電子g-2に対する非摂動QEDの寄与

arXiv:1311.7109

三嶋 剛

東京大学　素粒子論研究室（浜口研）

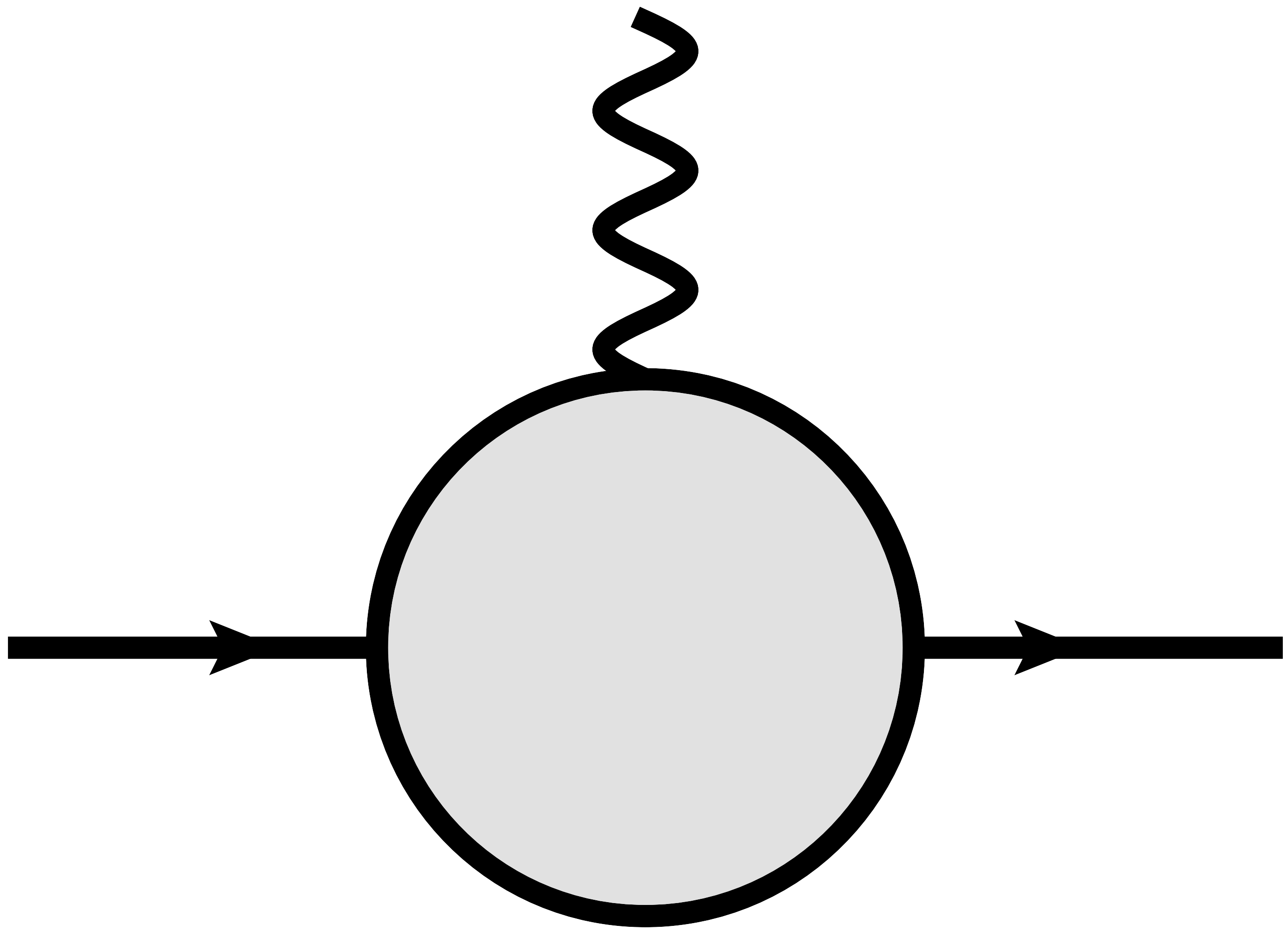
益川塾セミナー

2015/02/02

QEDを考えます

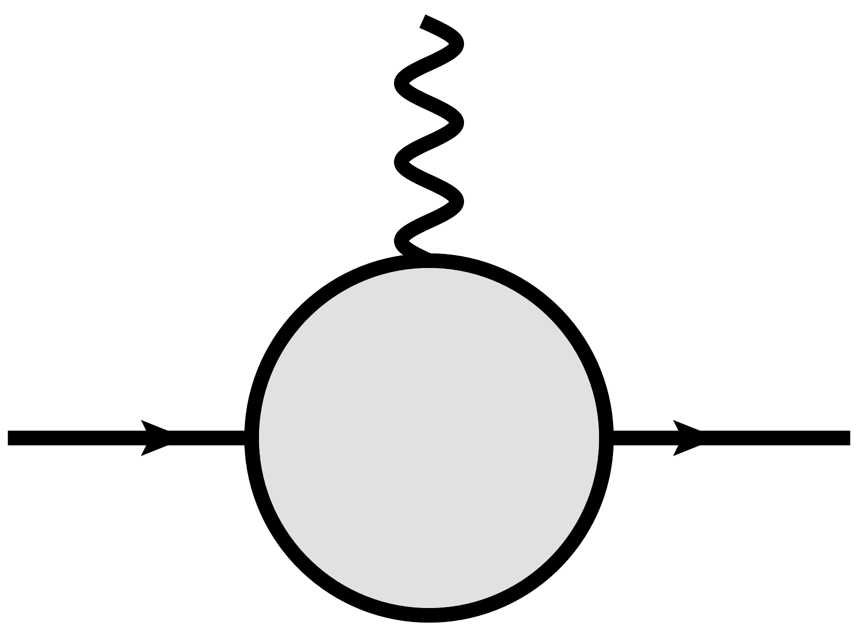
$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$$

Vertexへの量子補正を計算します



$$= \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2)$$

電子の磁気モーメントに対する量子補正（g-2）に注目します



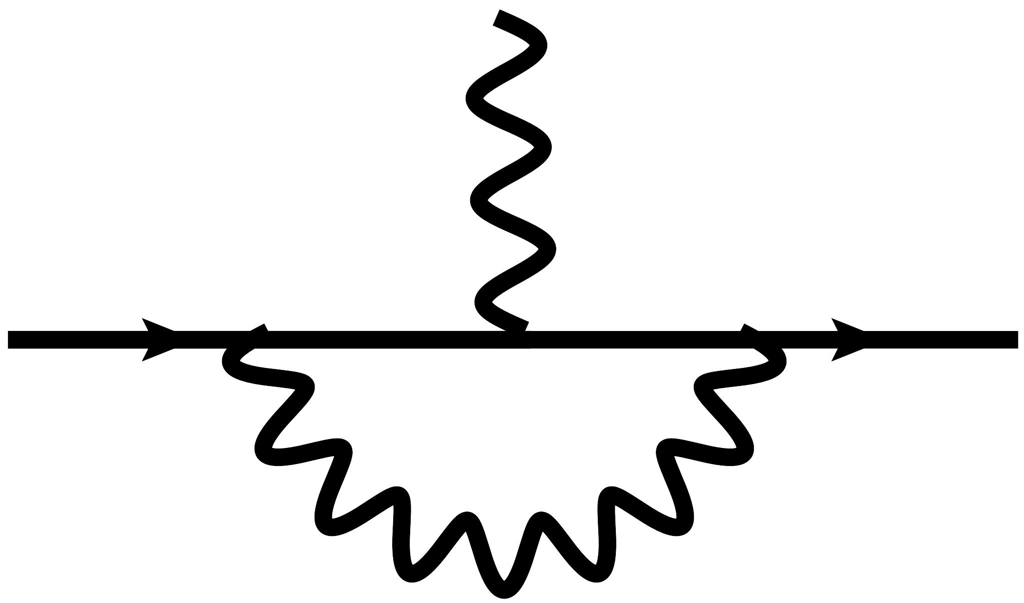
$$= \gamma^\mu F_1(q^2) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2)$$

$$a_e \equiv F_2(0)$$

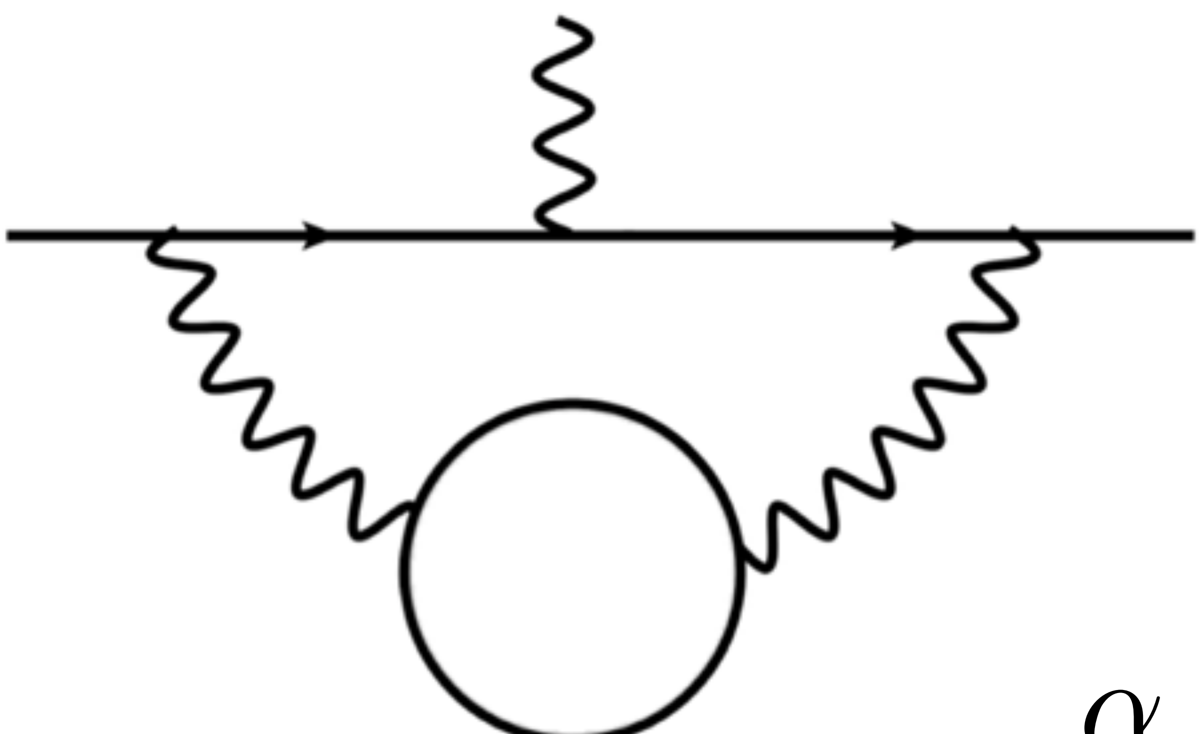
異常磁気モーメント

g-2

a_eの計算例



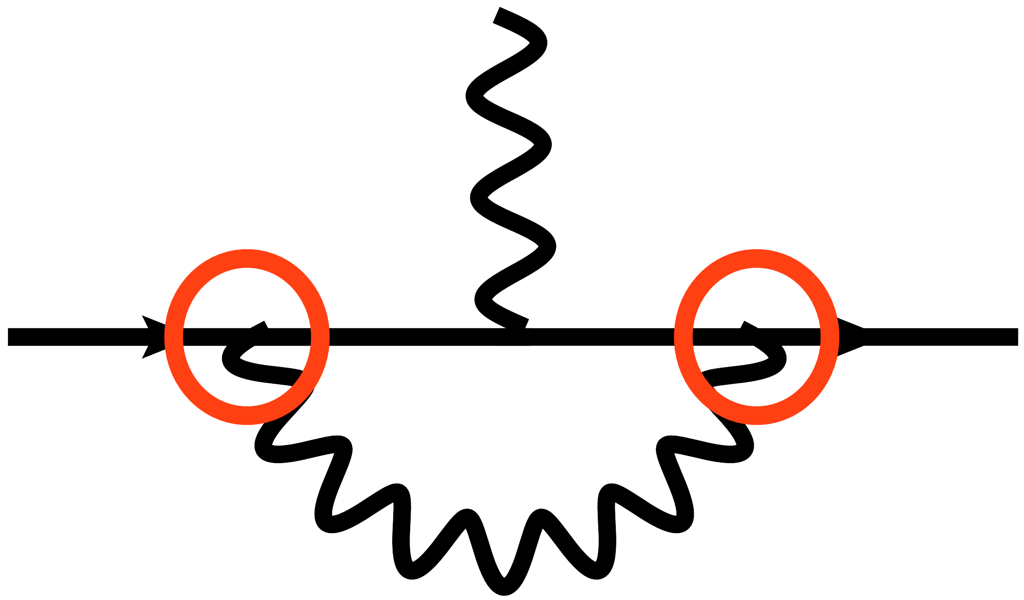
$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2\pi}$$



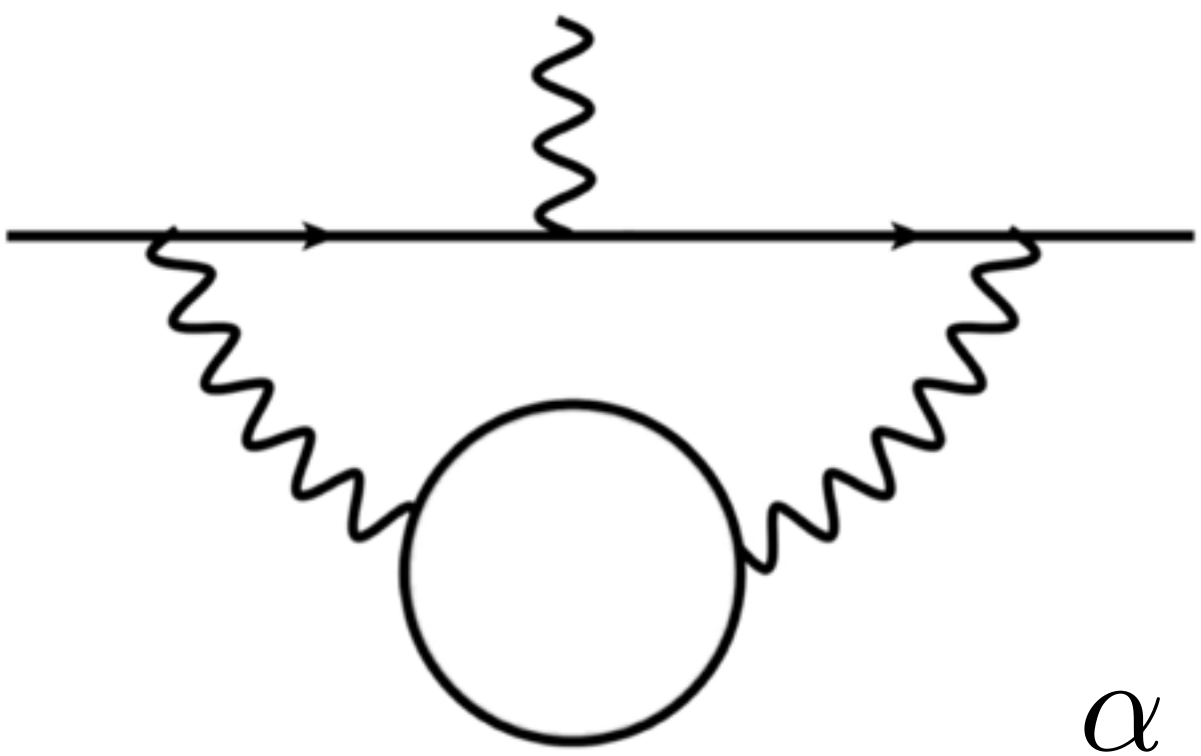
$$\Rightarrow \left(\frac{119}{36} - \frac{\pi^2}{3}\right)\frac{\alpha^2}{\pi^2}$$

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi}$$

a_eの計算例



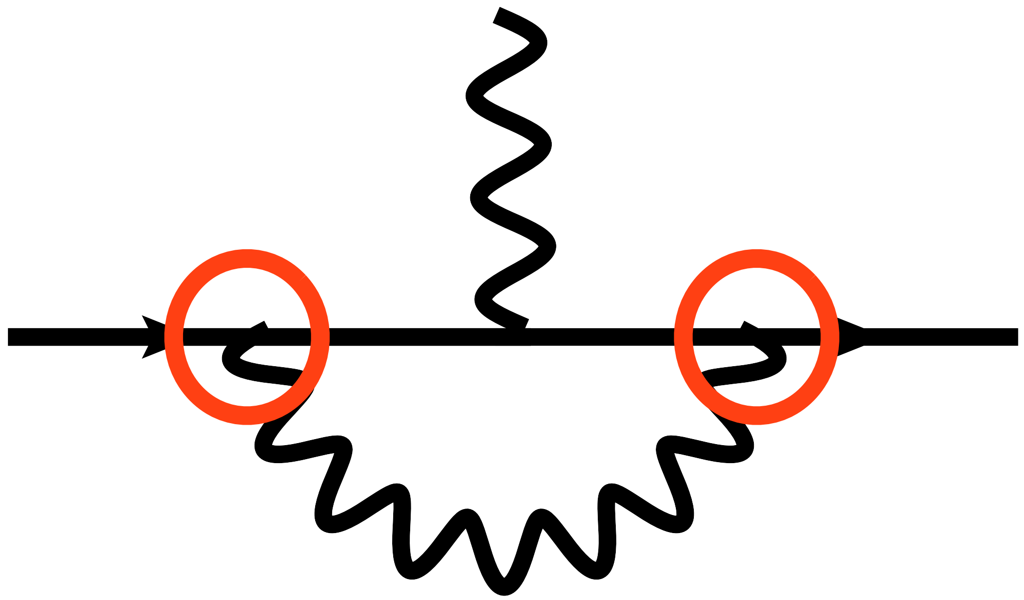
$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2\pi}$$



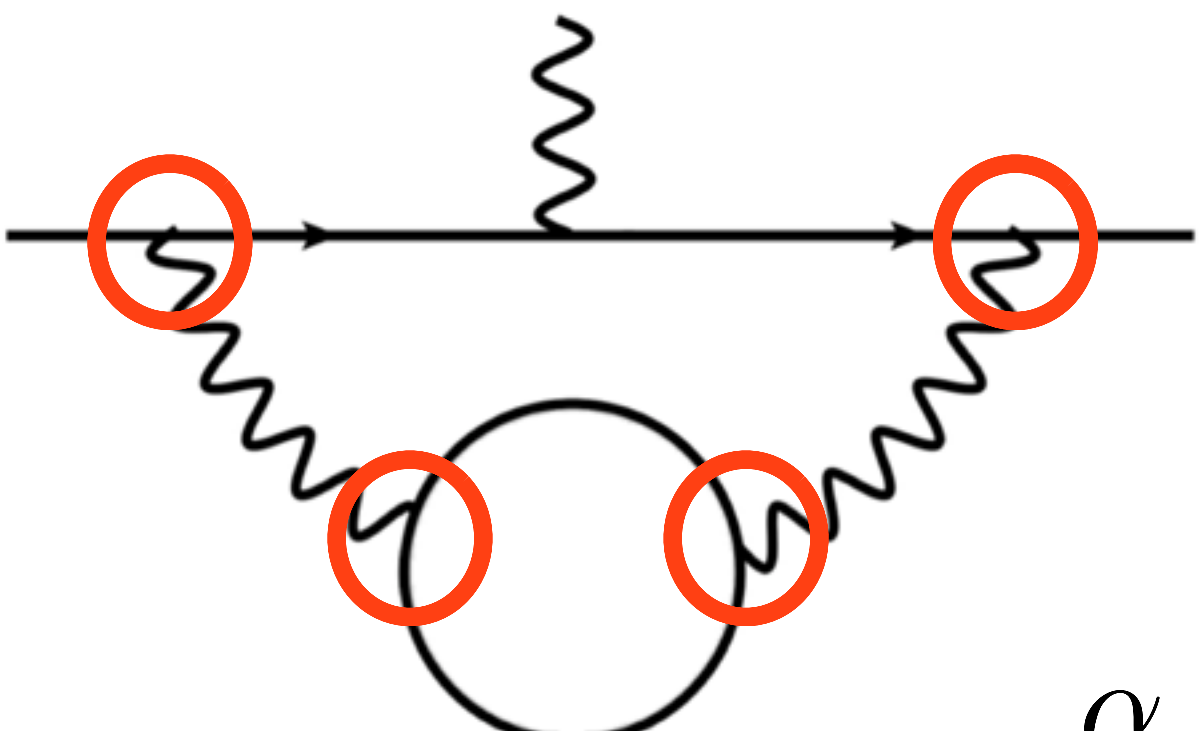
$$\Rightarrow \left(\frac{119}{36} - \frac{\pi^2}{3}\right)\frac{\alpha^2}{\pi^2}$$

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi}$$

a_eの計算例



$$\Rightarrow \frac{\alpha}{2\pi}$$

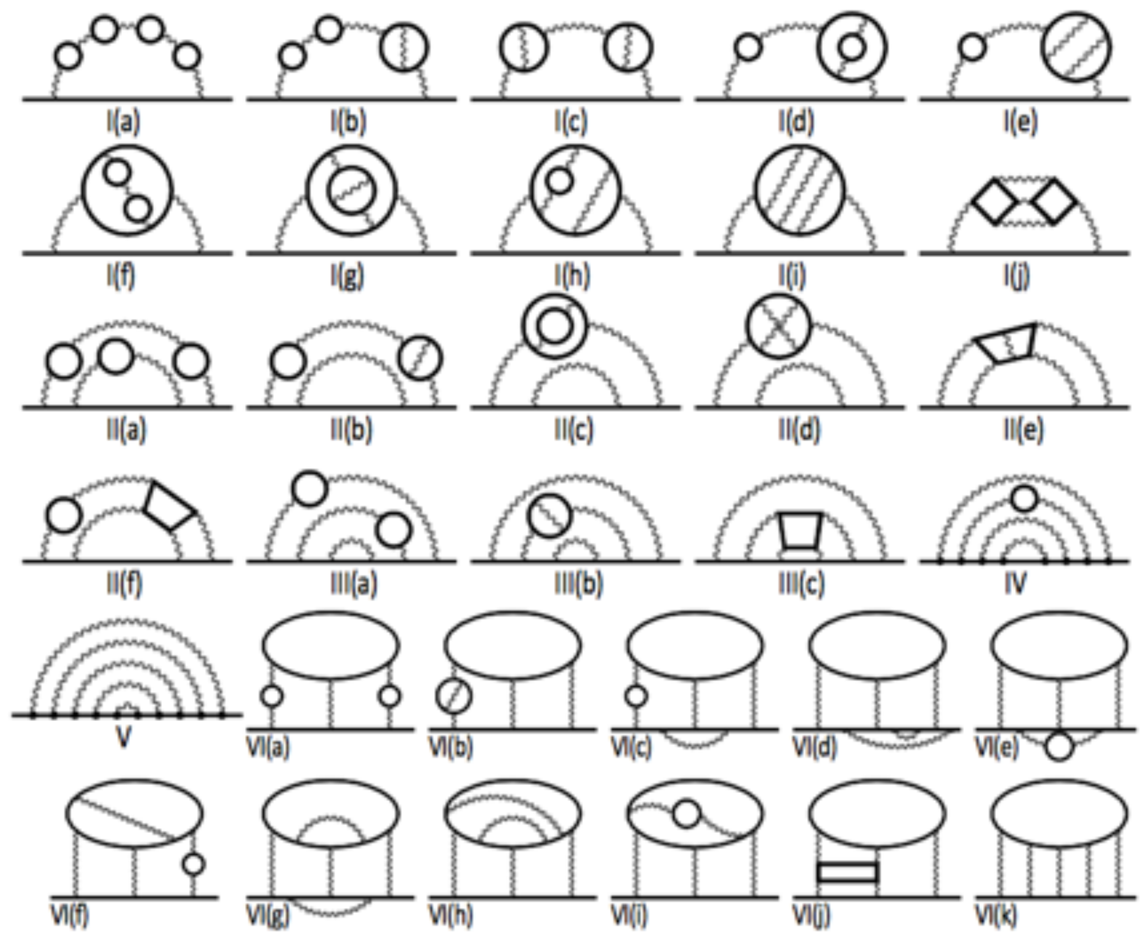


$$\Rightarrow \left(\frac{119}{36} - \frac{\pi^2}{3}\right)\frac{\alpha^2}{\pi^2}$$

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi}$$

QEDの摂動論によって
５ループまで計算されている

[Aoyama, *et al*. 2012]



“ループの数＝αの次数”

α^5までの寄与が分かっている

QEDの摂動論によって５ループまで計算されている

[Aoyama, *et al*. 2012]

$$a_e(\mathrm{QED}) = \sum_{n=1}^{\infty} A^{(n)} \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^n$$

$$\begin{aligned}
A^{(1)} &= 0.5 \\
A^{(2)} &= -0.328478444 00 25\ldots \\
A^{(3)} &= 1.1812340162\ldots \\
A^{(4)} &= -1.9097\ (20) \\
A^{(5)} &= 9.16\ (58)
\end{aligned}$$

アウトライン

- 異常磁気モーメント(g-2)の摂動的計算
- 非摂動的効果について・背景・g-2の現状
- QED束縛状態の効果(GM '13)
- Coulomb散乱の効果(Melnikov, *et al.* '14)

当時のままの
記述で紹介

- (上記の)初期の計算における問題点・疑問点
- 新しい系統的な計算

不安定粒子の状態ケットを仮定せず、束縛状態の質量殻外でも有効で、
摂動展開との対応が分かる計算を行った

非摂動的QED効果の性質

- 既存の摂動的寄与は含まない

- ６ループ以上の寄与のみを扱うにもかかわらず計算結果は α^5 の次数となる

- 無限次のループまで計算して初めて現れる

	通常の摂動計算	束縛状態の効果	非摂動 Coulomb 散乱の効果
1 ループ	○		
2 ループ	○		
3 ループ	○		
4 ループ	○		
5 ループ	○		
6 ループ			○
7 ループ			○
⋮	⋮	⋮	⋮
非常に大きいが有限のループ			○
⋮	⋮	⋮	⋮
無限ループ		○	○

非摂動的QED効果の性質

- 既存の摂動的寄与は含まない

- ６ループ以上の寄与のみを扱うにもかかわらず
計算結果は α^5 の次数となる

- 無限次のループまで計算して初めて現れる

⋮	⋮	⋮	⋮
無限ループ		○	○

実際の計算に入る前に、
このようなことが起こる本質的な理由を
数式的な例で説明します

摂動展開と積分が交換しない例

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2}$$

a を摂動パラメータとして展開

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{x^{2n+2}} a^{2n}$$

$$\stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n} (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{1}{x^{2n+2}}$$

展開の各項が発散！

正しい答えは π/a で、
そもそも $a = 0$ 付近で展開できる
関数ではなかった

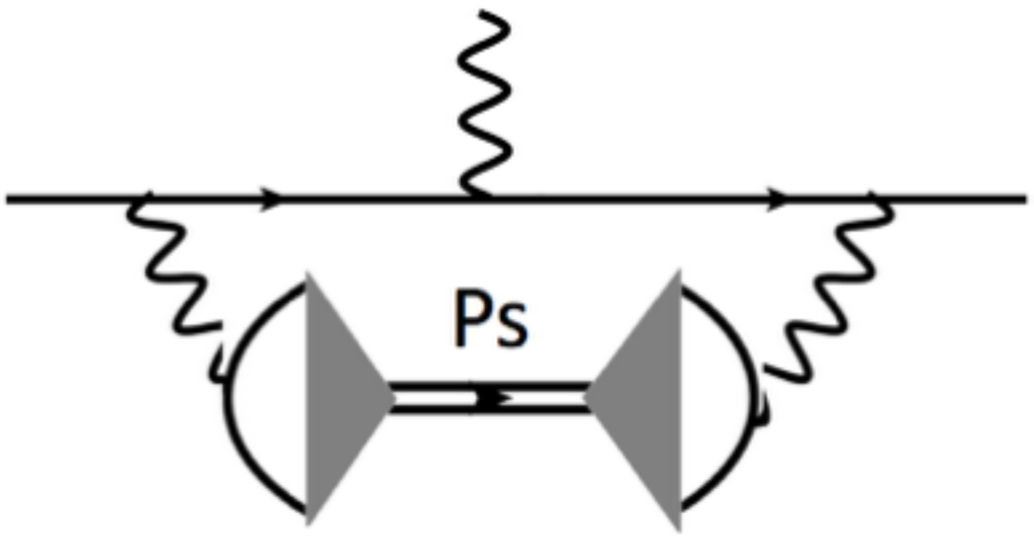
この例と同じことが非摂動的QEDの寄与の計算でも起きている

- 先ほどの例での積分は運動量のループ積分に対応
- 摂動パラメータの次数を下げる因子になっている

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{2n}(-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{1}{x^{2n+2}} \overset{?}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{a}$$

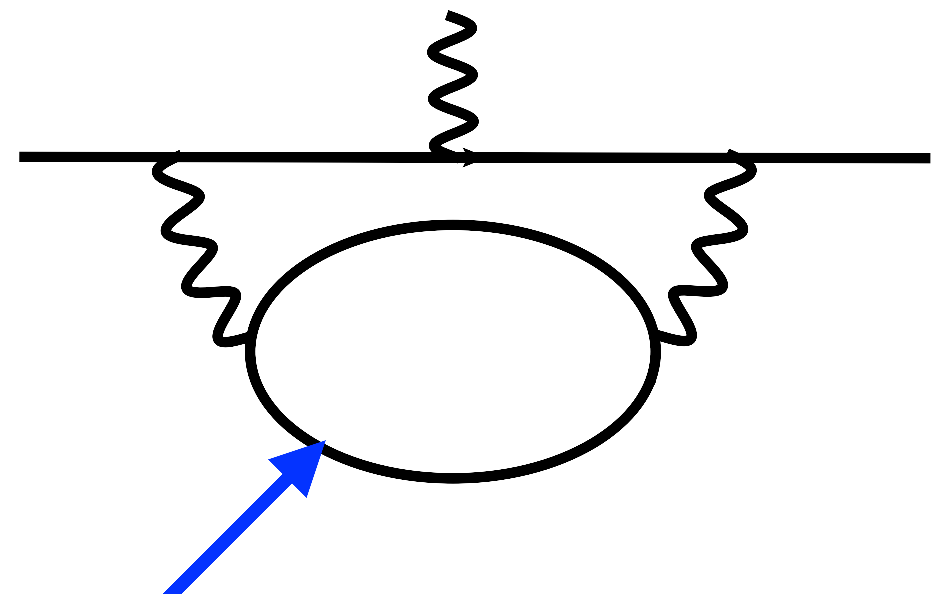
非摂動QEDの寄与

束縛状態の寄与



ポジトロニウムのような
束縛状態が仮想粒子として
量子効果に現れる

Coulomb散乱の寄与



仮想的な電子・陽電子対の間に
働くCoulomb力によって
自由場の波動関数ではなくなる

※簡潔化のため、ここではCoulomb散乱の寄与のうち
「非摂動的な部分」のことをこう呼ぶことにします

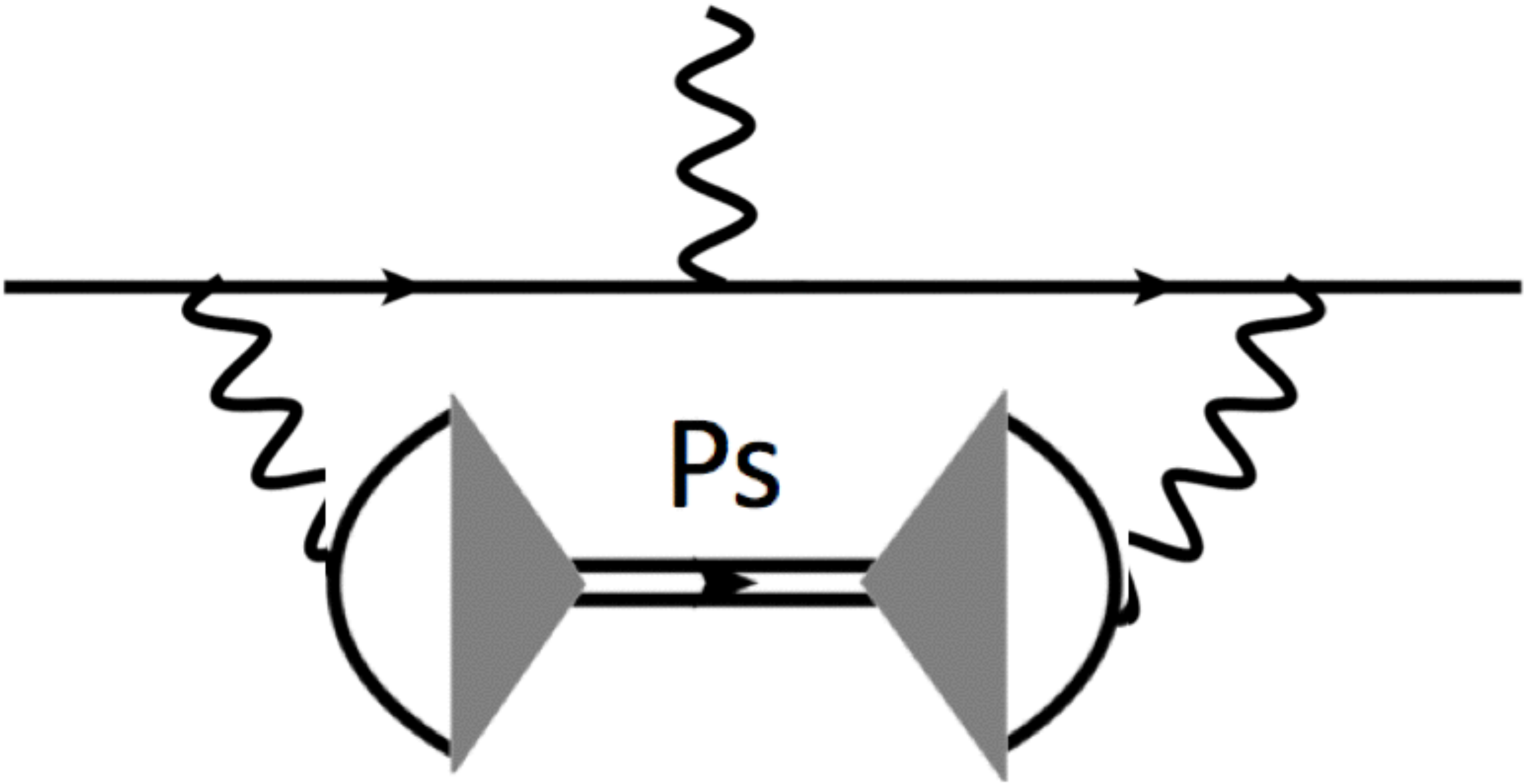
計算結果は α^5 の次数

$$\Delta a_e(\text{Bound State}) = \frac{\alpha^5}{4\pi}\zeta(3)\left(8\ln 2 - \frac{11}{2}\right)$$

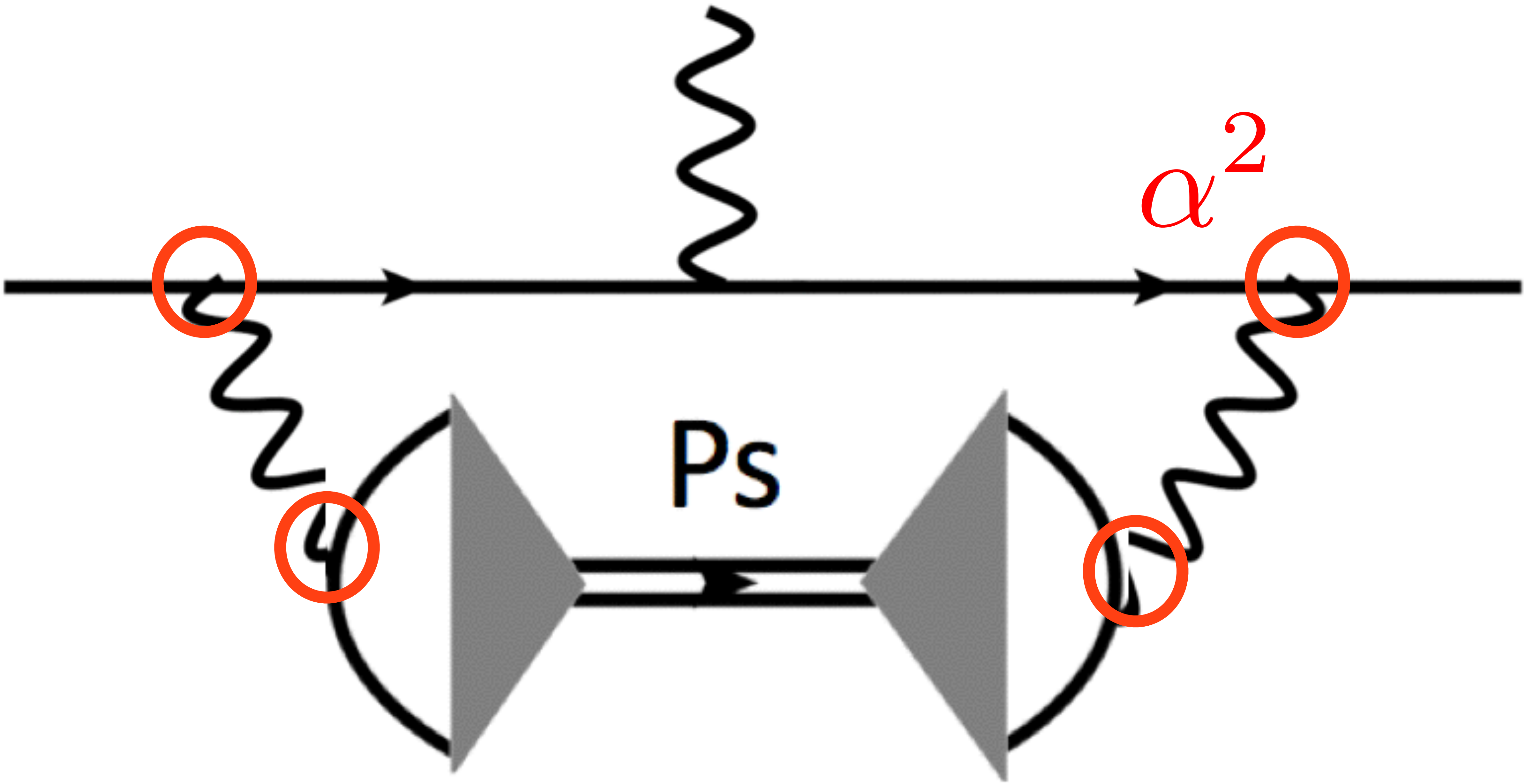
$$\Delta a_e(\text{Coulomb}) = -\frac{\alpha^5}{8\pi}\zeta(3)\left(8\ln 2 - \frac{11}{2}\right)$$

	値 ($\times 10^{14}$)	不確かさ ($\times 10^{14}$)
摂動的 QED	115 965 218 007	77
QED 束縛状態	9.0	2
Coulomb 散乱	-4.5	2
Hadronic	167.8	1.4
Electroweak	2.973	0.052
標準模型 a_e^{SM}	115 965 218 182	77
測定値 a_e^{exp}	115 965 218 073	28
$a_e^{\mathrm{SM}} - a_e^{\mathrm{exp}}$	109	82
将来の見通し		7

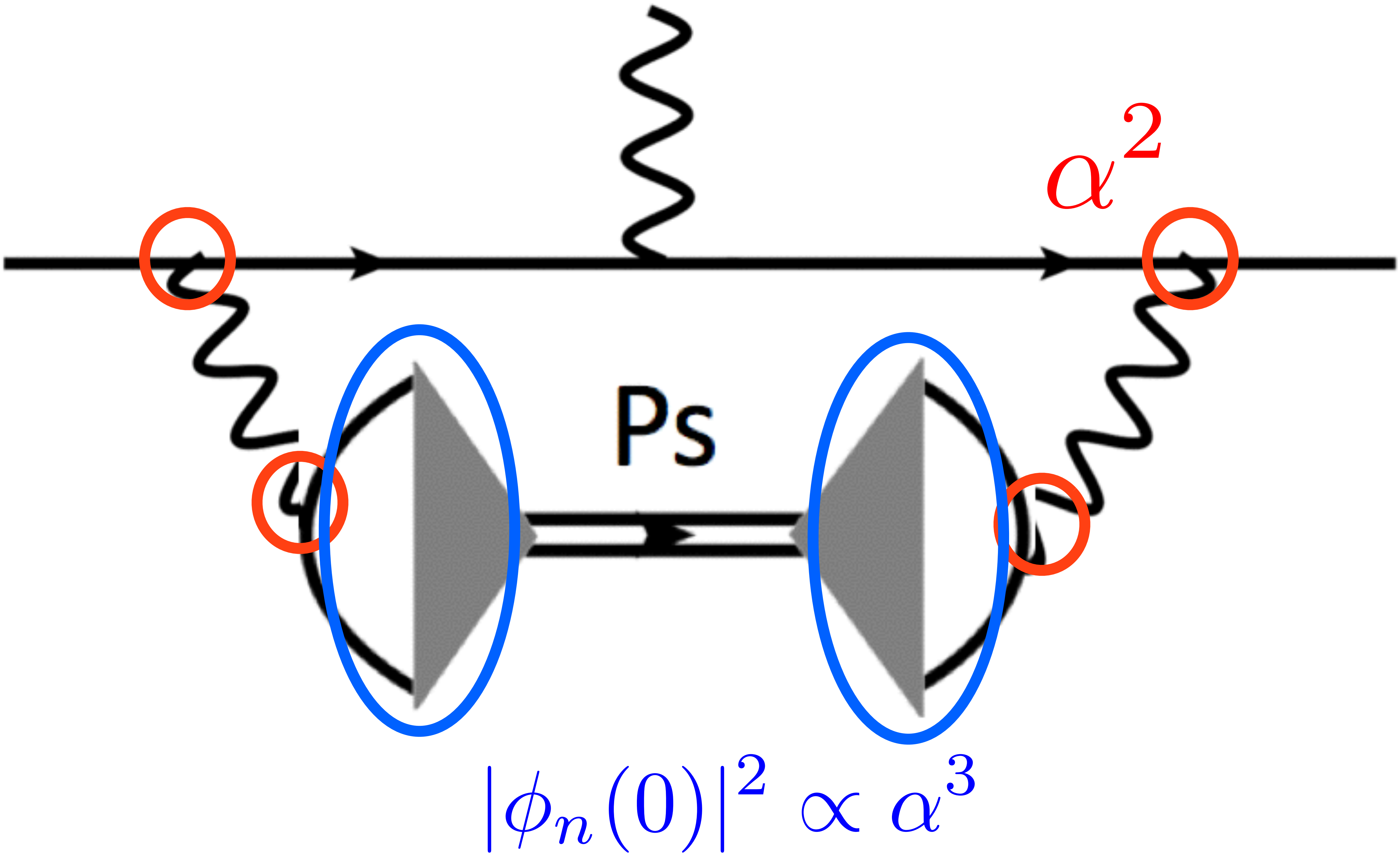
α^5になることの直感的な説明



α^5になることの直感的な説明



α^5になることの直感的な説明



α^5 になることの直感的な説明

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{2n}(-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{1}{x^{2n+2}} \overset{?}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{a}$$

摂動展開より先に積分を実行すると
αの次数が下がる

本研究に至るまでの背景

- GM [1311.7109]　QED束縛状態の効果を計算

QED 束縛状態	9.0
Coulomb 散乱	-4.5

- Fael, Passera [1402.1575v1]　細かい間違いを指摘
- Melnikov, Vainshtein, Voloshin [1402.5690v1]
  非摂動Coulomb散乱の寄与を指摘し、厳密な相殺を主張
- Eides [1402.5860]　QEDに非摂動効果は存在しないことを主張
- Hayakawa [1403.0416]　束縛状態は存在しないことを主張
- Melnikov, *et al*. [1402.5690v2]
  非摂動Coulomb散乱の寄与の計算間違いを修正　結論は変わらず
- Fael, *et al*. [1402.1575v2]
  束縛状態とCoulomb散乱の寄与の和は摂動的QEDに含まれると主張

非摂動QEDの現状（？）

- Eides：非摂動効果は存在しない
- Hayakawa：束縛状態は存在しない

QED 束縛状態	9.0
Coulomb 散乱	-4.5

- Fael, *et al.*, Melnikov, *et al.*： 単純な計算結果には同意
  束縛状態とCoulomb散乱の和は摂動に含まれる

$$\Delta a_e(\text{Bound State}) = a_e^{\text{non}-\text{pert.}}$$

$$\Delta a_e(\text{Coulomb}) = -a_e^{\text{non}-\text{pert.}} + a_e^{\text{pert.}} = -\frac{1}{2}\Delta a_e(\text{Bound State})$$

どれも摂動的QEDだけで充分だという主張

このセミナーのメッセージ

- 初期の計算（GM '13, Melnikov, *et al.* '14）にあった問題点・疑問点を新しい計算によって解決し、摂動QEDの5ループ計算だけでは取り込めない α^5 の効果があることを明らかにした

	通常の摂動計算	束縛状態の効果	非摂動 Coulomb 散乱の効果
1 ループ	○		
2 ループ	○		
3 ループ	○		
4 ループ	○		
5 ループ	○		
6 ループ			○
7 ループ			○
⋮	⋮	⋮	⋮
非常に大きいが有限のループ			○
⋮	⋮	⋮	⋮
無限ループ		○	○

Melnicov, *et al.* '14の計算では摂動展開との対応が分からなかった

アウトライン

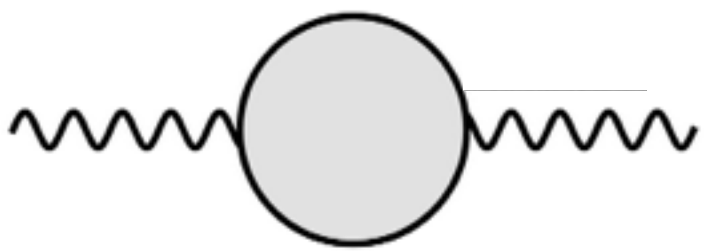
- 異常磁気モーメント(g-2)の摂動的計算
- 非摂動的効果について・背景・g-2の現状
- QED束縛状態の効果(GM ’13)
- Coulomb散乱の効果(Melnikov, *et al.* ’14)

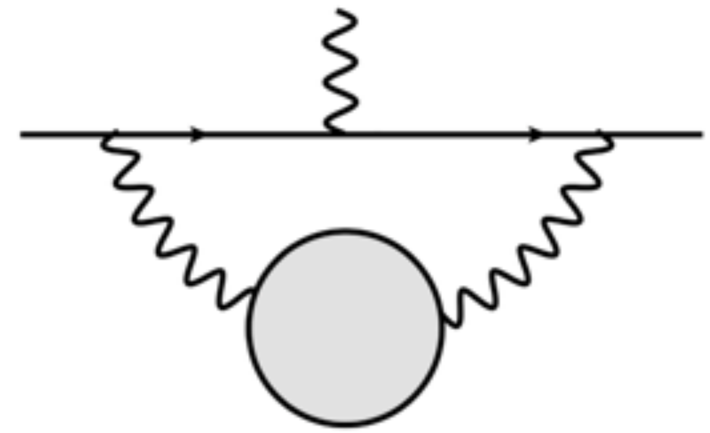
当時のままの記述で紹介

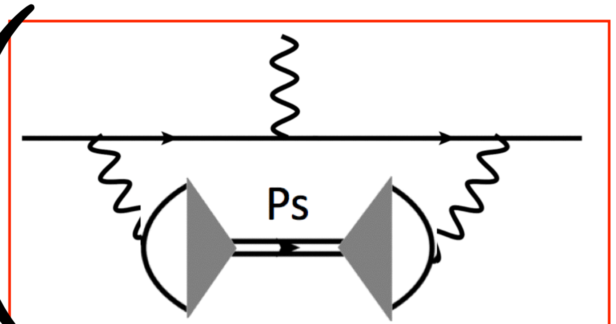
- (上記の)初期の計算における問題点・疑問点
- 新しい系統的な計算

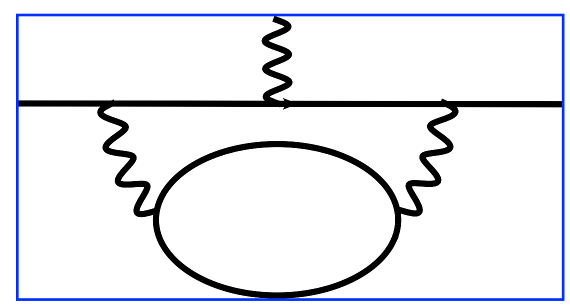
不安定粒子の状態ケットを仮定せず、束縛状態の質量殻外でも有効で、摂動展開との対応が分かる計算を行った

真空分極Πによる補正を考える

$\Pi =$ 



(

や  が念頭にある)

分散関係式を利用してg-2を$\mathrm{Im}\Pi$で表す

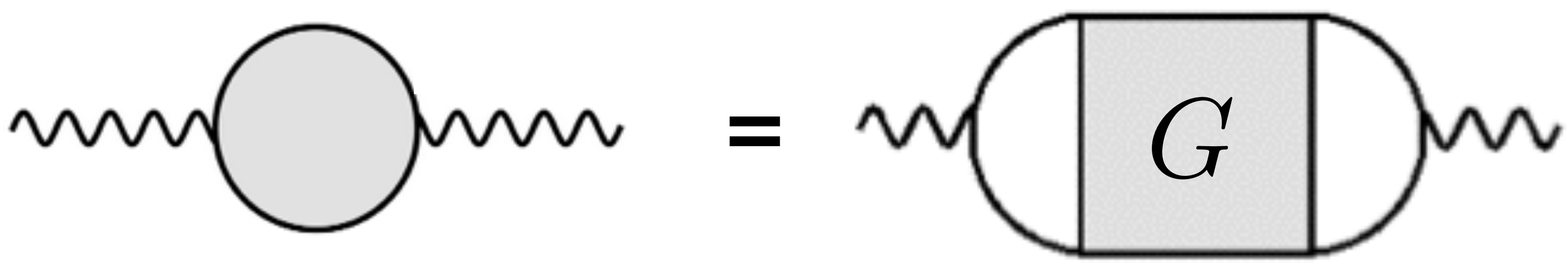
$$\Delta a_e = -\frac{\alpha}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}s\ \frac{\mathrm{Im}\Pi(s)}{s}\int_0^1 \frac{z(1-z)^2 m_e^2 \mathrm{d}z}{zs+(1-z)^2 m_e^2}$$

真空分極 Π は四点Green関数に帰着

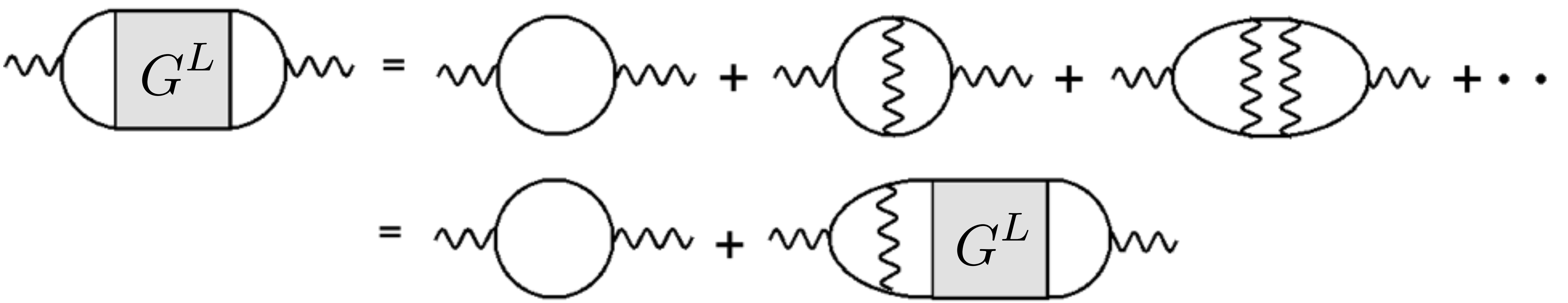
$$\Pi(q^2) = \frac{-\mathrm{i}}{3q^2} \int \mathrm{d}^4 x \ \mathrm{e}^{\mathrm{i}qx} \langle 0 | T j^{\mu}(x) j_{\mu}(0) | 0 \rangle$$

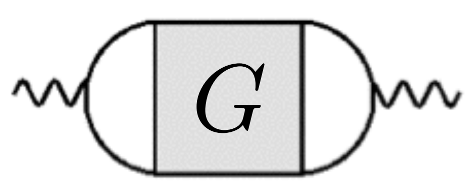
電磁カレント　$j^{\mu} = -e\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi$

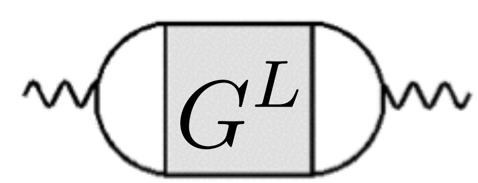
四点Green関数　$G = \langle 0 | T \psi \bar{\psi} \bar{\psi} \psi | 0 \rangle$

$\Pi =$ 

Ladderダイアグラムの無限和が
束縛状態の効果とCoulomb散乱の効果
をとらえている



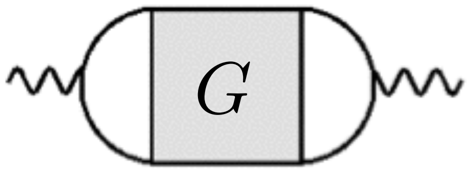
四点Green関数 

のうち、Ladder
ダイアグラムだけを取り入れたものを 

と定義し直した

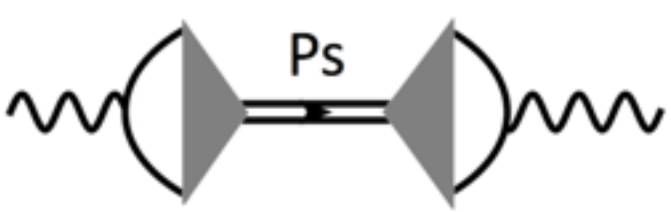
状態ケットの完全系を挟む（光学定理）

この計算は1973年には登場している(Barbieri, Christillin, Remiddi)



$$\Pi(q^2) = \frac{-\mathrm{i}}{3q^2}\int \mathrm{d}^4x\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\langle 0|Tj^\mu(x)j_\mu(0)|0\rangle$$

束縛状態の寄与



$$\mathrm{Im}\Pi \ni \frac{\pi}{3q^2}\sum_n \langle 0|j^\mu|n\rangle\langle n|j_\mu|0\rangle\delta(E-E_n)$$

束縛状態

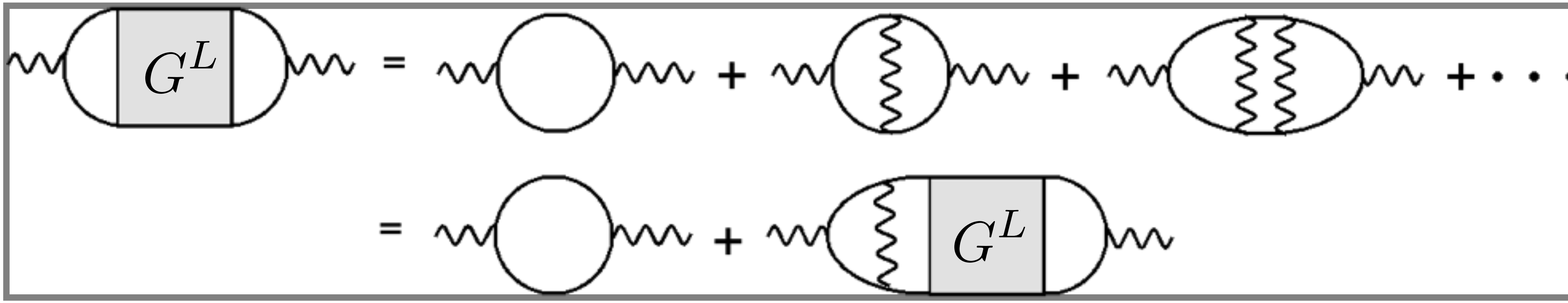
Coulomb散乱の寄与

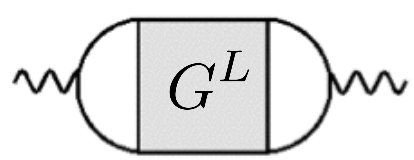
$$\frac{\pi}{3q^2}\sum_s\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\langle 0|j^\mu|\mathbf{k},s\rangle\langle \mathbf{k},s|j_\mu|0\rangle\delta(E-\sqrt{4m^2+\mathbf{k}^2})$$

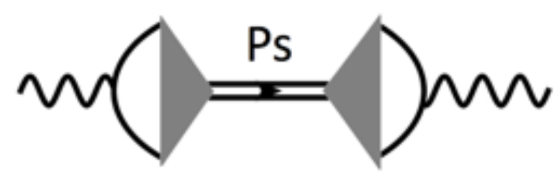
Coulomb散乱状態

行列要素 $\langle 0|j^\mu|n\rangle$ や $\langle 0|j^\mu|\mathbf{k},s\rangle$ が分かればよい

斉次なBethe-Salpeter eq.が得られる



に 

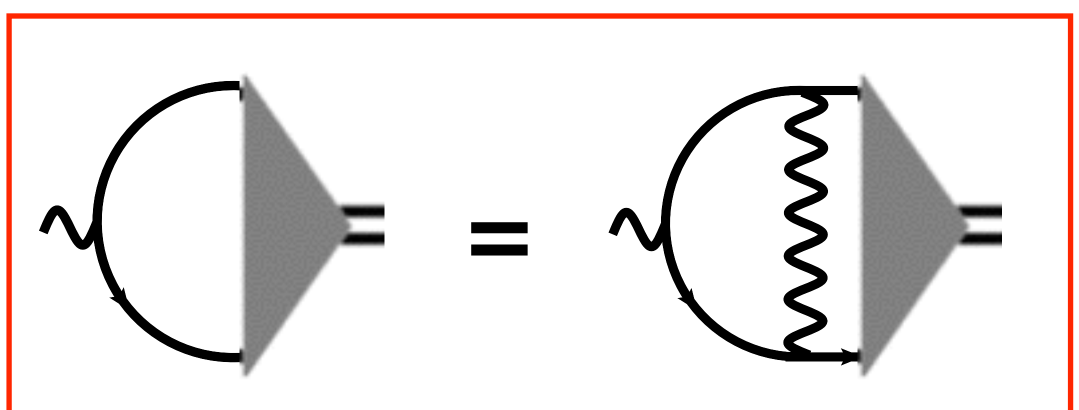
～ 

を代入

$\mathrm{Im}\Pi \ni \dfrac{\pi}{3q^2} \sum |\langle 0|j^\mu|n\rangle|^2 \delta(E-E_n)$ を思い出すと、

初項は束縛状態の質量付近で虚部を持たないので消える

$\langle 0|j^\mu|n\rangle$



簡単に解ける

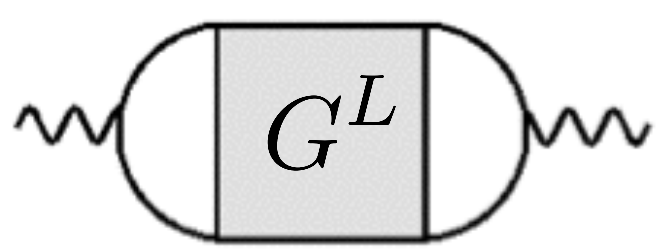
真空分極 Π に対する束縛状態の寄与

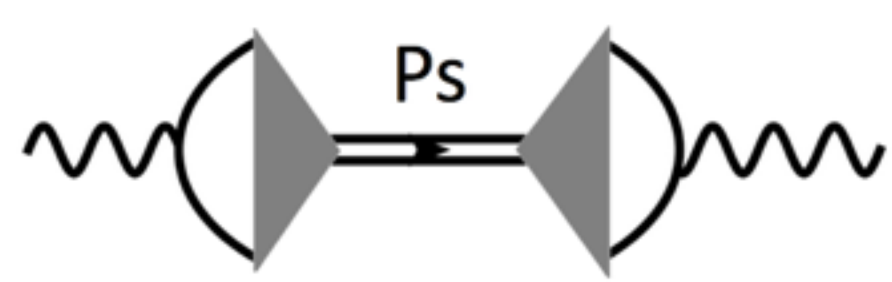
$$\Pi(q^2) \sim \frac{Z_n q^2}{q^2 - M_n^2 + \mathrm{i} M_n \Gamma_n}$$

M_n　ポジトロニウムの質量

Γ_n　ポジトロニウムの崩壊幅

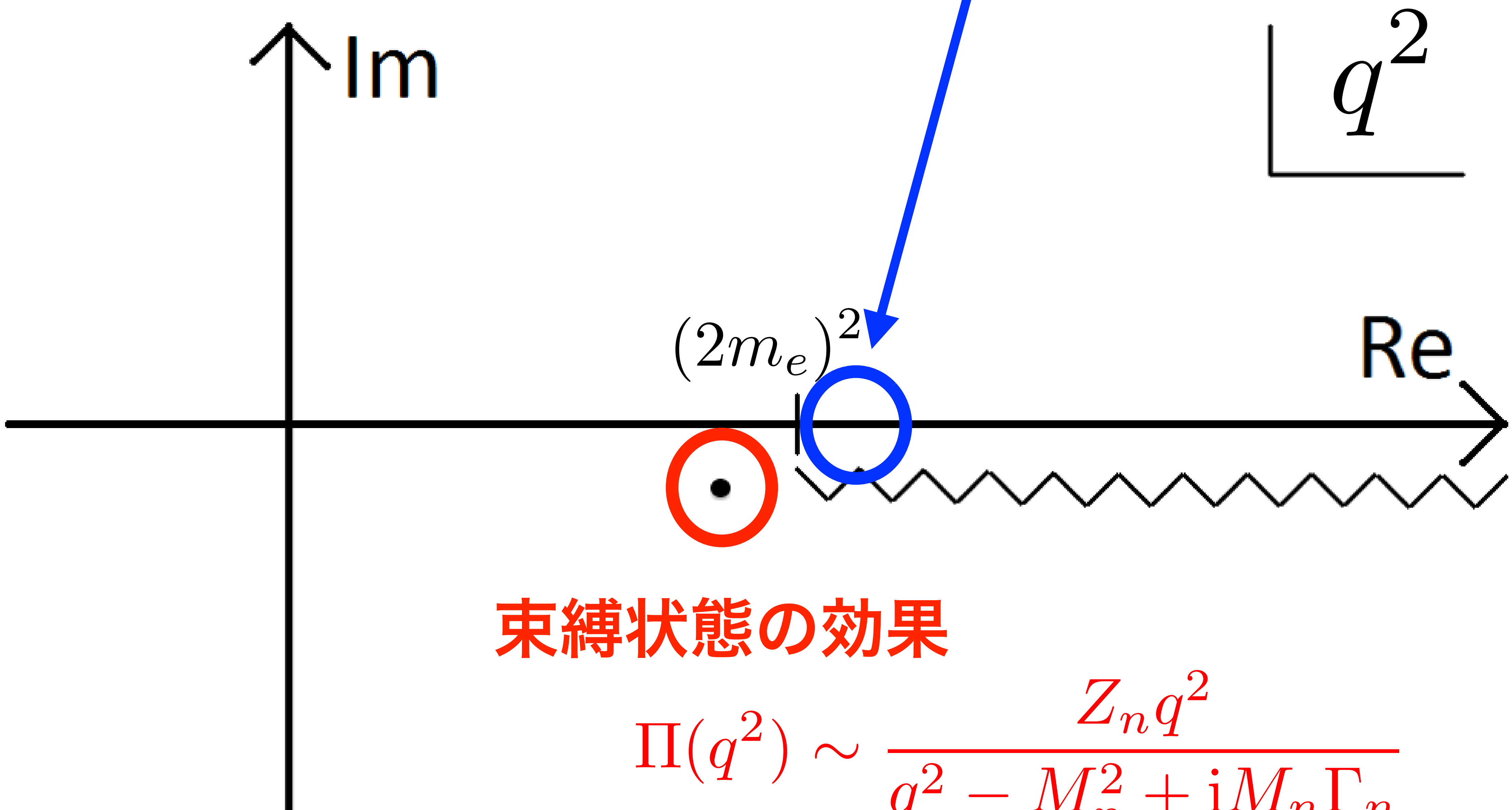
Z_n　混合因子　$Z_n = \dfrac{\alpha^4}{4n^3}$

$\Pi(q^2) \sim$ 

$\sim$ 

Coulomb散乱の効果

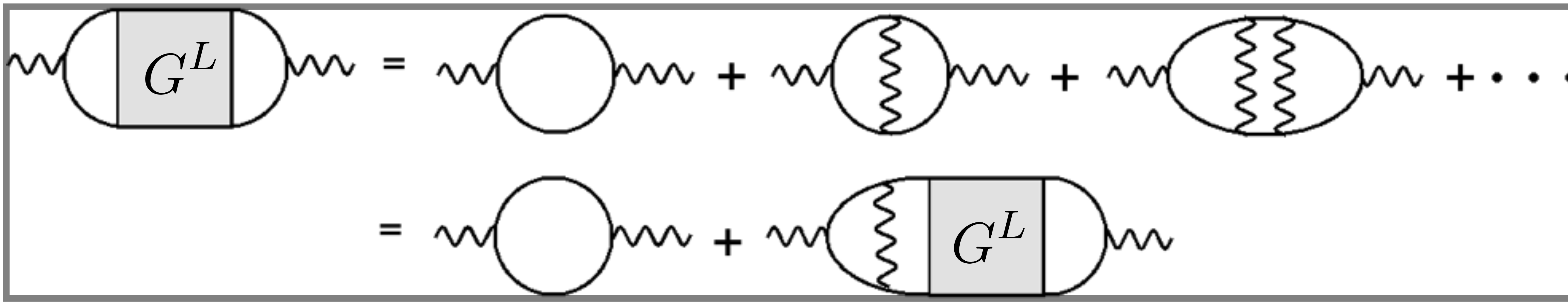
しきい値付近での$\mathrm{Im}\Pi$の効果

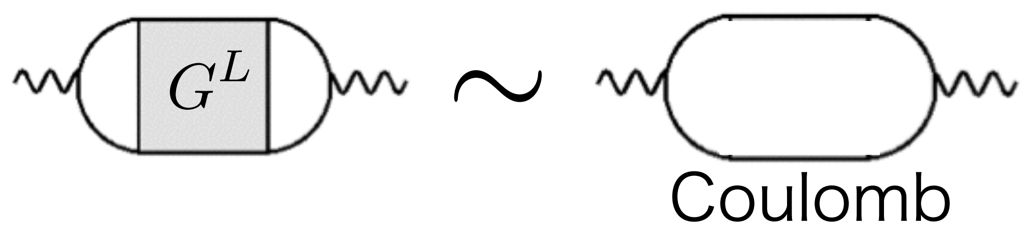


束縛状態の効果

$$\Pi(q^2) \sim \frac{Z_n q^2}{q^2 - M_n^2 + \mathrm{i} M_n \Gamma_n}$$

非斉次なSchrodinger eq.が得られる



に  を代入

Fourier変換で座標空間に持って行くと

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}^2}+\frac{\lambda_1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}+\lambda_2\right)\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})=\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})$$

となり、解は知られている Hostler ‘64

閾値付近での$\mathrm{Im}\Pi$はSommerfeld因子で表せる

$$\mathrm{Im}\Pi(s) \simeq -\left.\frac{\pi\alpha^2/2}{1-\mathrm{e}^{-\pi\alpha/\beta}}\right|_{\beta=\sqrt{1-4m^2/s}}$$

$$\Delta a_e = -\frac{\alpha}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}s\,\frac{\mathrm{Im}\Pi(s)}{s}\int_0^1\frac{z(1-z)^2 m_e^2\mathrm{d}z}{zs+(1-z)^2 m_e^2}$$ に代入して計算

a_eを計算する際の処方箋 (cut-off依存性を無くしたい etc)

$$\mathrm{Im}\Pi(s) \simeq -\frac{\pi\alpha^2}{2}\left.\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi\alpha/\beta}} - \underbrace{\frac{\beta}{\pi\alpha} - \frac{1}{2} - \frac{\pi\alpha}{12\beta}}\right)\right|_{\beta=\sqrt{1-\frac{4m^2}{s}}}$$

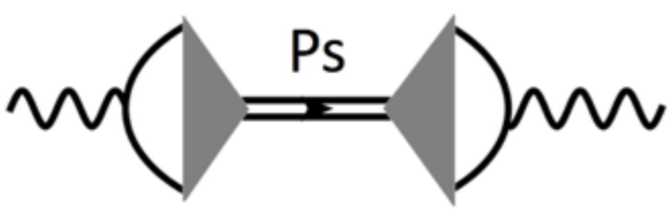
$\beta \mathrm{d}\beta$ をかけて $\beta\to\infty$で収束しない寄与は引いておく

括弧の中は$\beta\to 0$で特異的な寄与 ➡ 非摂動効果

結果

$$\Delta a_e = -\frac{\alpha}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}s\ \frac{\mathrm{Im}\Pi(s)}{s}\int_0^1 \frac{z(1-z)^2 m_e^2 \mathrm{d}z}{zs+(1-z)^2 m_e^2}$$ に代入して計算

束縛状態の寄与



$$\Delta a_e(\text{Bound State}) = \frac{\alpha^5}{4\pi}\zeta(3)\left(8\ln 2 - \frac{11}{2}\right)$$

Coulomb散乱の寄与

$$\Delta a_e(\text{Coulomb}) = -\frac{\alpha^5}{8\pi}\zeta(3)\left(8\ln 2 - \frac{11}{2}\right)$$

アウトライン

- 異常磁気モーメント(g-2)の摂動的計算
- 非摂動的効果について・背景・g-2の現状
- QED束縛状態の効果(GM '13)
- Coulomb散乱の効果(Melnikov, *et al.* '14)

当時のままの
記述で紹介

- (上記の)初期の計算における問題点・疑問点
- 新しい系統的な計算

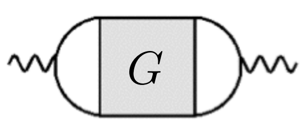
不安定粒子の状態ケットを仮定せず、束縛状態の質量殻外でも有効で、
摂動展開との対応が分かる計算を行った

初期の計算の疑問点(1)

・ 不安定な束縛状態の「状態ケット」とは何か？

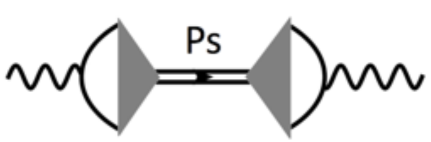
状態ケットの完全系を挟む（光学定理）

この計算は1973年には登場している(Barbieri, Christillin, Remiddi)



$$\Pi(q^2) = \frac{-\mathrm{i}}{3q^2}\int \mathrm{d}^4x\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}qx}\langle 0|Tj^{\mu}(x)j_{\mu}(0)|0\rangle$$

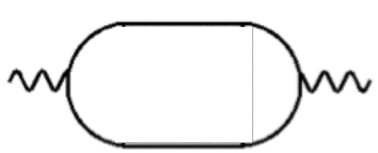
束縛状態の寄与



$$\mathrm{Im}\Pi \ni \frac{\pi}{3q^2}\sum_n \langle 0|j^{\mu}|n\rangle\langle n|j_{\mu}|0\rangle\delta(E-E_n)$$

束縛状態

Coulomb散乱の寄与



$$\frac{\pi}{3q^2}\sum_s\int\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\langle 0|j^{\mu}|\mathbf{k},s\rangle\langle \mathbf{k},s|j_{\mu}|0\rangle\delta(E-\sqrt{4m^2+\mathbf{k}^2})$$

Coulomb散乱状態

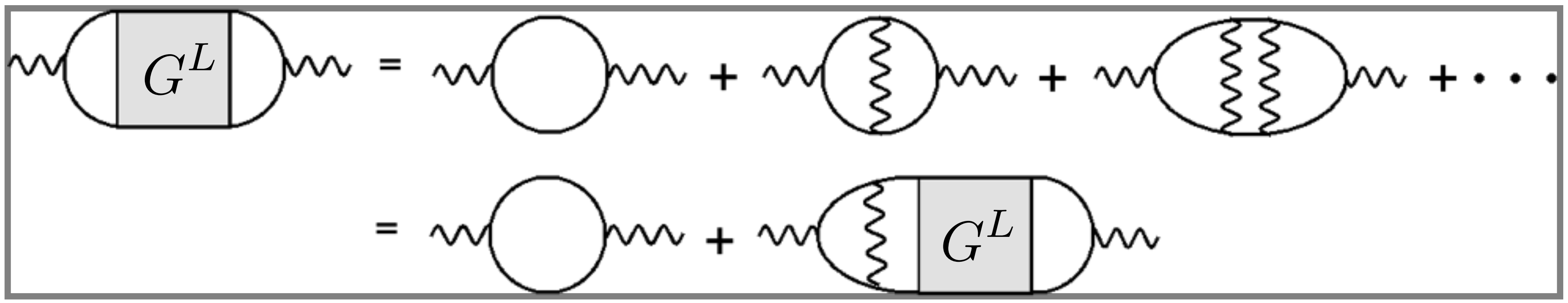
行列要素 $\langle 0|j^{\mu}|n\rangle$ や $\langle 0|j^{\mu}|\mathbf{k},s\rangle$ が分かればよい

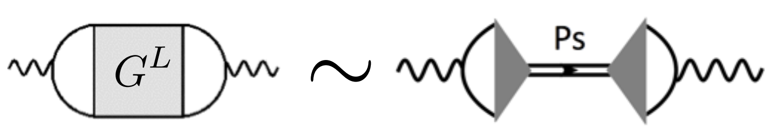
「状態ケット」の概念を経由せず基本的な相関関数だけで議論を閉じさせたい

初期の計算の疑問点(2)

- 束縛状態の質量殻外の正しさが保証されていない

斉次なBethe-Salpeter eq.が得られる

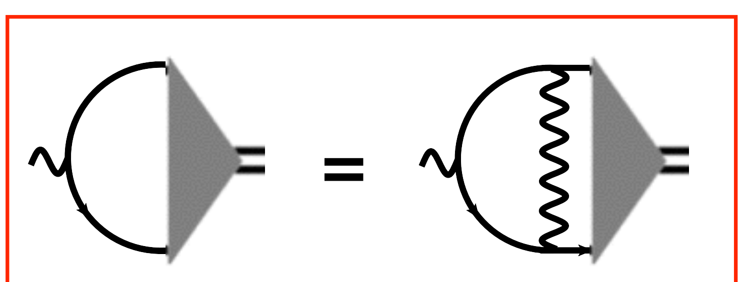


に  を代入

$$\mathrm{Im}\Pi \ni \frac{\pi}{3q^2}\sum |\langle 0|j^\mu|n\rangle|^2 \delta(E-E_n)$$ を思い出すと、

初項は束縛状態の質量付近で虚部を持たないので消える

$\langle 0|j^\mu|n\rangle$



簡単に解ける

質量殻外での正当性を明示したい

初期の計算の疑問点(3)

- Sommerfeld因子と摂動的寄与との関係が不明
  この基準の妥当性も不明

閾値付近での$\mathrm{Im}\Pi$はSommerfeld因子で表せる

$$\mathrm{Im}\Pi(s) \simeq -\left.\frac{\pi\alpha^2/2}{1-\mathrm{e}^{-\pi\alpha/\beta}}\right|_{\beta=\sqrt{1-4m^2/s}}$$

a_eを計算する際の処方箋 (cut-off依存性を無くしたい etc)

$$\mathrm{Im}\Pi(s) \simeq -\frac{\pi\alpha^2}{2}\left.\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi\alpha/\beta}}\underbrace{-\frac{\beta}{\pi\alpha}-\frac{1}{2}-\frac{\pi\alpha}{12\beta}}\right)\right|_{\beta=\sqrt{1-\frac{4m^2}{s}}}$$

$\beta\mathrm{d}\beta$ をかけて $\beta\to\infty$ で収束しない寄与は引いておく

括弧の中は $\beta\to 0$ で特異的な寄与 ➡ 非摂動効果

QED 束縛状態	9.0
Coulomb 散乱	-4.5

各ループ次数の寄与との重なりを明らかにしたい

アウトライン

- 異常磁気モーメント(g-2)の摂動的計算
- 非摂動的効果について・背景・g-2の現状
- QED束縛状態の効果(GM '13)
- Coulomb散乱の効果(Melnikov, *et al.* '14)

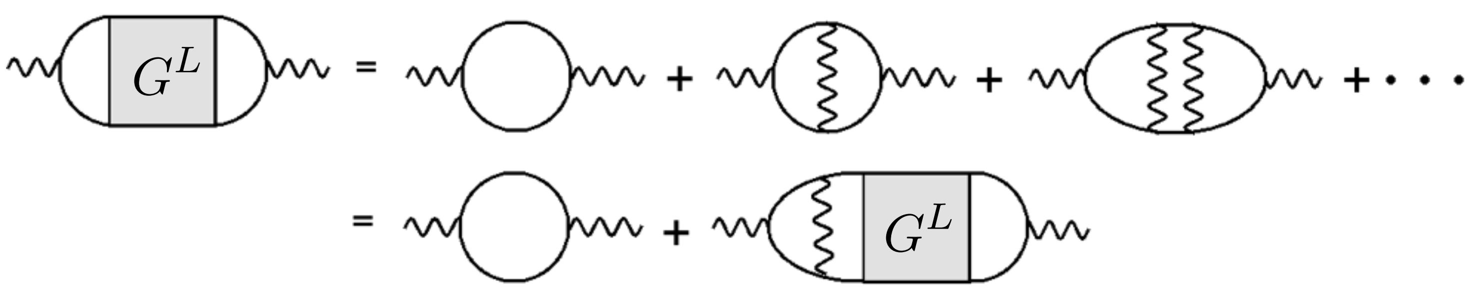
当時のままの
記述で紹介

- (上記の)初期の計算における問題点・疑問点
- 新しい系統的な計算

不安定粒子の状態ケットを仮定せず、束縛状態の質量殻外でも有効で、
摂動展開との対応が分かる計算を行った

今までは既知の手法に帰着させていた

Ladderダイアグラムの無限和
(非斉次Bethe-Salpeter eq.)



$$\boxed{\Pi(q^2)}$$

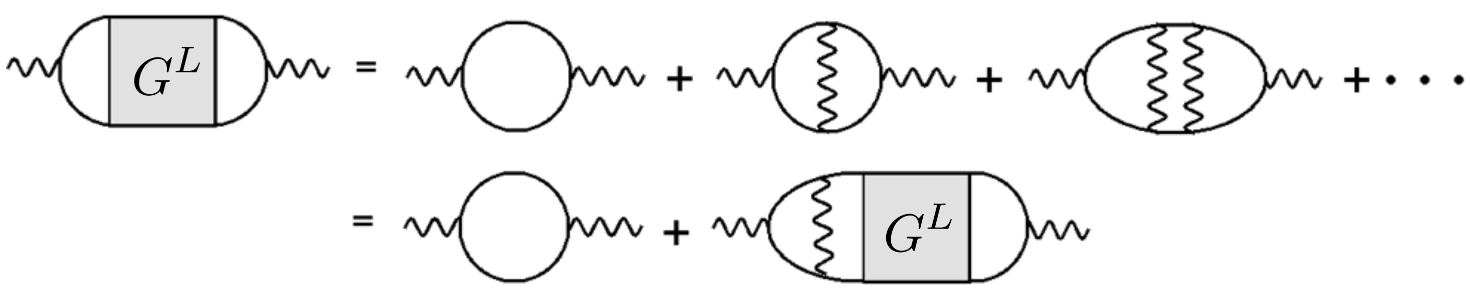
状態ケットをはさんで特異点付近での
斉次Bethe-Salpeter eq.に書き換える
座標空間のSchrodinger eq.に書き換える

束縛状態の波動関数
Sommerfeld因子

先ほどまでの疑問点(1)〜(3)は
この書き換えのせいで生じていた

直接 非斉次Bethe-Salpeter eq.を解く

Ladderダイアグラムの無限和
(非斉次Bethe-Salpeter eq.)



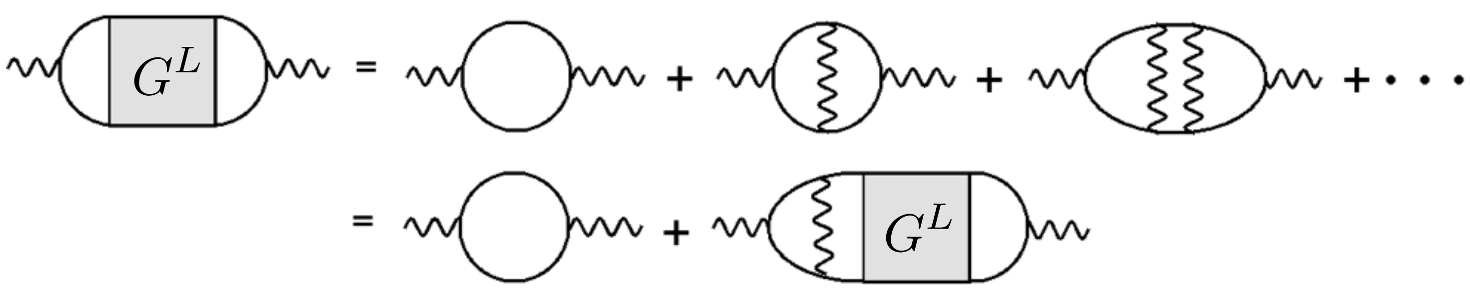
$$\boxed{\Pi(q^2)}$$

~~束縛状態の波動関数~~
~~Sommerfeld因子~~

計算の各段階で摂動的手法との
対応をつけることができる

直接 非斉次Bethe-Salpeter eq.を解く

Ladderダイアグラムの無限和
(非斉次Bethe-Salpeter eq.)



$$\boxed{\Pi(q^2)}$$

$$G^L(\mathbf{p},\mathbf{p}') = \frac{(2\pi)^3\delta^3(\mathbf{p}-\mathbf{p}')}{E-\mathbf{p}^2/m+\mathrm{i}0^+} - \frac{\alpha/2\pi^2}{E-\mathbf{p}^2/m+\mathrm{i}0^+}\int_{-\lambda}^{\lambda}\mathrm{d}^3\mathbf{p}''\,\frac{G^L(\mathbf{p}'',\mathbf{p}')}{(\mathbf{p}-\mathbf{p}'')^2-\mathrm{i}0^+}$$

$$\boxed{\Pi(q^2) = -\frac{e^2}{3q^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{\bar{v}_{\mathbf{p}_1}\gamma^\mu u_{\mathbf{p}_2}\bar{u}_{\mathbf{k}_2}\gamma_\mu v_{\mathbf{k}_1}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}2E_{\mathbf{p}_2}2E_{\mathbf{k}_1}2E_{\mathbf{k}_2}}}G^L(\mathbf{p},\mathbf{k})}$$

非斉次Bethe-Salpeter eq.の厳密解を得た

Chebyshev多項式や球面調和関数の組み合わせ

$$G^L(\mathbf{p},\mathbf{p}') = -\frac{8mp_0^3(2\pi)^3}{(p_0^2+p^2)^2(p_0^2+p'^2)^2}\sum_{n,l,m}\frac{Z_{n,l}^m(\Omega)Z_{n,l}^{m*}(\Omega')}{1-\nu/n-\mathrm{i}0^+}$$

このトークの中では未定義のパラメータや関数を用いているので
上の厳密解の表式は意味を成していませんが、メッセージは摂動展開との対応が明らか
かつLadderダイアグラムの無限和の性質を取り込んだ解が得られたということです。

$$\Pi(q^2) = -\frac{e^2}{3q^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}\frac{\mathrm{d}^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{\bar{v}_{\mathbf{p}_1}\gamma^\mu u_{\mathbf{p}_2}\bar{u}_{\mathbf{k}_2}\gamma_\mu v_{\mathbf{k}_1}}{\sqrt{2E_{\mathbf{p}_1}2E_{\mathbf{p}_2}2E_{\mathbf{k}_1}2E_{\mathbf{k}_2}}}G^L(\mathbf{p},\mathbf{k})$$

摂動的寄与と非摂動的寄与の関係

	通常の摂動計算	束縛状態の効果	非摂動 Coulomb 散乱の効果
1 ループ	○		
2 ループ	○		
3 ループ	○		
4 ループ	○		
5 ループ	○		
6 ループ			○
7 ループ			○
⋮	⋮	⋮	⋮
非常に大きいが有限のループ			○
⋮	⋮	⋮	⋮
無限ループ		○	○

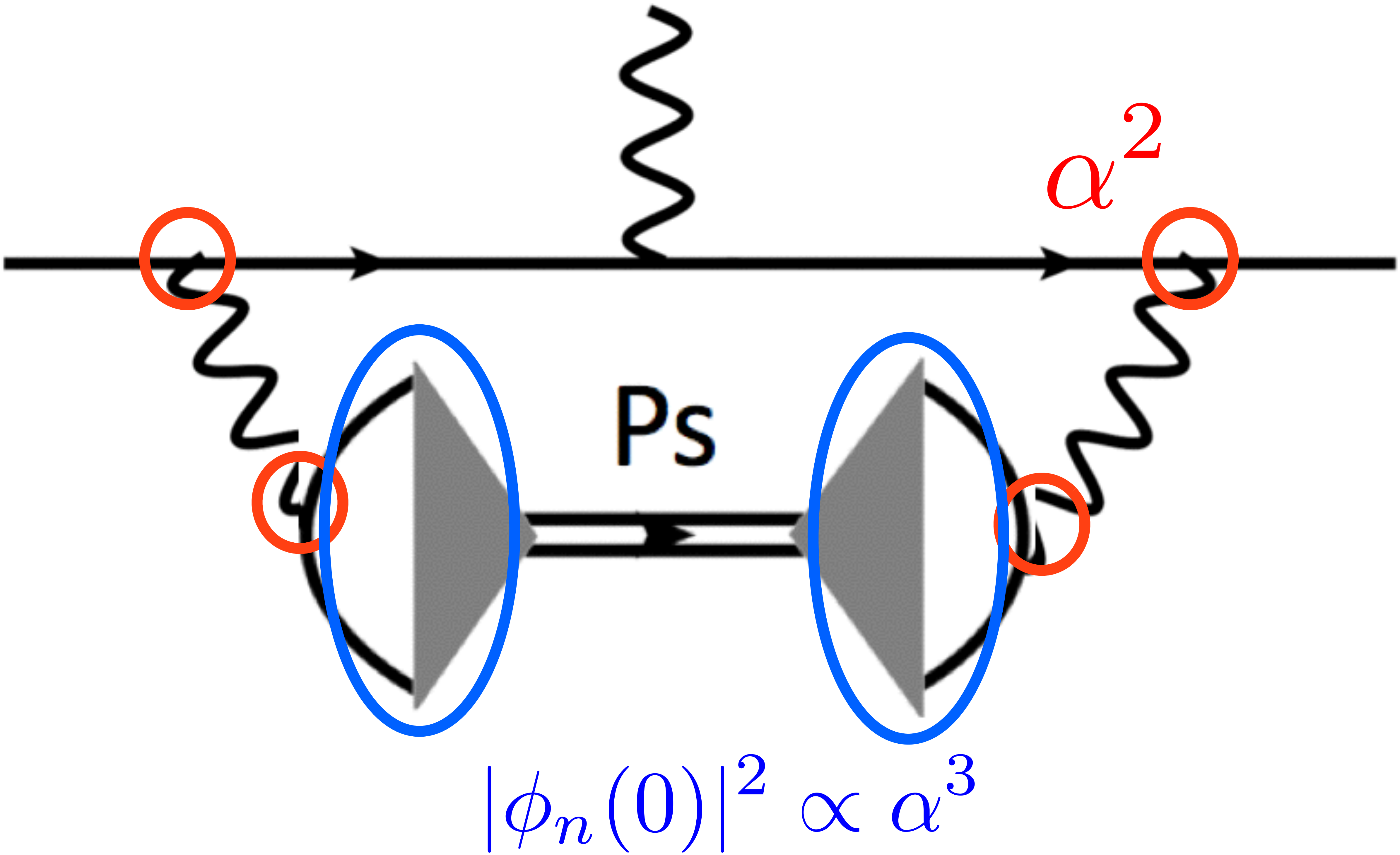
結果は初期の計算と一致

$$\Delta a_e(\text{Bound State}) = \frac{\alpha^5}{4\pi}\zeta(3)\left(8\ln 2 - \frac{11}{2}\right)$$

$$\Delta a_e(\text{Coulomb}) = -\frac{\alpha^5}{8\pi}\zeta(3)\left(8\ln 2 - \frac{11}{2}\right)$$

	値 ($\times 10^{14}$)	不確かさ ($\times 10^{14}$)
摂動的 QED	115 965 218 007	77
QED 束縛状態	9.0	2
Coulomb 散乱	-4.5	2
Hadronic	167.8	1.4
Electroweak	2.973	0.052
標準模型 a_e^{SM}	115 965 218 182	77
測定値 $a_e^{\exp}$	115 965 218 073	28
$a_e^{\mathrm{SM}} - a_e^{\exp}$	109	82
将来の見通し		7

α^5 になることの直感的な説明



α^5 になることの直感的な説明

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^{2n}(-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \frac{1}{x^{2n+2}} \stackrel{?}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{a}$$

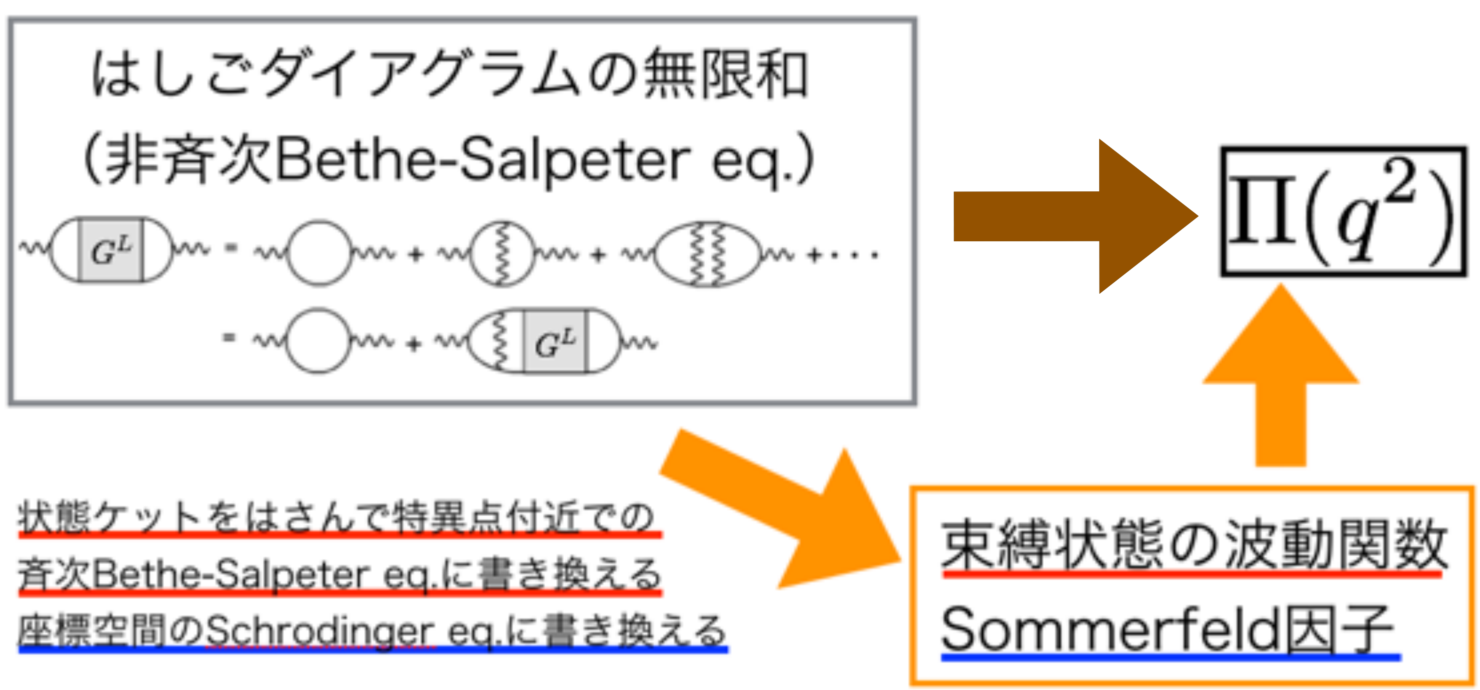
摂動展開より先に積分を実行すると

α の次数が下がる

まとめ

- 初期の計算(GM '13, Melnikov, *et al.* '14)にあった疑問点(束縛状態の状態ケット・質量殻外・摂動展開との対応)を、非斉次Bethe-Salpeter eq.を解くことで解決した

- 摂動QEDの5ループ計算だけでは取り込めない α^5 の効果があることが分かった



計算結果と測定値の比較

	value $(\times 10^{14})$	uncertainty $(\times 10^{14})$
perturbative QED	115 965 218 007	77
non-perturbative QED	4.5	0.5
hadronic	167.8	1.4
electroweak	2.973	0.052
standard model prediction	115 965 218 185	77
measurement	115 965 218 073	28
difference	112	82
future prospects		7

arXiv:1312.2346

今後、束縛状態の効果が重要になる可能性がある