ゲージ理論の解析的構造
－拘束条件に関する「ディラックの予想」について－

菅野礼司

１．はじめに

ゲージ理論を記述するラグランジュ関数からは拘束条件が現れる。

ディラックはゲージ理論に現れる拘束条件（さらに一般的に、特異ラグランジュ関数から導かれる拘束条件）を系統的に扱うアルゴリズムを開発して、美しい理論体系への道を拓いた[(1)]。この功績は素晴らしいが、この分野で非常に重要な問題をやり残した。また、拘束条件に関する予想を行った（しかし、その予想は正しくない）。

一般的に、特異ラグランジュ関数から派生する拘束条件Φ^{α}（p,q）＝０、（α＝１～R）が、運動方程式と整合的であるためには、その時間微分がゼロでなければならない：

$$d\Phi^{\alpha}/dt = [H, \Phi^{\alpha}] = 0$$ （ポアッソン括弧、または交換関係）

この定常性条件から、次々に２次的拘束条件がでる。最初のΦ^{α}を１次拘束として、

$$\Phi^{\alpha}{}_{1} \sim 0,\quad \Phi^{\alpha}{}_{2} = [H, \Phi^{\alpha}{}_{1}] \sim 0, \cdots, \Phi^{\alpha}{}_{K} = [H, \Phi^{\alpha}{}_{K-1}] \sim 0 \qquad (1)$$

Ｋ次拘束まで現れるとする。　～は弱等式を表す。

拘束条件には、第１類拘束（first class constraint）と第２類拘束(second class c.)がある。第１類拘束は、［　］に関して互いに弱等式のもとで閉じている拘束の集合（包合系）：

$$[\Phi^{\alpha}{}_{m}, \Phi^{\alpha}{}_{n}] \sim 0,\quad : \quad \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\,\Phi^{\alpha}{}_{k})$$

第２類はそれ以外の閉じてない拘束である。

第１類拘束はゲージ理論に関わり､第２類拘束条件は位相空間での自由度を縮減するが、さらに、大域的対称性に関わる。第１類拘束の存在がゲージ理論の特性である。

ディラックのやり残した課題は、（i）ゲージ変換の生成子（無限小変換の母関数）と第1 類拘束との関係、（ii）第 2 類拘束と大域的対称性に対する変換生成子の関係、（iii)位相空間と速度位相空間との対応（iv）第１類拘束とゲージ固定の関係である。

第 1 類拘束に関するディラックの予想

ディラックはゲージ理論に関わる第１類拘束条件について次のような予想（conjecture）をした。

“第１類拘束条件は、1 次拘束（primary c.）と 2 次的拘束(secondary c.)（２次～Ｋ次拘束）は、すべて質的に同じであり、同列に扱ってよい”

上記の（i）～（iv）はディラックのこの予想と密接に関連している。

これらの 4 つの問題を筆者らは解決したつもりである。さらに、その過程でディラックの予想の誤りを指摘した。（詳細は参考文献２および３にまとめた。）

このディラック予想から、ゲージ理論におけるハミルトン関数の作り方やゲージ自由度とゲージ固定の方法に混乱が起こった。

２．拘束条件とハミルトン関数

拘束条件のある系のハミルトン関数は、通常「全ハミルトン関数」H_T を用いるべきであることをディラックは最初に示した。全ハミルトン関数(total Hamiltonian)とは下記の（２）式で表される。

$$H_T = H + v_\alpha \Phi^\alpha{}_1 \qquad (2)$$

である（上付下付の同じ添字について和を取る）。ここにHは正準ハミルトン関数、v_α は任意関数である。それゆえ、ゲージ変換の自由度に対応する。

（以下この節では第１類拘束のみの系を扱う。）

ところが後に、ディラックは上記の予想にしたがって、全ハミルトン関数H_T の代わりに、すべての第一類拘束を加えた「拡張されたハミルトン関数」(extended H)　H_E

$$H_E = H + \lambda_\alpha{}^k \Phi^\alpha{}_k \qquad (k = 1 \sim K) \qquad (3)$$

を用いてもよいと主張した。電磁場のような簡単な例では、一見H_E 形式でも矛盾がないうに思えるし、位相空間での定式化のみ見ていたのでは不整合性に気づかないので、彼のこの予想をみな信じてH_E形式を用いるようになった。

このディラックの予想の正否を巡って、永い間議論がなされた。それに対して、筆者らはディラック予想は誤りであることを早くから主張してきた。その根拠として、（１）１次拘束とｋ次（ｋ≧２）拘束とは同等ではなく質的に異なること、（２） H_T が正しい時間発展の生成子であることを証明し、（３）それを実例モデルで示した。

これらの問題について何度も論争を繰り返した結果、漸く２０年ほど前に筆者らの主張が認められるようになった。

なぜディラック予想が誤っているか、その理由を以下に述べる。

３．１次拘束と２次的拘束の質的差異

質点系のモデルをとる。**速度位相空間**（q^i, $\xi^i = dq/dt$）と**位相空間**（q^i, p_i）（ｉ＝１～N）の次元を２Nとする。

まず、１次拘束とｋ次（ｋ≧２）拘束とが質的に異るのは、１次拘束$\Phi^\alpha{}_1$ (p,q) を速度位相空間に引きもどすと、恒等的にゼロになることである：

$$\Phi^\alpha{}_1 \,(p(\xi, q), q) \equiv 0 \qquad (4)$$

しかし２次以降の拘束$\Phi^{\alpha}{}_{k}(p(\xi, q), q)$（$k=2\sim K$）はゼロにならない。この違いは、以下に見るように重要な意味をもつ。　まず、速度位相空間に移したとき、高次拘束は消えないから、H_Eは元の力学系と異なるものとなる。

１次拘束とヘシアン行列のゼロ固有値ベクトルとの関係 (4)

$$\text{ヘシアン行列：}\quad A_{ij} = A_{ji} = \partial^2 L / \partial \xi^i \partial \xi^j = \partial p_i / \partial \xi^j \qquad (5)$$

の階数が N－R（ rank（A_{ij}）= N－R）のとき，（A_{ij}）はR個のゼロ固有値を有し、それに対応してR個のゼロ固有値ベクトル$\tau_{\alpha}{}^{i}$　が存在する。

$$A_{ij}\,\tau_{\alpha}{}^{j} = 0, \qquad (\alpha = 1 \sim R) \qquad (6)$$

Rはラグランジュ関数から直接導かれる１次拘束の数であり、第１類拘束の場合、ゲージ自由度の数であることが示される（後述）。
（４）式に示すように、１次拘束は速度位相空間で恒等的にゼロになるから、それをq^iおよびξ^i　で微分すると、それぞれゼロである。

$$\Phi^{\alpha}{}_{1}(p(\xi, q), q) / \partial q^j = \partial \Phi^{\alpha}{}_{1} / \partial p_i \cdot \partial p_i / \partial q^j + \partial \Phi^{\alpha}{}_{1} / \partial q_i \equiv 0 \qquad (7)$$

$$\partial \Phi^{\alpha}{}_{1} / \partial \xi^j = \partial \Phi^{\alpha}{}_{1} / \partial p_i \cdot \partial p_i / \partial \xi^j = \partial \Phi^{\alpha}{}_{1} / \partial p_i \cdot A_{jj} \equiv 0 \qquad (8)$$

（６）と（８）式から

$$\tau_{\alpha}{}^{i} = \partial \Phi^{\alpha}{}_{1} / \partial p_i \qquad (9)$$

を得る。（９）式を用いて（７）式は

$$\Phi^{\alpha}{}_{1}(p(\xi, q), q) / \partial q^j = \tau_{\alpha}{}^{i} \partial p_i / \partial q^j + \partial \Phi^{\alpha}{}_{1} / \partial q_i \equiv 0 \qquad (10)$$

となる。このような関係は１次拘束のみの有する特性であり、２次的拘束$\Phi^{\alpha}{}_{k}$（$k \geqq 2$）にはない。この性質が１次拘束と２次的拘束との重要な違いであり、両者を同等に扱えない理由の一つである。
これら（９），（１０）式は、位相空間と速度位相空間との対応を付ける鍵である。

４．ゲージ変換の生成子と第１類拘束、およびゲージ自由度 (5)

全ハミルトン関数　$H_T = H + v_{\alpha} \Phi^{\alpha}{}_{1}$の任意関数$v_{\alpha}$は、ゲージ変換の自由度に対応する。それゆえ、$v_{\alpha}$の異なる$H_T$による時間発展は同じ物理的状態を与える。任意の力学

量 $g(q,p)$ の時間発展を考える。$t=0$ のとき g_0 とすると、有限時間 t の後に次のようになる：

$$g(t) = g_0 + t\cdot dg_0/dt + (t^2/2)\, d^2 g_0/dt^2 + \cdots$$
$$= g_0 + t[g_0, H_T] + (t^2/2)[[g_0, H_T], H_T] + \cdots$$

この　H_T の v_α に異なる v_α‘　をとり、辺々相引くと次式を得る：

$$g_v(t) - g_{v'}(t) = t(v_\alpha - v_\alpha')[g_0, \Phi^\alpha{}_1]$$

$$+ (t^2/2)(v_\alpha - v_\alpha')\,\big([[g_0,H], \Phi^\alpha{}_1] + [dg_0/dt, \Phi^\alpha{}_1] + \cdots$$

$$+ [g_0, [\Phi^\alpha{}_1, H] + \cdots) + \cdots \qquad (11)$$

この式は $g(q,p)$ に対するゲージ変換とみなされる。$[\Phi^\alpha{}_1, H]$ は 2 次拘束 $\Phi^\alpha{}_2$ であり、この右辺にはさらに t^3 の項には 3 次拘束と次々に高次の拘束が現れる。

この結果から推測されることは、**ゲージ変換の生成子は、1 次拘束のみでなく、高次拘束に依存する**ということである。

ここで留意すべきことは、このゲージ変換の式は**有限時間**について成り立つということである。だが、**ディラックは（１１）式で時間 t を無限小時間として、t の 1 次までしか取らなかったので、1 次拘束 $\Phi^\alpha{}_1$ のみでゲージ変換の生成子と結論した。**これが誤りの原因となった。２回のゲージ変換を重ねて行った場合、同様の考察から２次、３次拘束も１次拘束と同じゲージ変換の生成子であると考えた。つまり、すべての第１塁拘束は単独でゲージ変換の生成子であるとみなした。**これが拡張されたハミルトン関数 H_E を導入した理由である。**

しかし、ゲージ変換の生成子（母関数）$G(p,q)$ は第１類拘束の一次結合で表されることが証明できる：

$$G = \varepsilon_\alpha{}^k\ \Phi^\alpha{}_k \qquad (\alpha = 1 \sim R、k = 1 \sim K) \qquad (12)$$

$\varepsilon_\alpha{}^k$ は未定関数であるが、以下に示す G の定常条件（G が運動方程式と整合的であるための条件）により、最後の $\varepsilon_\alpha{}^K$ を除き、$k = 1 \sim K-1$ の $\varepsilon_\alpha{}^k$ はすべて $\varepsilon_\alpha{}^K$ とその時間微分により表される。

生成子Gの定常条件、およびその表式の決定

q、p の微少ゲージ変換を δq、δp で表す。このゲージ変換と v_α を δv_α だけ変えたゲージ変換は同等とみなせるから、時間発展の生成子として同等である：

$$H_T(q+\delta q、p+\delta p、v) \sim H_T(q, p、v+\delta v) \qquad (13)$$

ここに無限小ゲージ変換は

$$\delta q^i = [q^i, G] \quad \delta p_i = [p_i, G] \qquad (14)$$

この（１３）式より、Ｇの定常条件として次式が導かれる。

$$[G, H_T] + \partial G/\partial t \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ \Phi^{\alpha}{}_1) \qquad (15)$$

この定常条件は、Ｇが任意の時刻においてゲージ変換の生成子でありうる条件である。

$H_T = H + v_\alpha \Phi^{\alpha}{}_1$に含まれる$v_\alpha$は任意関数であるから、（１５）式は次のように分解される。

$$[G, H] + \partial G/\partial t \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ \Phi^{\alpha}{}_1) \qquad (16)$$

$$[G, \Phi^{\alpha}{}_1] \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ \Phi^{\alpha}{}_1) \qquad (17)$$

（１６）式からわかるように、Ｇの中の$\Phi^{\alpha}{}_1$は｛Ｇ，Ｈ｝により$\Phi^{\alpha}{}_2$になるからＧは$\Phi^{\alpha}{}_1$のみではなくすべての$\Phi^{\alpha}{}_k$の１次結合でなければ満たされない。

上の両式から$\varepsilon_\alpha{}^k$の漸化式が導かれる：

$$d\varepsilon_\alpha{}^k/dt + \varepsilon_\alpha{}^{k-1} + \varepsilon_\beta{}^K C_\alpha{}^{\beta k} = 0 \qquad (18)$$

ここに $C^\alpha{}_\beta{}^k$ は次式で与えられるｑ、ｐの既知関数である

$$[\Phi^{\alpha}{}_K, H] = C^\alpha{}_\beta{}^k \ \Phi^\beta{}_k \qquad (19)$$

この漸化式からすべての $\varepsilon_\alpha{}^k$ （ｋ＝１～Ｋ－１）は $\varepsilon_\alpha{}^K$ とその時間微分の１次結合で表される。ここで、最高次拘束の係数$\varepsilon_\alpha{}^K$ のみが任意関数である。それを改めてε_α（ｔ）とおくと、ＧはＲ個のε_α を任意関数とする$\Phi^\alpha{}_k$ の１次結合で表される。Ｒ個のε_α はゲージ変換の自由度に対応する任意関数である。

この結果から分かるように、**第１類１次拘束$\Phi^{\alpha}{}_1$ の数Ｒがゲージ自由度**である、つまり、**１次拘束の数がゲージ自由度**を決める。したがって、**１次拘束は２次以降の高次拘束とは同等**でないことは明かである。

ゲージ変換の生成子はこのＧ以外にない

また逆に、**ゲージ変換の生成子は、すべてこのように構成したＧであり、それ以外に存在しないことが証明できる。**

一般的に作用積分　∫Ｌ（ｑ，ξ）ｄｔ　が微少ゲージ変換

$$\delta q^{i} = \varepsilon_{\alpha}(t)\, g_{0}^{\alpha i}(q,\xi) + d\varepsilon_{\alpha}/dt \cdot g_{1}^{\alpha i} + \cdot\cdot \qquad (20)$$

（$\varepsilon_{\alpha}(t)$は任意関数、$g_{k}^{\alpha i}$は定まった関数）によって不変ならば（時間の全微分ｄＦ／ｄｔの不定性があり、δＬ＝ｄＦ／ｄｔ）、このゲージ変換の生成子は、定常条件（１５）式を満たす（１２）のＧと一致することが示される[(6)]。$\varepsilon_{\alpha}(t)$は任意であるから、それらとその時間微分の係数因子がゼロでなければならないので、$\Phi^{\alpha}{}_{k}=0$と同等な条件式が速度位相空間でえられる。こうして微少ゲージ変換δq^{i}の生成子は、先のＧと一致することが示される。それゆえ、微少ゲージ変換の生成子はＧ以外に存在しない。

Ｇを決めるときに、（１５）式においてH_T でなく、1次拘束と高次拘束を同列に扱った（2）式のH_E **を用いると、$\lambda_{\alpha}{}^{k}$ はすべて任意関数であるから、Gのなかの$\varepsilon_{\alpha}{}^{k}$ はすべて任意関数となり、ゲージ自由度はＲ×Ｋとなる**（電磁場のゲージ自由度は２となる）。つまり、すべての第1類拘束$\Phi^{\alpha}{}_{k}$がゲージ変換の生成子になる。だが、上記のように、元のラグランジュ関数は、そのようなＲ×Ｋ個のゲージ変換で不変ではない。これでは実際のゲージ理論と矛盾する。

もし、（4）で示した1次拘束の特性と、ゲージ変換の生成子が第1類拘束の1次結合でこのように表されることに、ディラックが気づいていれば、1 次拘束と高次拘束の質的差異を認めて、上記のような予測をしなかったであろう。

ゲージ固定に制限がつく

ゲージ力学系の解を一義的に決めるには第1類拘束条件の数と同数のゲージ固定条件$\chi^{\alpha}{}_{k}$が必要である。ところが、ゲージ固定条件も運動方程式と整合的であるためには、$\Phi^{\alpha}{}_{k}$と同様に、それらも定常条件を満たさねばならない：

$$[H_T,\ \chi^{\alpha}{}_{k}] \sim 0 \qquad (21)$$

これら定常条件はH_E形式なら、任意関数$\lambda_{\alpha}{}^{k}$があるから、すべて任意の$\chi^{\alpha}{}_{k}$によって満たされる。だが、H_Tでは任意関数v_{α}はＲ個しかないので、すべての$\chi^{\alpha}{}_{k}$を勝手に

選べない。（２１）式によって、通常は$\chi^{\alpha}{}_{1}$から次々に新たな条件$\chi^{\alpha}{}_{2}$，$\chi^{\alpha}{}_{3}$が導かれるから、その列がちょうど$\chi^{\alpha}{}_{K}$で終わるように$\chi^{\alpha}{}_{1}$を選ぶのがよい。

このように、H_TとH_Eとではゲージ固定条件の選び方も変わる。電磁場の場合は、ゲージ固定としてクーロンゲージ$\partial^i A_i = 0$と$A_0 = 0$とは（２１）式と整合的である。しかし、ヤン・ミルス場の場合は整合的でないので、このようなゲージ固定は許されない。

６．位相空間と速度位相空間との整合性について（7）

拘束条件の現れる力学系では、力学変数（q，ξ）と（q，p）との相互変換は可能でない。それゆえ、速度位相空間と位相空間との対応は一義的でない。

（4）に示したように１次拘束条件は速度位相空間で恒等的に消えるために（9），（10）式が導かれた。これらの式を用いて位相空間の力学的形式と速度位相空間のそれとの対応が可能となる。

１次拘束条件は速度位相空間で恒等的に消えるから、H_T の付加項$\Phi^{\alpha}{}_{1}$ は速度位相空間には寄与しない。それゆえ、その変換による結果は元のラグランジュ関数と同じ内容となる。すなわち、**H_T形式では位相空間と速度位相空間とは同等**であり、位相空間で定式化された関係式（運動方程式やゲージ変換など）は速度位相空間にそのまま引き戻されるから、**両空間での形式化は整合的**であることが示される。

両空間での写像関係：ヘッシアン行列が特異なので、１：１対応はない。事実ξ^iには次のような不定性がある。

$$p_i(q,\ \xi) = p_i(q,\ \xi + u^{\alpha}\tau_{\alpha}) \qquad (22)$$

また、変換に関しては

$$dp_i \to (dp_i/d\xi^j)\, d\xi^j + (dp_i/dq^j)\, dq^j$$
$$= A_{ij}\, d\xi^j + (dp_i/dq^j)\, dq^j \qquad (23)$$
$$dq^i \to dq^i$$

$$\partial/\partial\xi^i \to (\partial p_j/\partial\xi^i)\, \partial/\partial p_j = A_{ij}\,\partial/\partial p_j$$
$$\partial/q^i \to (\partial p_j/\partial q^i)\, \partial/\partial p_j + \partial/q^i \qquad (24)$$

は可能だが、A_{ij}の逆行列が存在しないので、これらの逆変換は存在しない。

両空間での定式化で、次のような対応関係がある：

位相空間の$\Phi^{\alpha}{}_{1}$（q，p）→速度位相空間で$\Phi^{\alpha}{}_{1}$ $(p(\xi,q),q) = 0$

速度位相空間の$Z_\alpha = \tau_\alpha{}^i \partial / \partial \xi^i$ →位相空間で$\tau_\alpha{}^i A_{ij} \partial / \partial p_j = 0$

Z_αはξ^jの不定性（２２）から現れるもので、$\Phi^\alpha{}_1$が速度位相空間で消えることに対応する演算子である。

これらの関係と（９），（１０）式とにより、H_T形式は両空間で整合的であることが示される。(7)

それに対して、H_E形式では、**H_Eの付加項のうち高次拘束条件は速度位相空間で消えないために、H_Eは元のラグランジュ関数とは異なる力学を与える**。事実、H_E から導かれる位相空間での関係式を速度位相空間に引きもどすと整合的でない結果を得る。さらに、その引き戻しができないようなモデルも存在する。

具体的モデル

特に、ディラックの予測の可否を巡る議論で提示されたフレンケルのモデルラグランジュ関数(8)

$$L = \xi^1 (\xi^3)^2 - q^2 (q^3)^2 / 2 \qquad （２５）$$

は両空間での整合性の問題を浮き彫りにした。このモデルでは３次拘束まで現れる：

$$\Phi_1 = p_2, \quad \Phi_2 = -(q^3)^2/2, \quad \Phi_3 = -q^3\sqrt{p_1} = -q^3\xi^3 \qquad （２６）$$

このモデルでは、通常のH_T形式でもH_E形式でも、速度位相空間と位相空間とは整合的なものがえられない。ところが、

ヘシアン行列

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\xi^3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\xi^3 & 0 & 2\xi^1 \end{pmatrix} \qquad （２７）$$

の階数が、３次拘束からえられる$\sqrt{p_1} = \xi^3 \sim 0$によって、もう一つ下がるのである。そのことに気づかなかったので、両空間での整合性が得られず一時期混乱が続いた。しかし、ヘシアン行列の階数が拘束条件によって下がるために、もうひとつ、$\underline{\tau}^i = (0, 1 0)$に対応する新たな 1 次拘束$\underline{\Phi_1} = p_1$が現れることに気づくことで解決した。その$\underline{\Phi_1}$を$H_T$に加えたものを改めて

$$H_T = H + v\,\Phi_1 + \underline{v\,\Phi_1}, \qquad \underline{\Phi_1} = p_1 \qquad （２８）$$

とすれば、ゲージ変換の生成子も含め、両空間ですべて整合的な理論が得られる[3][4]。

これもＨ$_E$ではなく、Ｈ$_T$ 形式が正しいことを示す例である。

以上いくつかの理由から Ｈ$_E$ 形式、つまりディラックの予想は正しくないといえる。

７．第２類拘束条件の役割

第２類拘束条件の役割について、ディラックはあまり重視してない。第２類拘束は必ず対で現れ、位相空間の自由度を縮減するだけであると考えた。そして、位相空間の自由度を消去するために、第２類拘束を強等式でゼロになるようなディラック括弧を導入した。

しかし、第２類拘束も大域的対称性変換（定数パラメータ変換）の生成子を作る。その生成子は第２類拘束の１次結合により表されること、およびその構成方法を、筆者たちは導いた[9]。それにより、大域的変換の自由度は、やはりヘシアン行列の階数の減少数（第２類１次拘束の数）に等しいことも示した。（ただし、その力学系に対称性がないときは、その構成法（方程式）の解が存在しない。）

第２類拘束に関するこの性質（大域的対称性との関連）は、ディラックが気づいていなかったことである。彼は、第２類拘束は位相空間の自由度を縮減するだけといい、あまり重要視しなかった。

参考文献

（１）P.A.M. Dirac: Lectures on Quantum Mechanics（Belfer Graduate School of Science, Yeshiba University, 1964）,
（２）木村利栄・菅野礼司著『微分形式による解析力学』吉岡書店１９８８,
（３）菅野礼司著『ゲージ理論の解析力学』吉岡書店２００７,
（４）R. Sugano and H. Kamo : Prog. Theor. Phys. **67**（1982）1966,
（５）R. Sugano : Prog. Theor. Phys. **68**（1982）1377,
L. Castellani: Ann. of Phys. **143**（1982）,　（同時に独立に発表）
（６）R. Sugano and Y. Kaguraoka :Z. Phys. **C52.**　（1991）, 437,
（７）R. Sugano, Y. Saito and T. Kimura: Prog. Theor. Phys. **76**（1986）283,
（８）A. Frenkel: Phys. Rev. **D21**　（1980）, 2986.
（９:）R. Sugano and T. Kimura: Phys. Rev. **D41**（1990）, 1247.