \Psi * (\Phi * \Sigma)$$

$$\int \Psi * \Phi = (-1)^{\Psi\Phi} \int \Phi * \Psi$$

$$\int Q_B \Psi = 0$$

これらが作用のゲージ対称性を保証

$$\delta \Psi = Q_B \Lambda + \Psi * \Lambda - \Lambda * \Psi$$

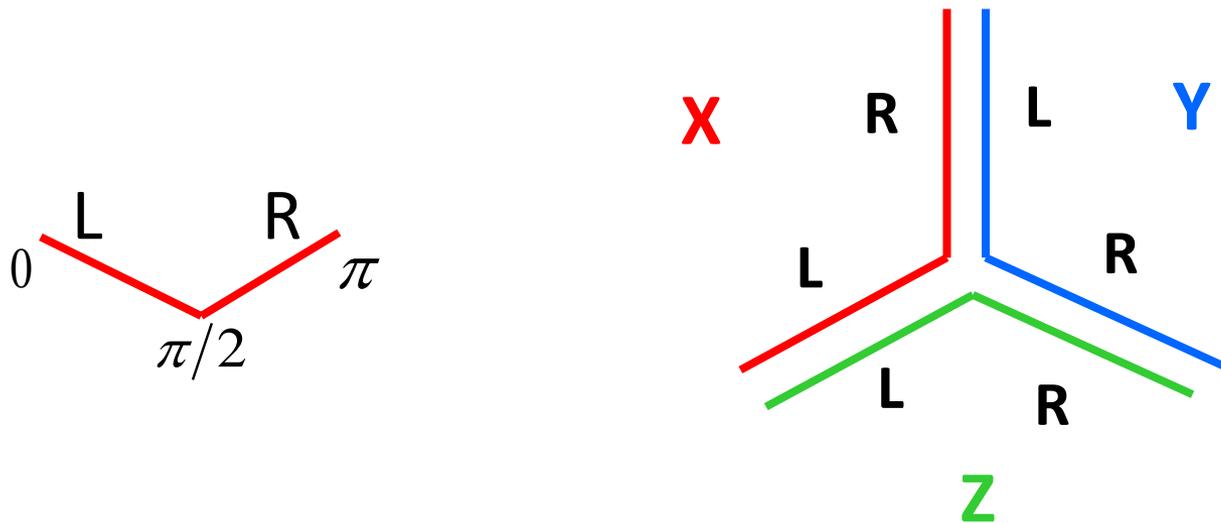


Witten's “*” product

* product

* 積 : 2つの弦の場から新しい弦の場を作る演算

$$A[X] * B[Y] = (A * B)[Z]$$



$$(A * B)[Z(\sigma)] = \int \prod_{0 \leq \sigma' \leq \pi/2} dY(\sigma') dX(\pi - \sigma') \prod_{\pi/2 \leq \sigma'' \leq \pi} \delta(X(\sigma'') - Y(\pi - \sigma'')) \\ \times A[X(\sigma'')] B[Y(\sigma'')]$$

Integral symbol

\int :1つの弦の場から数を作る演算

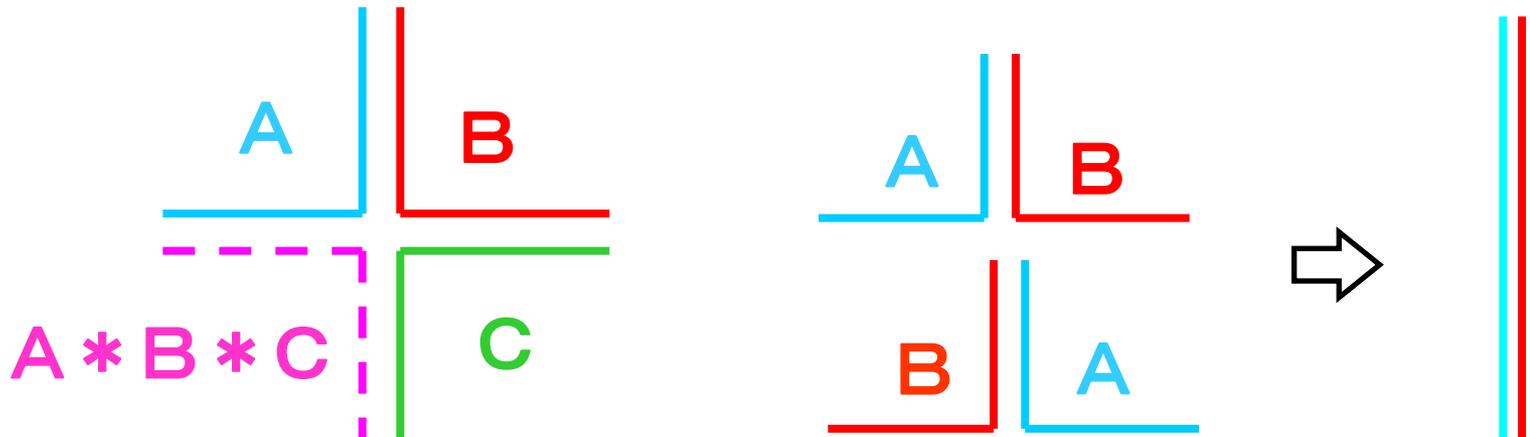


$$\int A = \int \prod_{0 \leq \sigma \leq \pi} dX(\sigma) \prod_{0 \leq \sigma' \leq \pi/2} \delta(X(\sigma') - X(\pi - \sigma')) A[X(\sigma')]$$

$$\therefore \int \Psi * \Psi * \Psi =$$

演算の性質

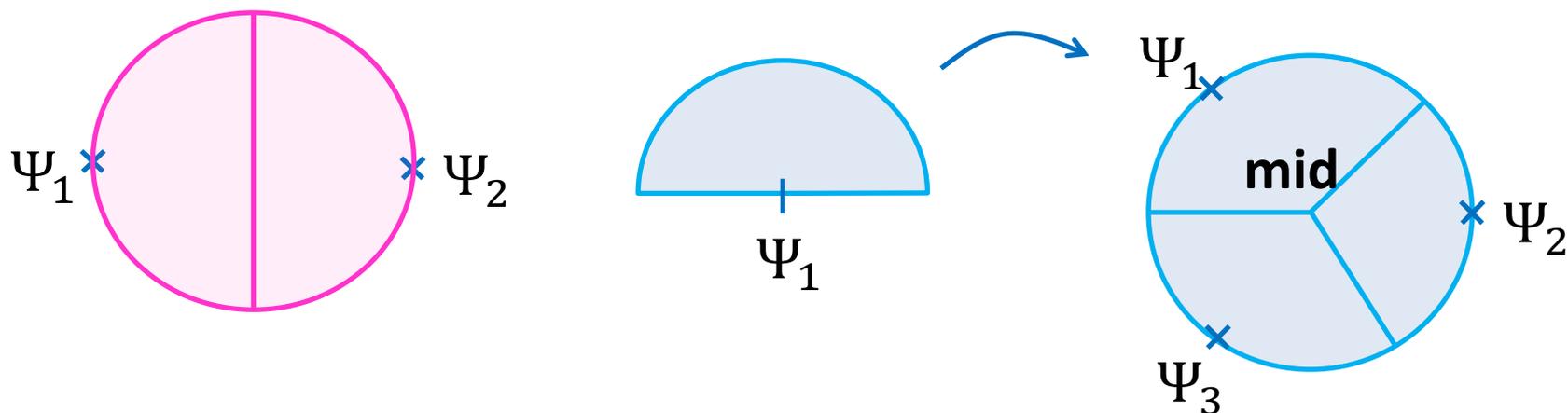
$$\left\{ \begin{array}{l} Q_B^2 = 0 \\ Q_B(A * B) = (Q_B A) * B + (-1)^A A * Q_B B \\ (A * B) * C = A * (B * C) \\ \int A * B = (-1)^{AB} \int B * A \quad \text{と} \quad \int Q_B \Psi = 0 \end{array} \right.$$



相関関数による定義

$$S = \frac{1}{2} \langle \Psi | Q_B \Psi \rangle + \frac{1}{3} \langle \Psi, \Psi, \Psi \rangle_3$$

BPZ 内積



$$\langle \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3 \rangle_3 = \langle f_1 \circ \Psi_1, f_2 \circ \Psi_2, f_3 \circ \Psi_3 \rangle_{\text{UHP}}$$

where $f_k = h^{-1} \circ e^{2\pi i(2-k)/3} h^{2/3}(z)$, $h = \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right)$

3point vertex のFock表示

['89 LaClair et al]

$$\langle \mathbf{V}_3 | \Psi_1 \rangle | \Psi_2 \rangle | \Psi_3 \rangle = \langle \Psi_1, \Psi_2, \Psi_3 \rangle_3$$

$$| \mathbf{V}_3 \rangle = \exp \left[\sum_{r,s=1}^3 \left(\frac{1}{2} \sum_{n,m=0}^{\infty} N_{nm}^s \alpha_{-n}^{(r)} \alpha_{-m}^{(s)} - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} X_{nm}^{rs} c_{-n}^{(r)} b_{-m}^{(s)} \right) \right] | 0 \rangle_1 \otimes | 0 \rangle_2 \otimes | 0 \rangle_3$$

$$\times (2\pi)^{26} \delta^{26}(p_1 + p_2 + p_3)$$

$$N_{nm}^{rs} = \frac{1}{nm} \oint_{z=0} \frac{dz}{2\pi i} \frac{h'_r(z)}{z^n} \oint_{w=0} \frac{dw}{2\pi i} \frac{h'_s(w)}{w^n} \frac{1}{(h_r(z) - h_s(w))^2} \quad (n, m > 1)$$

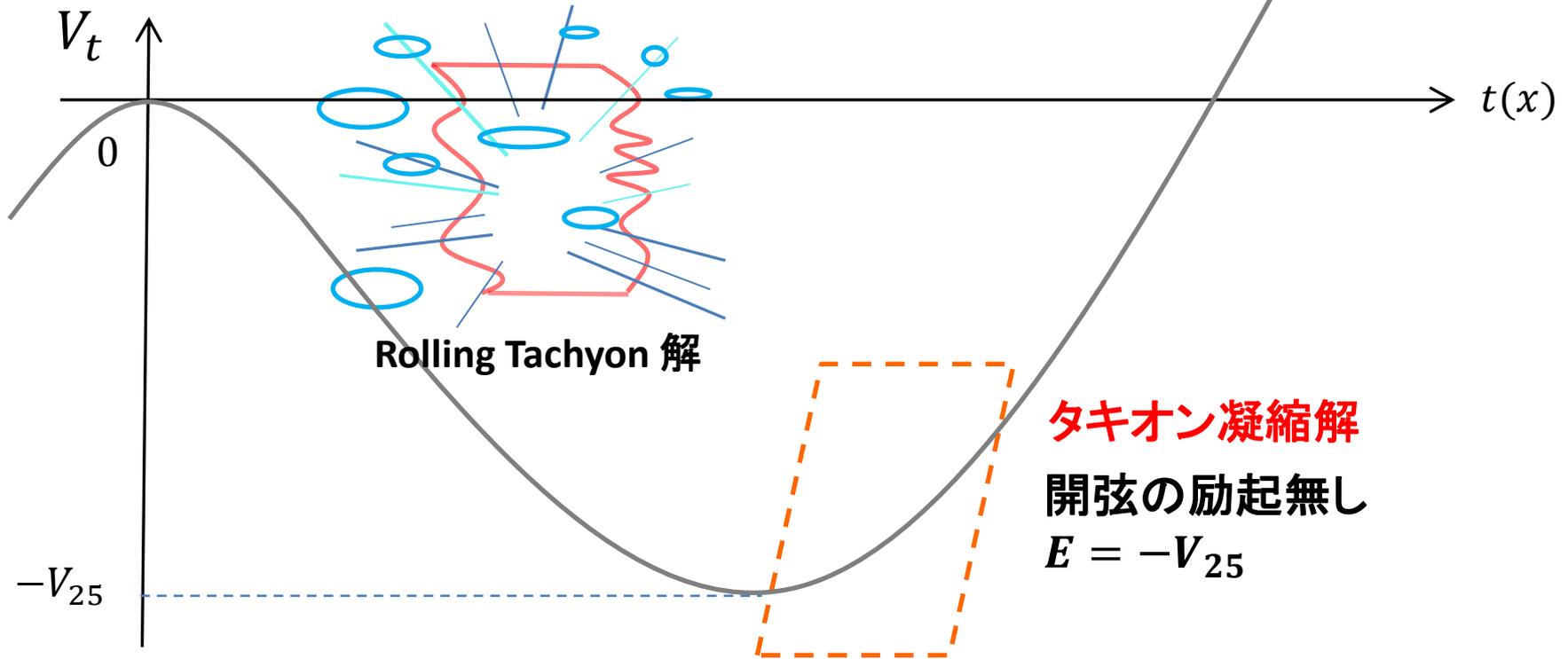
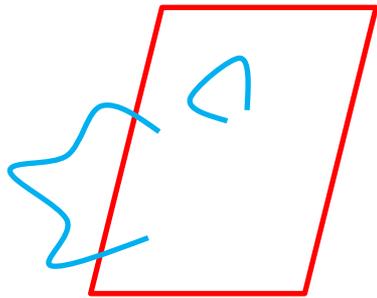
$$N_{0m}^{rs} = N_{m0}^{sr} = \frac{1}{m} \oint_{w=0} \frac{dw}{2\pi i} \frac{h'_s(w)}{w^m} \frac{1}{h_r(0) - h_s(w)} \quad (m \geq 1)$$

$$N_{00}^{rs} = \begin{cases} \ln |h'_r(0)| & (r = s) \\ \ln |h_r(0) - h_s(0)| & (r \neq s), \end{cases} \quad h_r(z) = \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right)^{2/3} e^{2(r-1)\pi i/3}$$

タキオン凝縮解

[Takahashi&Tanimoto,
Schnabl]

- ボソニックな開弦にはタキオンモードが存在
⇒不安定Dブレーン
- Dブレーンの崩壊過程は非摂動論的
- **場の古典解として非摂動論的真空を再現**
→他の真空解の探索



タキオン凝縮解

[Takahashi&Tanimoto,
Schnabl]

- ボソニックな開弦にはタキオンモードが存在

'86 CSFT誕生

'05 タキオン凝縮解の発見

無限自由度のために解析が困難。

CSFTの見通しの良いイメージを持つことが望まれる。

弦の場の理論が真に弦理論の非摂動論的定式化

となっているならば、理論の持つ構造が弦理論の背後に存在する
原理

$-V_{25}$

タキオン凝縮解

開弦の励起無し

$$E = -V_{25}$$

Chern-Simons理論とCSFTの類似性

Chern-Simons理論

$$S = \frac{k}{2\pi} \int_M \text{tr} \left[\frac{1}{2} A \wedge dA + \frac{1}{3} A \wedge A \wedge A \right]$$

$$d^2 = 0$$

$$d(A \wedge B) = A \wedge dB + (-1)^A dA \wedge B$$

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

$$\text{tr} A \wedge B = (-1)^{AB} \text{tr} B \wedge A$$

$$\int_M dA = 0$$

Cubic SFT

$$S = \frac{1}{g_o^2} \int \left[\frac{1}{2} \Psi * Q_B \Psi + \frac{1}{3} \Psi * \Psi * \Psi \right]$$

$$Q_B^2 = 0$$

$$Q_B(\Psi * \Phi) = (Q_B \Psi) * \Phi + (-1)^\Psi \Psi * Q_B \Phi$$

$$(\Psi * \Phi) * \Sigma = \Psi * (\Phi * \Sigma)$$

$$\int \Psi * \Phi = (-1)^{\Psi\Phi} \int \Phi * \Psi$$

$$\int Q_B \Psi = 0$$

The Similarity between CS and CSFT

記号の置き換え

$$A(x) \rightarrow \Psi[X]$$

$$d \rightarrow Q_B, \quad \wedge \rightarrow *$$

$$\int_M \rightarrow \int_X$$

作用の代数的構造が同じなので、ゲージ変換性や、運動方程式も記号の置き換えで移り合う

Winding数 in CS 理論

作用の有限ゲージ変換 $g(d + A)g^{-1}$ で得られる Winding 数

$$N_{CS} = \int_M \text{tr} (g(x) dg^{-1}(x))^3$$

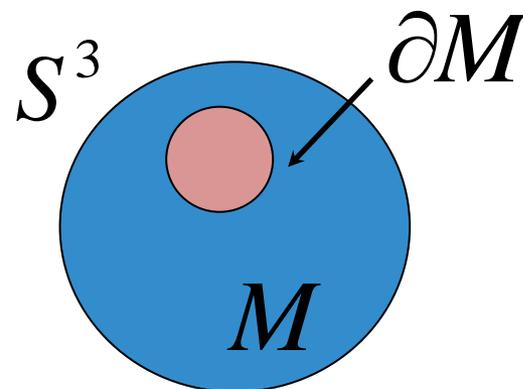
整数に量子化された位相的な量。

多様体から群への巻き付き数を数える。

Winding 数の特異性を顕わにする表式

$$g = e^{i\phi(x)\tau} \quad \tau: \text{パウリ行列}$$

$$\begin{aligned} \int_M (gdg^{-1})^3 &= \int_M d(\cdots \phi(x) \cdots) \\ &= \int_{\partial M} (\cdots \phi(x) \cdots) \in \text{整数} \end{aligned}$$



“Winding数” in CSFT

作用の有限ゲージ変換 $g(d + A)g^{-1}$ で得られる Winding数

$$N_{CS} = \int_M \text{tr}(g(x)dg^{-1}(x))^3$$

一方、CSFTの作用の有限ゲージ変換 $U(Q_B + \Psi)U^{-1}$ で得られる量

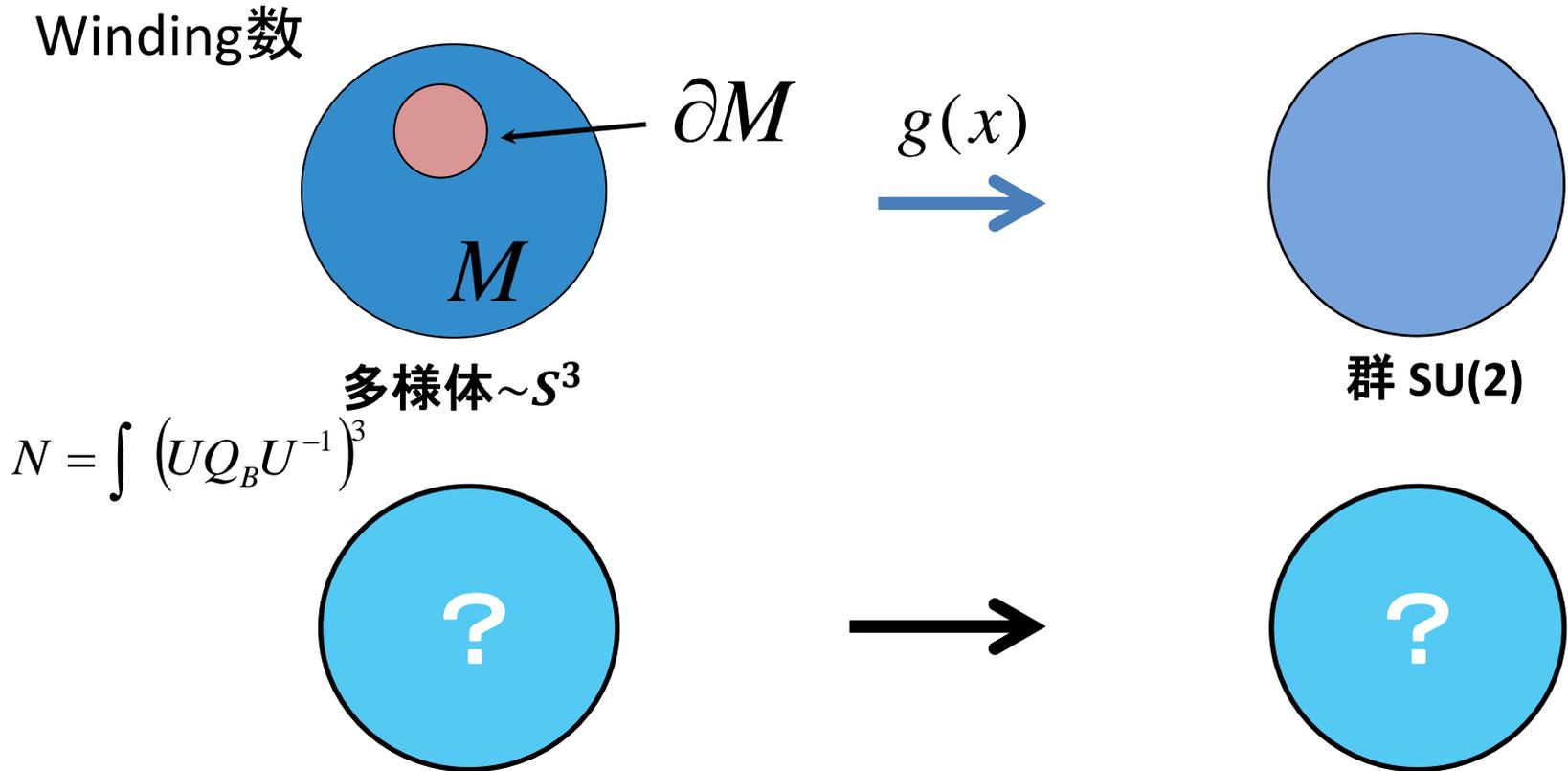
$$N = \frac{\pi^2}{3} \int (U * Q_B U^{-1})^3$$

この量も微小ゲージ変換 $\delta\Psi = Q_B\Lambda + \Psi * \Lambda - \Lambda * \Psi$ で不変な
トポロジカルな量

CS理論のアナロジー

- Nは整数に量子化されているのだろうか。
- 整数になるとしたらどんな構造がそれを保証しているのか。

模式図



- N は整数に量子化されているのだろうか
- CSFTには多様体、コンパクト、表面積分という概念無し
- どこからどこへの写像かすら分からない

Winding数と多重ブレイン解

Pure - gauge型解のエネルギー密度

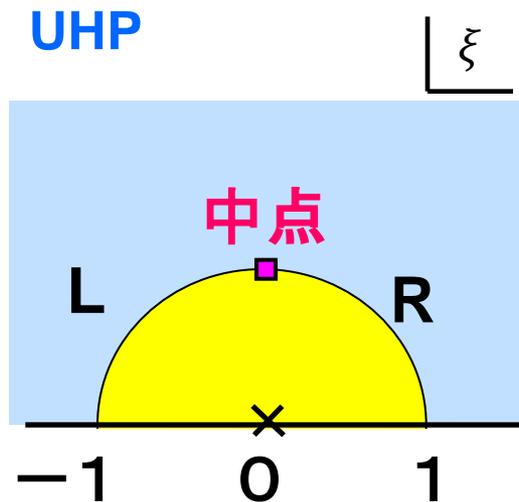
$$E = \frac{N}{2\pi^2 g_o^2} \quad N = \int (U Q_B U^{-1})^3$$

ブレイン一枚のエネルギー密度

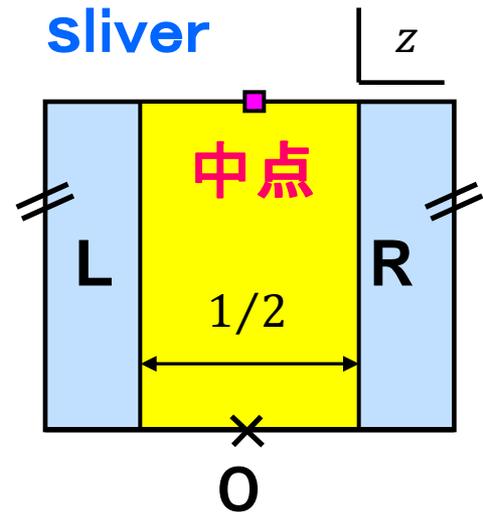
多重ブレイン解 \rightarrow N は整数

多重ブレイン解の構成=整数の N を与える U を探ること
古典解の構成、解の間関係の理解

sliver座標とKBc代数

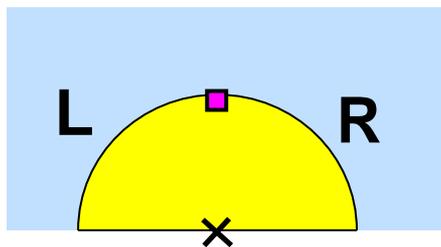


$$z = \frac{2}{\pi} \text{Arctan } \xi$$

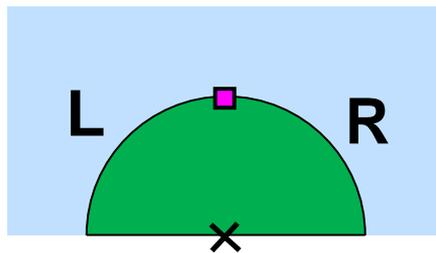


中点は無限遠点

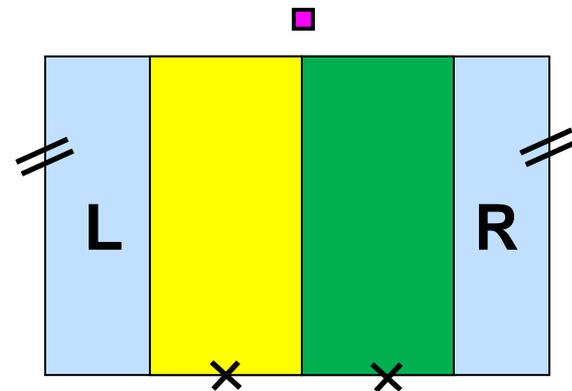
➡ *積が簡単に



*



=

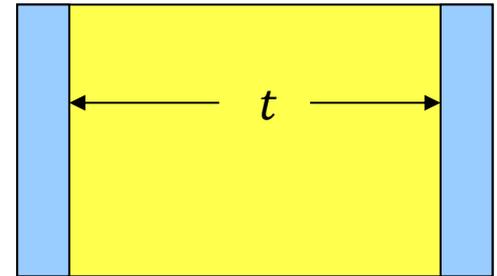


短冊を横に並べて行くだけ

sliver座標とKBc代数

stripの生成演算子K (ハミルトニアン)

$$K = \frac{\pi}{2} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dz}{2\pi i} T(z) |I\rangle \quad |e^{-tK}\rangle =$$



但し $|I\rangle$ は*積に対する単位元で幅ゼロの状態
 $|\Psi\rangle * |I\rangle = |I\rangle * |\Psi\rangle = |\Psi\rangle$

ゴーストセクター B, c

$$B \equiv \frac{\pi}{2} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{dz}{2\pi i} b(z) |I\rangle \quad c = \frac{2}{\pi} c(0) |I\rangle$$

sliver座標とKBc代数

Sliver 座標のある種のハミルトニアンである K と(反)ゴーストは、 KBc (部分)代数を満たす (積は $*$ 積)

KBc 代数 [Y.Okawa '06]

$$\begin{aligned} [K, B] &= 0 & \{B, c\} &= 1 & B^2 &= c^2 = 0 \\ Q_B K &= 0 & Q_B B &= K & Q_B c &= cKc \end{aligned}$$

K, B, c で構成されたピュアゲージ型解を考える

$$\Psi = UQ_B U^{-1} \quad \text{with} \quad U = 1 - Bc(1 - G(K))$$

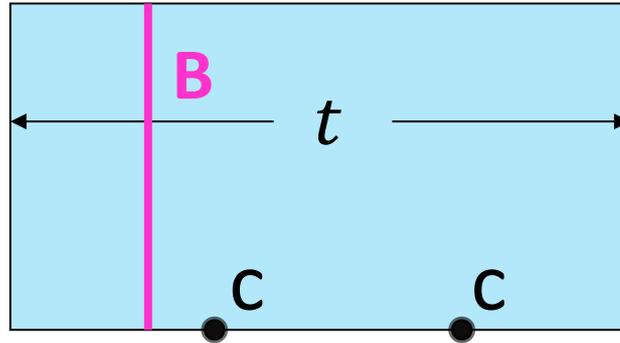
cf) タキオン凝縮解: $G(K) = \frac{K}{1+K}$

解は $G(K)$ で決まる

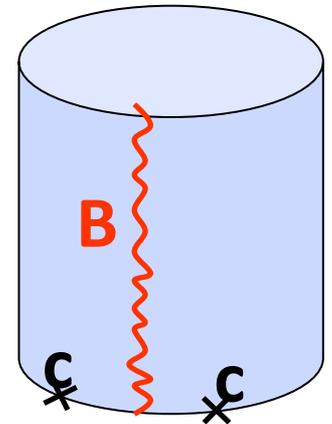
sliver座標とKBc代数

$$\Psi = UQ_B U^{-1} \quad \text{with} \quad U = 1 - Bc(1 - G(K))$$

$$\Psi = \int_0^\infty dt F(t) \times$$



円筒状の相関関数



KBc代数で構成された解に対して

$$N = \int (UQ_B U^{-1})^3 = N[G(K)]$$

解は $G(K)$ で決まる

**$G(K)$ のどのような構造が
Nの値を変化させるのか**

$$N = \int Q_B A$$

u : interpolating parameter

$$A = \int_0^1 du \left(\Psi_u * \frac{d}{du} \Psi_u \right) \quad \text{where} \quad \Psi_{u=0} = 0, \Psi_{u=1} = \Psi$$

Q_B - exact は確かに代数的にゼロ

しかしタキオン凝縮解の $A[G(K)]$ は $K = 0$ に特異性を持つ

$\int Q_B A = 0 \times \infty$ ← 代数的ゼロと特異性の無限大を滑らかに！

そこで $K \rightarrow K + \varepsilon$ 正則化

古典解の情報はここに

$$\int [Q_B A]_{K \rightarrow K + \varepsilon} = \varepsilon \times \int \left(\dots \frac{1}{\varepsilon} \dots \right) = -1$$

代数の破れ

$1/K$ の特異性

多重ブレイン解のトポロジカルな構造

$\Psi[G(K)] = UQ_B U^{-1}$ に対してエネルギーと運動方程式は
 $G(K)$ の詳細に依らず $K = 0$ と $K = \infty$ における振る舞いだけで決まる

$$\begin{cases} G(K) \sim K^{n_0} & (K \cong 0) \\ G(K) \sim (1/K)^{n_\infty} & (K \cong \infty) \end{cases}$$

Energy
$$N = \underbrace{-n_0 + A(n_0)}_{K=0} - \underbrace{n_\infty + A(n_\infty)}_{K=\infty}$$

EOM-test
$$\int \Psi * (Q_B \Psi + \Psi^2) = B(n_0) + B(n_\infty)$$

Anomaly term: $A(n) = B(n) = 0$ for $n = 0, \pm 1$

NはKBc多様体上のwinding数か？

多重ブレイン解のトポロジカルな構造

$\Psi[G(K)] = UQ_B U^{-1}$ に対してエネルギーと運動方程式は
 $G(K)$ の詳細に依らず $K = 0$ と $K = \infty$ における振る舞いだけで決まる

$$\begin{cases} G(K) \sim K^{n_0} & (K \cong 0) \\ G(K) \sim (1/K)^{n_\infty} & (K \cong \infty) \end{cases}$$

Energy $N = \underbrace{-n_0 + A(n_0)}_{K=0} - \underbrace{n_\infty + A(n_\infty)}_{K=\infty}$

EOM-test $\int \Psi * (Q_B \Psi + \Psi^2) = B(n_0) + B(n_\infty)$

Anomaly term: $A(n) = B(n) = 0$ for $n = 0, \pm 1$

! $K = 0$ と $K = \infty$ の等価性

多重ブレイン解を与える $G(K)$ の例

$G(K)$	Singularity (n_0, n_∞)	N
$K/(1+K)$ Erler&Schnabl	$(1, 0)$	-1
$1/(1+K)$	$(0, 1)$	-1
$1 + 1/K$	$(-1, 0)$	1
$1 + K$	$(0, -1)$	1
$K/(1+K)^2$	$(1, 1)$	-2
$(1+K)^2/K$	$(-1, -1)$	2
K	$(1, -1)$	0

Inv. symm



$K = 0$ と $K = \infty$ の等価性

KBc 代数を保つ変換

EMNT-transformation

$$K \rightarrow g(K), \quad B \rightarrow \frac{g(K)}{K} B, \quad c \rightarrow c \frac{K}{g(K)} Bc$$

[Erler, Masuda, Noumi, Takahashi]

$g(K) = 1/K$ と選ぶと、 $K = 0$ と $K = \infty$ を入れ替える変換

Inversion

$$K \rightarrow \frac{1}{K}, \quad B \rightarrow \frac{B}{K^2}, \quad c \rightarrow cK^2 Bc$$

$K = 0$ と $K = \infty$ の等価性

Inversion

$$K \rightarrow \frac{1}{K}, \quad B \rightarrow \frac{B}{K^2}, \quad c \rightarrow cK^2Bc$$

次の定理が成り立つことが分かった

任意の幅の円筒上の相関関数はInversion mapの下で不変

$$\int Bc e^{t_1 K} c e^{t_2 K} c e^{t_3 K} c e^{t_4 K} = \int \tilde{B} \tilde{c} e^{t_1 \tilde{K}} \tilde{c} e^{t_2 \tilde{K}} \tilde{c} e^{t_3 \tilde{K}} \tilde{c} e^{t_4 \tilde{K}}$$

with $\tilde{K} = 1/K$, $\tilde{B} = B/K^2$, $\tilde{c} = cK^2Bc$ ($\forall t_1, t_2, t_3, t_4$)

※その他のEMNT変換に対する不変性はおそらく無い。

$K \in [0, \infty]$ を1対1で移すことが大事

N が $n_0 \leftrightarrow n_\infty$ で不変である理由

$$\Psi[G(K)] = c \frac{K}{G(K)} Bc(1 - G(K))$$

Inversion (EMNT) 変換で Ψ の中の $G(K)$ の引数が
 K から $\frac{1}{K}$ ($g(K)$) へ変わるだけ

$$\Psi[G(K)] \rightarrow \Psi[G(1/K)] \quad \text{i. e. } (n_0 \leftrightarrow n_\infty)$$

N (EOM test) は Ψ のみで書かれているので

$$N[G(K)] \rightarrow N[G(1/K)]$$

Inversion symmetryの定理が示すことは

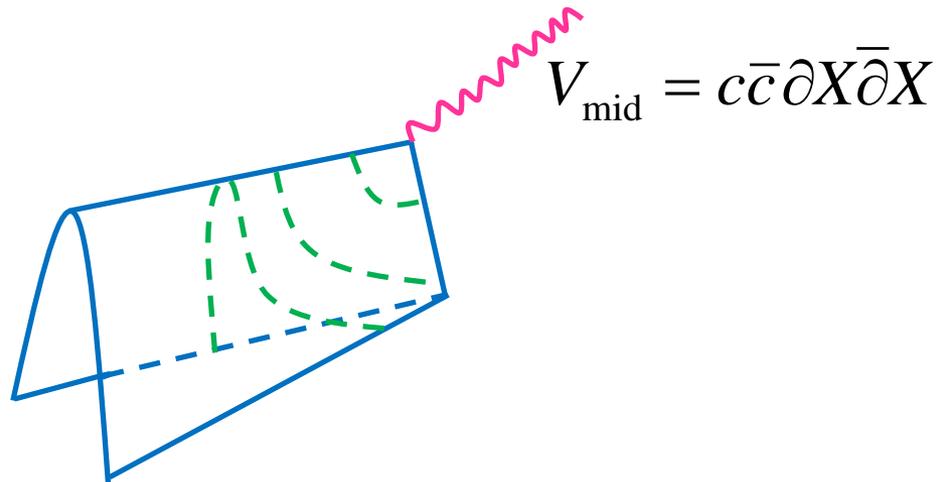
$$N[G(K)] = N[G(1/K)]$$

重力結合から読み取るエネルギー

これまで考えていたNは正準エネルギー
重力結合から読み取るエネルギーも考えられる

$$GC = \int V_{\text{mid}} \Psi[G(K)]$$

開弦の midpoint に on-shell graviton vertex
GCはゲージ不変量 (任意の on-shell vertex に対して)



重力結合

GCもinversion symmetryを持つと期待されるが...

$$2\pi^2 \int V_{\text{mid}} \Psi[G(K)] = -\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \partial_z G(z)}{G(z)} = -n_0$$

$K = \infty$ からの特異性を拾えない

Gravitational coupling \neq canonical energy

$$\begin{array}{c} \parallel \\ -n_0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \parallel \\ -n_0 - n_\infty \end{array}$$

正準エネルギーと重力結合の関係

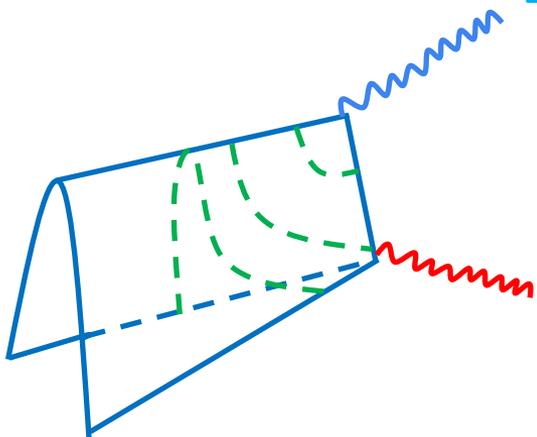
Baba and Ishibashi が N と Ellwood inv の直接的な関係を導いた

$$\frac{N}{2\pi^2} = \int V_{\text{mid}} \Psi + (\text{EOM - term})$$

多重ブレイン解に対して再評価を行うと、これまで議論されていなかった新たな項を発見

$$\frac{N}{2\pi^2} = \underbrace{\int V_{\text{mid}} \Psi}_{\text{Ellwood inv}} - \int V_{\text{end}} \Psi + \underbrace{(\text{EOM - term})}_{\text{vanish}}$$

Ellwood inv



新たな項は、 $n_\infty = 0$ では見えなかった
 $K = 0$ の特異性は $\int V_{\text{mid}} \Psi$ に拾われる
 $K = \infty$ の特異性は $\int V_{\text{end}} \Psi$ に拾われる
和(差)が well-defined

Inversion symmetricな重力結合

$$N = \int V_{\text{mid}} - \int V_{\text{end}} \Psi$$

Well-known New term

$G(K)$	singularity	N	$\int V_{\text{mid}} \Psi$	$\int V_{\text{end}} \Psi$
$K/(1+K)$	$(n_0, n_\infty) = (1, 0)$	-1	-1	0
$1/(1+K)$	$(0, 1)$	-1	0	1
$1 + 1/K$	$(-1, 0)$	1	1	0
$1 + K$	$(0, -1)$	1	0	-1
$K/(1+K)^2$	$(1, 1)$	-2	-1	1
$(1+K)^2/K$	$(-1, -1)$	2	1	-1

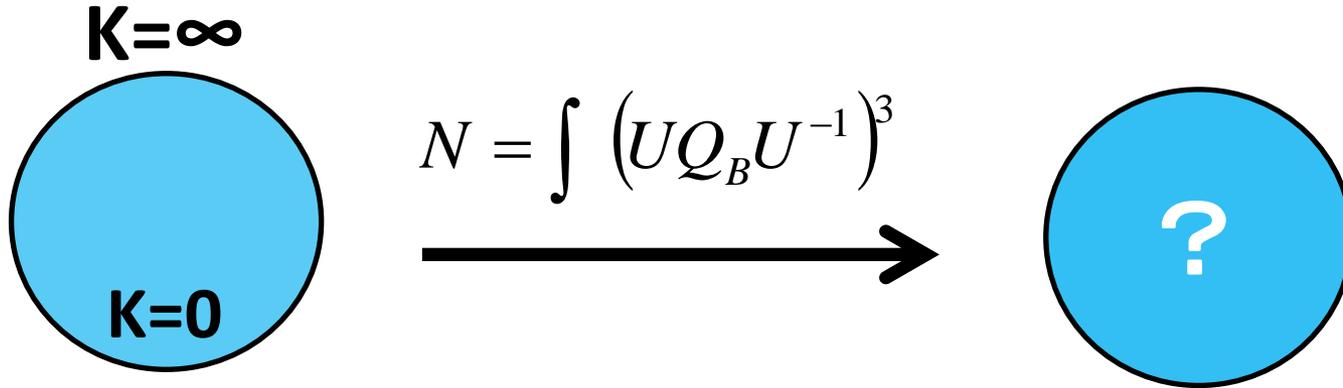
$K = 0$ singularity is detected by $\int V_{\text{mid}} \Psi$

$K = \infty$ singularity is by $\int V_{\text{end}} \Psi$

結論

- $N = \int QA$ に書き直せた。この表式 (もまた)代数的にゼロな量であるが、適切な正則化で正しい値を出した。
- N は $G(K)$ の詳細依らず、 $K = 0, \infty$ における特異的な構造で決まる
- 一般のKBc相関関数はinversion symmetryを持つ。その帰結として N は $K \leftrightarrow \frac{1}{K}$ の入れ替えで不変。
- Inversion symmetric なGravitational coupling の発見
$$\int (V_{\text{mid}} - V_{\text{end}}) \Psi.$$
和は相関関数の計算におけるIdentity-likeな不定性を互いの間でキャンセルしwell-defined.

結論



- N は KBc 多様体上のwinding数か
- KBc “多様体”は原点と無限遠が等価な構造を持つ
- “表面”積分の理解には未だ至っていない

$$\int Q_B A = \int_{\partial} A$$

- 群の空間の理解には未だ至っていない
(行列の足は?)

Back up

$|\mathcal{N}| \geq 3$ にむけて

$$\mathcal{N} = -n + A(n) + m + A(-m)$$

$$\text{EOM-test} = B(n) + B(-m)$$

$|\mathcal{N}| \geq 3$ の解の構成には、
 K の有限の場所にある固有値の特異性が必要

しかし、このような $G(K)$ に対して \mathcal{N} が定義できない

(\mathcal{N} は $G(K)$ のラプラス変換で定義されている)

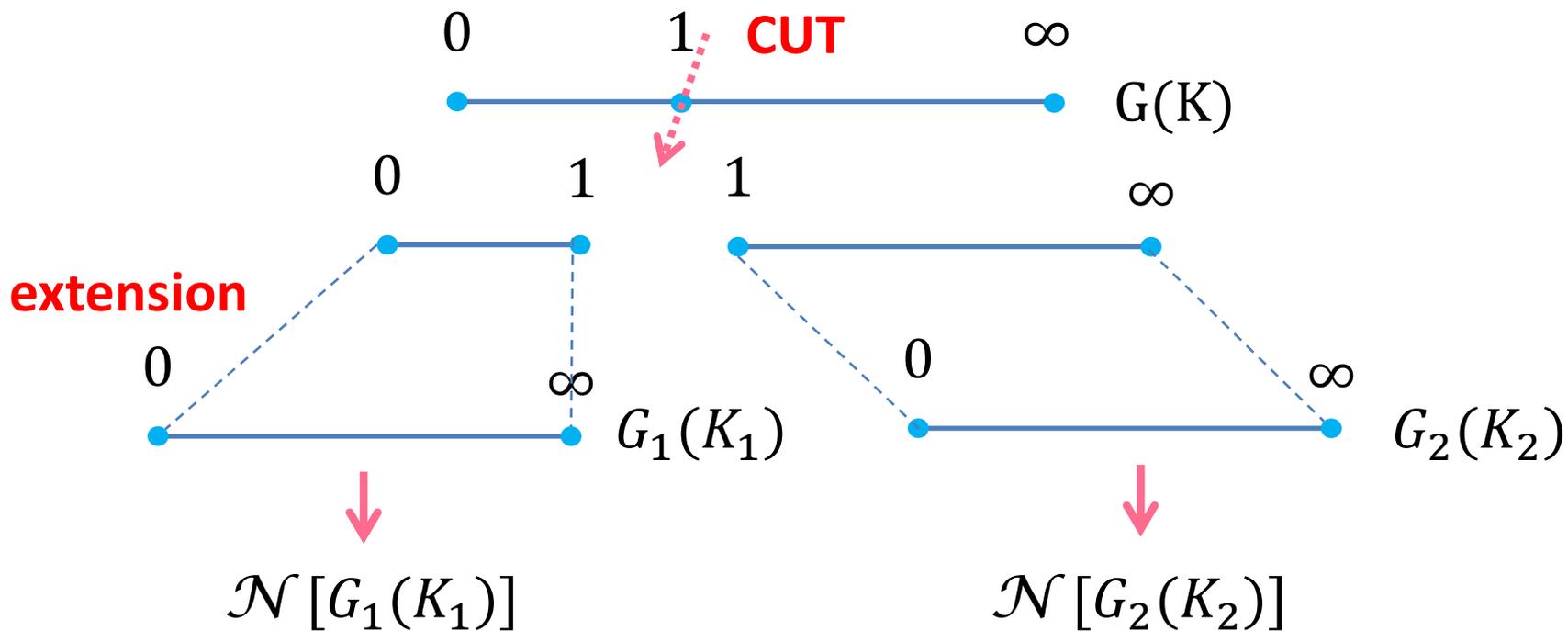
$$\frac{1}{K-a} = \int_0^{\infty} dt e^{-t(K-a)} \quad (a > 0)$$

ex) $G(K) = \frac{(K+1)^3}{K(K-1)}$



$|\mathcal{N}| \geq 3$ と“パッチ”

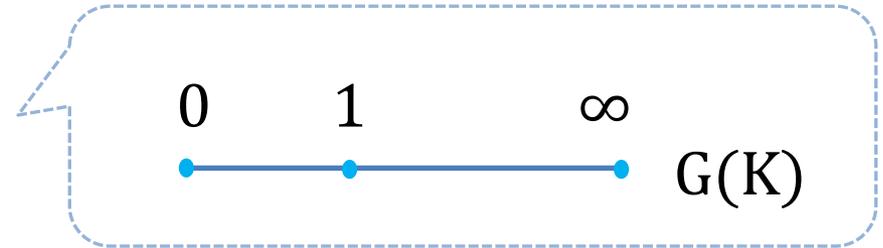
$G(K)$ が K 全域で計算できないのが問題。 K 空間の途中に特異性の無いように分割してそれぞれに \mathcal{N} を定義する。



- 特異性の無い場所でCUTしても N の値は不変。
- Extension は1対1写像であれば何でもよい。
- $|\mathcal{N}| \leq 2$ の多重ブレイン解の定義の拡張になっている。
- パッチの貼り合わせが必要という状況がTFTに似ている。

$|\mathcal{N}| \geq 3$ と“パッチ”

$$ex) G(K) = \frac{(K+1)^3}{K(K-1)}$$



$$M\text{変換: } K \rightarrow \begin{cases} \frac{K_1}{1+K_1} & (0 \leq K \leq 1) \\ 1+K_2 & (1 \leq K \leq \infty) \end{cases} \quad K_1, K_2 \in [0, \infty)$$

$$\rightarrow G_1(K_1) = -\frac{(2K+1)^3}{K(K+1)}, \quad G_2(K_2) = \frac{(K+2)^3}{K(K+1)} \quad K_1, K_2 \text{ 全域で Well-defined}$$

$$\mathcal{N}[G(K)] \equiv \mathcal{N}[G(K_1)] + \mathcal{N}[G(K_2)]$$

$|\mathcal{N}| \geq 3$ が構成可能。