京産大益川塾 2011, 10/15

量子重力的宇宙論
- CFTからCMBまで -

KEK/総研大　浜田賢二
http://research.kek.jp/people/hamada/

参考文献

- *From CFT Spectra to CMB Multipoles in Quantum Gravity Cosmology*, with S. Horata and T. Yukawa, Phys. Rev. D81 (2010) 083533, arXiv:0908.0192
- *Renormalizable 4D Quantum Gravity as A Perturbed Theory from CFT,* Found. Phys. 39 (2009) 1356, arXiv:0907.3969
- *Background Free Quantum Gravity based on Conformal Gravity and Conformal Field Theory on M^4,* arXiv:1109.6109

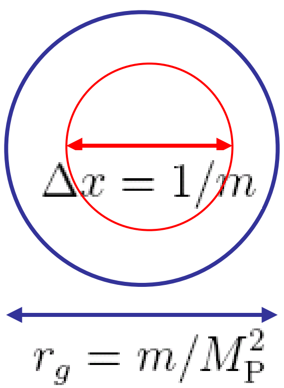
第一章
はじめに

Einstein重力の限界

Einstein重力の量子化の問題点

✓ 結合定数（Newton定数）が次元をもつ
➔摂動論はくりこみ不可能
✓ 時空の特異点が存在する
✓ 作用が下に有界でない(cf. φ^3 -theory)
➔非摂動的に量子化しても不安定

For $m > M_{\mathrm{P}}$



ユニタリ性の問題

$E > M_{\mathrm{P}}$ では素粒子はブラックホールになる

Compton wave length ＜ Schwarzschild radius

➔粒子情報の喪失(粒子描像の破綻)

Einstein理論ではPlanckスケールを越えることはできない

重力の量子化の方法と問題点

量子重力の目的　＝　Planckスケールの壁を越えること

（通常の場の量子論ではPlanckスケールに紫外カットオフを導入する）

有限な理論を得るためのいくつかのアプローチ

- 運動方程式や対称性を用いてくりこみ項をすべて消す試み

  例：N=8 supergravity, superstring

  紫外カットオフは消えても、エネルギーの上限は存在する

  有効作用は局所的

- スケールを持たない4階微分作用を導入する方法

  有限個のくりこみ項（＝くりこみ可能な理論）

  漸近自由性なら、紫外カットオフがなく、上限もなくなる

  有効作用は非局所的

4階微分運動項をもつ量子重力理論の特徴

•結合定数が無次元になる

➔power-counting renormalizable

•作用が正定値になる

ただし、<u>単純な摂動論</u>ではゴーストが現れる

ゲージ不変な質量項をもつ

$$\frac{1}{m^2p^2+p^4} \rightarrow \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2+m^2}$$

ghost mode

ユニタリ性問題への非摂動的アプローチ

- Lee-Wick-Tomboulis approach
- Horava approach
- Background Free approach

ゴーストを非力学的か又はゲージ非不変な自由度にする

- Lee-Wick-Tomboulis approach (1970s) :

resummed propagatorで議論する。
漸近自由な場の量子論（ $\beta = -\beta_0 g^3$ ）では

$$\frac{1}{m^2p^2 + \beta_0 p^4 \log(p^2/\Lambda^2)} = \frac{1}{p^2[m^2 + \beta_0 p^2 \log(p^2/\Lambda^2)]}$$

➔ghostの実極が消える（IRでは今でも有効)

- Horava approach :

Lorentz不変性を破る ➔ ghostを非力学的自由度にする

- Background Free approach (our model) :

非摂動的方法(CFT)を取り入れる
共形不変性が一般座標不変性の一部として現れる
➔ ghost modeがゲージ不変でなくなる

講演内容

1. はじめに
2. 量子重力とCFT
3. くりこみ計算
4. 量子重力的宇宙論
5. まとめ

第二章
量子重力とCFT

UV cutoffの無い理論の構成
Planckスケールを越える

くりこみ可能な量子重力

$\mathrm{sgn} = (-1, 1, 1, 1)$

weight e^{iI}

The Action (Weyl + Euler + Einstein)

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} \Big\{ \underbrace{-\frac{1}{t^2} C^2_{\mu\nu\lambda\sigma} - bG_4}_{\text{conformally invariant (no R^2)}} + \frac{1}{\hbar}\Big(\frac{1}{16\pi G} R - \Lambda + \mathcal{L}_{\mathrm{M}} \Big) \Big\}$$

Planck constant

共形平坦な時空（ $C_{\mu\nu\lambda\sigma} = 0$ ）のまわりでの摂動展開:

$$g_{\mu\nu} = e^{2\phi}\left(\hat{g}_{\mu\nu} + t h_{\mu\nu} + \cdots\right), \quad tr(h) = 0$$

共形モード
（厳密に扱う）

トレースレステンソルモード
（摂動的に扱う）

共形場理論(CFT)

作用が意味すること

紫外カットオフが無い

“t”は唯一の無次元な重力結合定数で漸近自由性を示す
（共形平坦時空のまわりでの摂動論が正当化される）

$$t \to 0 \qquad C_{\mu\nu\lambda\sigma} \to 0$$ (conformally flat)

Riemann曲率が発散するような特異点は
量子力学的に排除される

cf. gauge theory: $-\frac{1}{g^2} Tr\left(F_{\mu\nu}^2\right) \qquad F_{\mu\nu} \to 0 \quad (g \to 0)$

古典極限 $\hbar \to 0$: Einstein作用が優勢になる

共形モードのダイナミクス

$$g_{\mu\nu} = e^{2\phi}\bar{g}_{\mu\nu} = e^{2\phi}(\hat{g}_{\mu\nu} + th_{\mu\nu} + \cdots)$$

$$Z = \int [dg\cdots]_{\underline{\underline{g}}} \exp(iI) = \int [d\phi dh \cdots]_{\underline{\underline{\hat{g}}}} \exp(i\underline{\underline{S(\phi)}} + iI)$$

Practical measure defined on the background

Jacobian = Wess-Zumino actions

$$\phi^n F^2_{\mu\nu},\ \phi^n \bar{C}^2_{\mu\nu\lambda\sigma},\ \phi^{n+1}\bar{\Delta}_4\phi,\ \cdots$$

運動項が測度から結合定数の最低次で誘導される ⇐ n=0

$$S_{\mathrm{RWS}} = -\frac{b_1}{(4\pi)^2}\int d^4x\sqrt{-\hat{g}}\left\{2\phi\hat{\Delta}_4\phi + \left(\hat{G}_4 - \frac{2}{3}\hat{\nabla}^2\hat{R}\right)\phi\right\} \qquad b_1 > 0$$

Riegert-Wess-Zumino作用

4th -order conf. inv. op.

共形不変性 = quantum diffeomorphism inv. = background free

$$\phi \to \phi + \omega \Longrightarrow Z(e^{2\omega}\hat{g}) = Z(\hat{g})$$

共形モードを厳密に量子化したことによって現れる対称性

ゲージ不変性(diffeomorphism inv.)

$$\delta_\xi g_{\mu\nu} = g_{\mu\lambda}\nabla_\nu \xi^\lambda + g_{\nu\lambda}\nabla_\mu \xi^\lambda$$

ξ^μ : gauge parameter

Metric field is expanded about $C_{\mu\nu\lambda\sigma} = 0$

$$g_{\mu\nu} = \underline{\underline{e^{2\phi}}}\bar{g}_{\mu\nu} \qquad \bar{g}_{\mu\nu} = (\hat{g}\, e^{th})_{\mu\nu} = \hat{g}_{\mu\lambda}\left(\delta^\lambda{}_\nu + t h^\lambda{}_\nu + \frac{t^2}{2}(h^2)^\lambda{}_\nu + \cdots\right)$$

no coupling const.

coupling const.

$$\begin{cases} \delta_\xi \phi &= \xi^\lambda \partial_\lambda \phi + \dfrac{1}{4}\hat{\nabla}_\lambda \xi^\lambda \\ \delta_\xi h_{\mu\nu} &= \dfrac{1}{t}\left(\hat{\nabla}_\mu \xi_\nu + \hat{\nabla}_\nu \xi_\mu - \dfrac{1}{2}\hat{g}_{\mu\nu}\hat{\nabla}_\lambda \xi^\lambda\right) + \xi^\lambda \hat{\nabla}_\lambda h_{\mu\nu} \\ &\quad + \dfrac{1}{2}h_{\mu\lambda}\left(\hat{\nabla}_\nu \xi^\lambda - \hat{\nabla}^\lambda \xi_\nu\right) + \dfrac{1}{2}h_{\nu\lambda}\left(\hat{\nabla}_\mu \xi^\lambda - \hat{\nabla}^\lambda \xi_\mu\right) + o(t\xi h^2) \end{cases}$$

Conformal mode and traceless mode are decoupled !

UV固定点(t = 0)でのゲージ対称性

◆ Weyl作用が持つ通常のゲージ変換($\kappa^\mu = \xi^\mu / t \quad t \to 0$)

$$\delta_\kappa h_{\mu\nu} = \hat{\nabla}_\mu \kappa_\nu + \hat{\nabla}_\nu \kappa_\mu - \frac{1}{2}\hat{g}_{\mu\nu}\hat{\nabla}_\lambda \kappa^\lambda$$

(Field indep.)

このゲージ自由度は通常通りゲージ固定する

◆ ゲージ変換はUV極限で共形変換を含む

for $\xi^\mu = \zeta^\mu$ satisfying $\hat{\nabla}_\mu \zeta_\nu + \hat{\nabla}_\nu \zeta_\mu - \frac{1}{2}\hat{g}_{\mu\nu}\hat{\nabla}_\lambda \zeta^\lambda = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \delta_\zeta h_{\mu\nu} = \zeta^\lambda \hat{\nabla}_\lambda h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} h_{\mu\lambda}\left(\hat{\nabla}_\nu \zeta^\lambda - \hat{\nabla}^\lambda \zeta_\nu\right) + \frac{1}{2} h_{\nu\lambda}\left(\hat{\nabla}_\mu \zeta^\lambda - \hat{\nabla}^\lambda \zeta_\mu\right) \\ \delta_\zeta \phi = \zeta^\lambda \hat{\nabla}_\lambda \phi + \underline{\underline{\frac{1}{4}\hat{\nabla}_\lambda \zeta^\lambda}} \end{cases}$$

Field dep.

$\longleftarrow$ RWZ作用の線形項から

共形変換はWeyl作用とRWZ作用からそれぞれ生成される(注:このときR^2は不要)

BRST不変な演算子(Kato-Ogawa型)

BRST変換: $\zeta^\lambda \to c^\lambda$ $\Rightarrow$ $\begin{cases} i\left[Q_{\mathrm{BRST}}, \phi(x)\right] = c^\mu \partial_\mu \phi(x) + \frac{1}{4}\partial_\mu c^\mu(x) \\ i\left\{Q_{\mathrm{BRST}}, c^\mu(x)\right\} = c^\nu \partial_\nu c^\mu(x) \end{cases}$

物理的演算子: $\left[Q_{\mathrm{BRST}}, \int d^4x V(x)\right] = 0$ ← 共形不変(=diff. inv.)な演算子

Ex1. $V_\alpha =: e^{\alpha\phi}:$ 変換則 $i[Q_{\mathrm{BRST}}, V_a] = c^\mu \partial_\mu V_\alpha + \frac{h_\alpha}{4}\partial_\mu c^\mu V_\alpha$ $\quad h_\alpha = \alpha - \underline{\underline{\frac{\alpha^2}{4b_1}}}$

$\Rightarrow$ $i[Q_{\mathrm{BRST}}, \int d^4x V_\alpha] = \int d^4x \partial_\mu (c^\mu V_\alpha) = 0$ for $\underline{h_\alpha = 4}$ 量子補正項

宇宙項演算子

Ex2. $V_R =: e^{\beta\phi}(\partial^2\phi + \partial_\lambda\phi\partial^\lambda\phi):$ with $h_\beta = 2$

Ricci曲率演算子

一般に、テンソルの足を持つ演算子はBRST不変にならない➔原始スカラーゆらぎ

(注:通常の共形場理論では真空だけが不変で、場は共形変換する)

相関関数の正定値性

Riegert-Wess-Zumino作用は正しい符合をもつ（下に有界）
= <u>経路積分がwell-defined</u>

$$\langle \phi(x)\phi(y)\rangle = -\frac{1}{4b_1}\log(|x-y|^2) \qquad \underline{b_1 > 0}$$

➔原始揺らぎの振幅が正になる

2点相関関数：

$$\langle V_{4b_1-\alpha}(x)V_\alpha(y)\rangle = \frac{1}{(x-y)^8} > 0$$

🡐Vertexが<u>実演算子</u>であることに由来

Wightman正定値条件: $\Delta > 1 + s$ 🡐Vertexは$\Delta = 4 \quad s = 0$なのでOK

注: もしテンソル場 $C_{\mu\nu\lambda\sigma}$ が物理量ならば、$\Delta = 2 \quad s = 2$ となって条件を満たさないが、それは、BRST不変性から排除される。一方、スカラー量 $C^2_{\mu\nu\lambda\sigma}$ は物理量としてOK

⮤ <u>通常の共形場理論の条件より強い</u>

CFTからの摂動展開

This model :

CFT + perturbation by “t”

RWZ＋Weyl

ゲージ変換としての共形変換が正計量と負計量のモードを混ぜるため、ゴーストが単独でゲージ不変にならない

非摂動的 (共形モードを厳密に取り扱う)

時空の量子化

cf. 従来の4階微分模型

Free + perturbations (2 couplings)

R^2＋Weyl

ゲージ変換がモードを混ぜないため、ゴーストが単独でゲージ不変になってしまう

すべての重力モードを摂動的に扱う

graviton picture

第三章
くりこみ計算

次元正則化

次元正則化について

Dimensional regularization

all orders, diffeomorphism invariant ← 保障

$$\delta^{(D)}(0) = \int d^D k = 0$$

共形異常は4とD次元の間に含まれる

cf. DeWitt-Schwinger method

one-loop order

$$\delta^{(4)}(0) = \langle x | e^{-\epsilon D} | x \rangle |_{\epsilon \to 0}$$ ⇒ conformal anomaly

heat kernel

くり込み可能なD次元重力作用

Euclidean sign.

D dimensional integrability ➔ bare action

$$I = \int d^D x \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{t^2} C^2_{\mu\nu\lambda\sigma} + b G_D + \frac{1}{4} F^2_{\mu\nu} + \sum_{j=1}^{n_F} i \bar{\psi}_j \not{D} \psi_j - \frac{M_P^2}{2} R + \Lambda \right\}$$

$$\begin{cases} C^2_{\mu\nu\lambda\sigma} = R_{\mu\nu\lambda\sigma} R^{\mu\nu\lambda\sigma} - \dfrac{4}{D-2} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \dfrac{2}{(D-1)(D-2)} R^2 \\ G_D = G_4 + \dfrac{(D-3)^2 (D-4)}{(D-1)^2 (D-2)} R^2 \end{cases}$$

Renormalization factors

$$\boxed{Z_\phi = 1}$$

：共形モードは繰り込みを受けない

$$A_\mu = Z_3^{1/2} A^r_\mu, \quad \psi_j = Z_2^{1/2} \psi^r_j, \quad h_{\mu\nu} = Z_h^{1/2} h^r_{\mu\nu}$$

$$e = Z_e e_r, \quad t = Z_t t_r \qquad (Z_e = Z_3^{-1/2})$$

Ward-Takahashi identity

共形異常（WZ作用）

$$Z_3 = 1 + \frac{x_1}{D-4} + \frac{x_2}{(D-4)^2} + \cdots$$

residues x_1, x_2
➔beta function

Bare action ➔ vertices and counterterms

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\int d^Dx\sqrt{g}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{4}Z_3\int d^Dx e^{(D-4)\phi}F^r_{\mu\nu}F^r_{\lambda\sigma}\bar{g}^{\mu\lambda}\bar{g}^{\nu\sigma} \\
&= \frac{1}{4}\int d^Dx\Big\{\Big(1+\frac{x_1}{D-4}+\frac{x_2}{(D-4)^2}+\cdots\Big)F^r_{\mu\nu}F^r_{\lambda\sigma}\bar{g}^{\mu\lambda}\bar{g}^{\nu\sigma} \\
&\qquad +\Big(D-4+x_1+\frac{x_2}{D-4}+\cdots\Big)\underline{\phi} F^r_{\mu\nu}F^r_{\lambda\sigma}\bar{g}^{\mu\lambda}\bar{g}^{\nu\sigma} \\
&\qquad +\frac{1}{2}\Big((D-4)^2+(D-4)x_1+x_2+\cdots\Big)\underline{\phi^2} F^r_{\mu\nu}F^r_{\lambda\sigma}\bar{g}^{\mu\lambda}\bar{g}^{\nu\sigma} \\
&\qquad +\cdots\Big\}
\end{aligned}$$

🡐 ordinary counterterms

🡐 new vertices and new counterterms

⇕

Wess-Zumino action for conformal anomaly

Bare Weyl action

$$-\frac{1}{t^2}\int d^Dx\sqrt{g}C^2_{\mu\nu\lambda\sigma} = \frac{1}{t^2}\int d^Dx\sqrt{\bar{g}}e^{(D-4)\phi}\bar{C}^2_{\mu\nu\lambda\sigma}$$

Laurent expansion of b

$$b = \frac{1}{(4\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(D-4)^n}$$

$$b_n = b_n(t_r, e_r) \quad (n \geq 2)$$

$$b_1(t_r, e_r) = b_1 + b_1'(t_r, e_r)$$

Positive constant

$$b_1 = \frac{11 N_F}{360} + \frac{40}{9}$$

Euler term

$$
\begin{aligned}
& b \int d^D x \sqrt{g} G_D \\
& = \frac{1}{(4\pi)^2} \int d^D x \Big\{ \Big(\frac{b_1}{D-4} + \frac{b_2}{(D-4)^2} + \cdots \Big) \bar{G}_4 \\
& \quad + \Big(b_1 + \frac{b_2}{D-4} + \cdots \Big) \Big(2\phi \bar{\Delta}_4 \phi + \bar{E}_4 \phi + \frac{1}{18} \bar{R}^2 \Big) \\
& \quad + \frac{1}{2} \big((D-4) b_1 + b_2 + \cdots \big) \big(2\phi^2 \bar{\Delta}_4 \phi + \bar{E}_4 \phi^2 + \cdots \big) + \cdots \Big\}
\end{aligned}
$$

← counterterms

← Wess-Zumino action and new counterterms

運動項（Riegert作用）が誘導される

Conformal mode dynamics

ベータ関数

quantum gravity+QED

$$\beta_t = -\left(\frac{n_F}{40} + \frac{10}{3}\right)\frac{t_r^3}{(4\pi)^2} - \frac{7n_F}{72}\frac{e_r^2 t_r^3}{(4\pi)^4} + o(t_r^5)$$

ランニング結合定数($\beta_t = -\beta_0 t_r^3$)

$$\Gamma_{\rm W} = \left\{\frac{1}{t_r^2} - 2\beta_0\underline{\phi} + \beta_0 \log\left(\frac{k^2}{\mu^2}\right)\right\}\bar{C}^{r2}_{\mu\nu\lambda\sigma}$$

$$= \frac{1}{\bar{t}_r^2(p)}\sqrt{g_r}C^{r2}_{\mu\nu\lambda\sigma}.$$

(k : momentum defined on flat background =comoving momentum)

where

$$\bar{t}_r^2(p) = \frac{1}{\beta_0 \log(p^2/\Lambda_{\rm QG}^2)}$$

Asymptotic freedom

力学的スケール： $\Lambda_{\rm QG} = \mu \exp(-1/2\beta_0 t_r^2)$

物理的運動量： $p^2 = k^2/\underline{a^2}$ with $a = e^\phi$

第四章
量子重力的宇宙論

CFTからCMBまで

Summary

Action : $$I = \int d^4x \sqrt{-g}\left\{ -\frac{1}{t^2} C^2_{\mu\nu\lambda\sigma} - bG_4 + \frac{1}{\hbar}\left(\frac{1}{16\pi G} R - \Lambda + \mathcal{L}_{\mathrm{M}} \right) \right\}$$

Effective action : $$\Gamma = I + S_1 + o(t_r)$$

$$S_1(\phi, \bar{g}) = -\frac{b_1}{(4\pi)^2} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left(2\phi \bar{\Delta}_4 \phi + \bar{E}_4 \phi \right)$$ Riegert action

量子重力的宇宙論

宇宙の時間発展　=　共形不変性が破れていくプロセス

時空の相転移

量子時空
（スケール不変）

古典時空
（Einstein時空）

新しいエネルギースケール　$\Lambda_{\mathrm{QG}} \simeq 10^{17}\mathrm{GeV}$

相関距離　$\xi_\Lambda = 1/\Lambda_{\mathrm{QG}} \; (\gg l_{\mathrm{pl}})$

安定なインフレーション解

漸近自由性により

$$t \to 0$$
$$C_{\mu\nu\lambda\sigma} \to 0$$

質量スケールの関係 $m_{\rm pl} \gg \Lambda_{\rm QG}$

運動方程式 ($E \gg \Lambda_{\rm QG}$)

$$-b_1 \partial_\eta^4 \phi + 3\pi m_{\rm pl}^2 e^{2\phi} \left(\partial_\eta^2 \phi + \partial_\eta \phi \partial_\eta \phi \right) = 0$$

Riegert-Wess-Zumino action

Einstein action

共形不変性はPlanckスケールで破れ始める
➔ インフレーション宇宙

⇩ 結合定数の増大

共形不変性が力学的エネルギースケールで完全に壊れる
➔ Friedmann宇宙

時間に依存したランニング結合定数と相転移のモデル

宇宙の膨張 ➔ 時間(唯一のスケール)

$$d\tau = a d\eta$$

↑

proper time

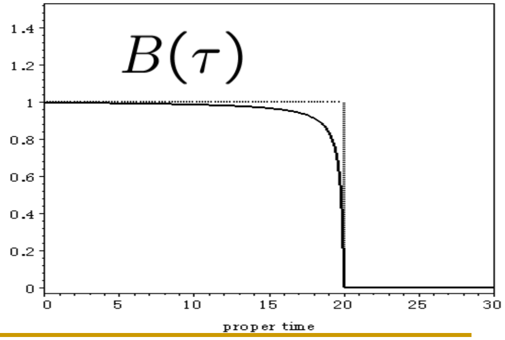
$$-\tau \frac{d}{d\tau}\bar{t}_r(\tau) = \beta(\bar{t}_r(\tau))$$

力学的Wess-Zumino係数

$$b_1 \to b_1\left(1 - a_1\bar{t}_r^2 + \cdots\right) = b_1 B(\bar{t}_r) \quad (a_1 > 0)$$

where

$$B(\tau) = \frac{1}{(1 + \frac{a_1}{\kappa}\bar{t}_r^2(\tau))^\kappa} \quad (0 < \kappa \le 1)$$



力学的時間スケール $\tau = 1/\Lambda_{\mathrm{QG}}\ (\equiv \tau_\Lambda)$ で力学的Wess-Zumino係数Bが消える

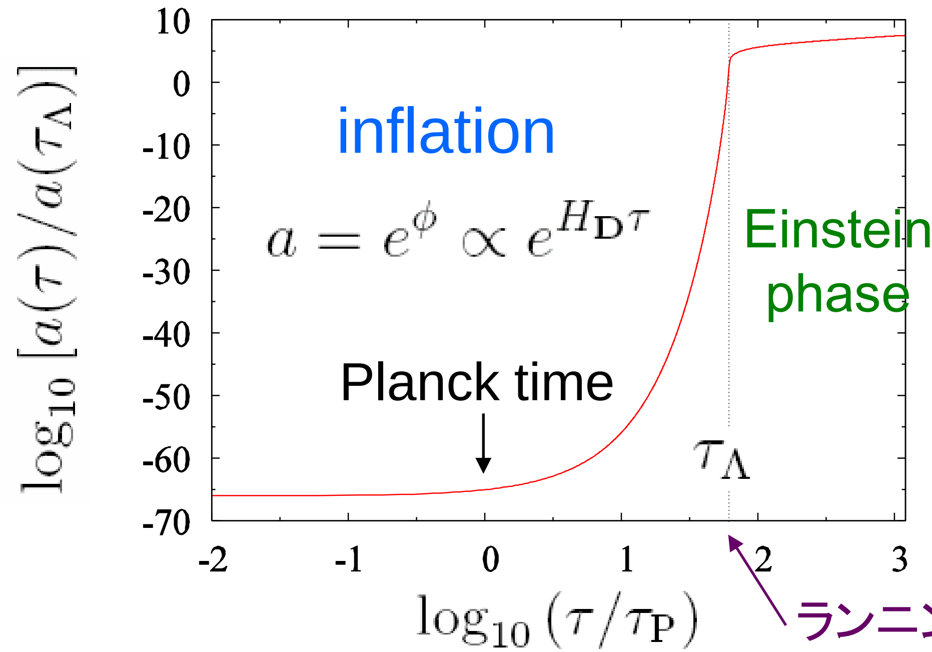
Hubble変数を用いた運動方程式

$$B(\tau)\left(\dddot{H} + 7H\ddot{H} + 4\dot{H}^2 + 18H^2\dot{H} + 6H^4\right) - 3H_{\mathbf{D}}^2\left(\dot{H} + 2H^2\right) = 0$$

Einstein作用

インフレーション解（安定解）

$$H = H_{\mathbf{D}} \quad \rightarrow \quad a(\tau) = e^{\phi(\tau)} \propto e^{H_{\mathbf{D}}\tau}$$



ランニング結合定数が発散する

Hubble変数：

$$H = \dot{a}(\tau)/a(\tau) = \dot{\phi}(\tau)$$

Planck scale

$$H_{\mathbf{D}} = m_{\mathrm{pl}}\sqrt{\pi/b_1}$$

エネルギー保存とビッグバン

$$\underbrace{B(\tau)\left(2H\ddot{H} - \dot{H}^2 + 6H^2\dot{H} + 3H^4\right)}_{B(\tau)\to 0} - 3H_{\mathbf{D}}^2 H^2 + 8\pi^2\rho/b_1 = 0$$

物質密度: ρ

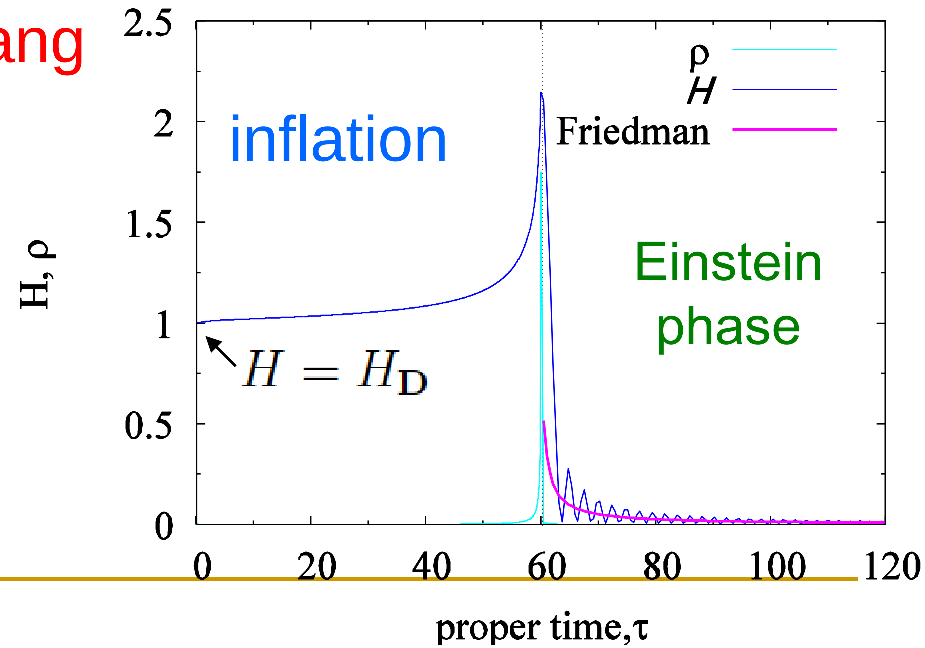
共形モードが自由度をもっている
相転移で物質に転化する➔Big Bang
(インフラトン = 共形モード)

初期物質密度

$$\rho = 0 \ (H = H_{\mathbf{D}})$$

相転移点での物質密度

$$\rho = 3\frac{b_1}{8\pi^2}H_{\mathbf{D}}^2 H^2$$



Einstein相（$E < \Lambda_{\mathrm{QG}}$）

$M_{\mathrm{P}} = 1/\sqrt{8\pi G}$

低エネルギー有効理論 (derivative expansion)

$$I_{\mathrm{low}} = \int d^4x \sqrt{-g}\,\{\underset{\uparrow}{\mathcal{L}_2} + \underset{\nwarrow}{\mathcal{L}_4} + \cdots\}$$

tree + 1-loop　　tree

$$\mathcal{L}_2 = \frac{M_{\mathrm{P}}^2}{2} R + \mathcal{L}_2^{\mathrm{M}}$$

cf. chiral perturbation theory

最低次のEinstein方程式 $M_{\mathrm{P}}^2 R_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{\mathrm{M}}$ を用いて
高階微分項の形を制限すると

$$\mathcal{L}_4 = \frac{\alpha}{(4\pi)^2} R^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$$

1-loop補正: $\alpha(E) = \alpha_0 + \zeta \log(E^2/\Lambda_{\mathrm{QG}}^2), \quad (\zeta > 0)$

現象論的パラメータ α_0 を正とすると高階微分項はirrelevantになる

宇宙発展のシナリオ

$$\xi_\Lambda = 1/\Lambda_{QG} \ (\gg l_{pl})$$

e-foldings数

$$\mathcal{N}_e = \log \frac{a(\tau_\Lambda)}{a(\tau_P)} \simeq \frac{m_{pl}}{\Lambda_{QG}}$$

➔ $\boxed{\Lambda_{QG} \simeq 10^{17} \ \mathrm{GeV}}$

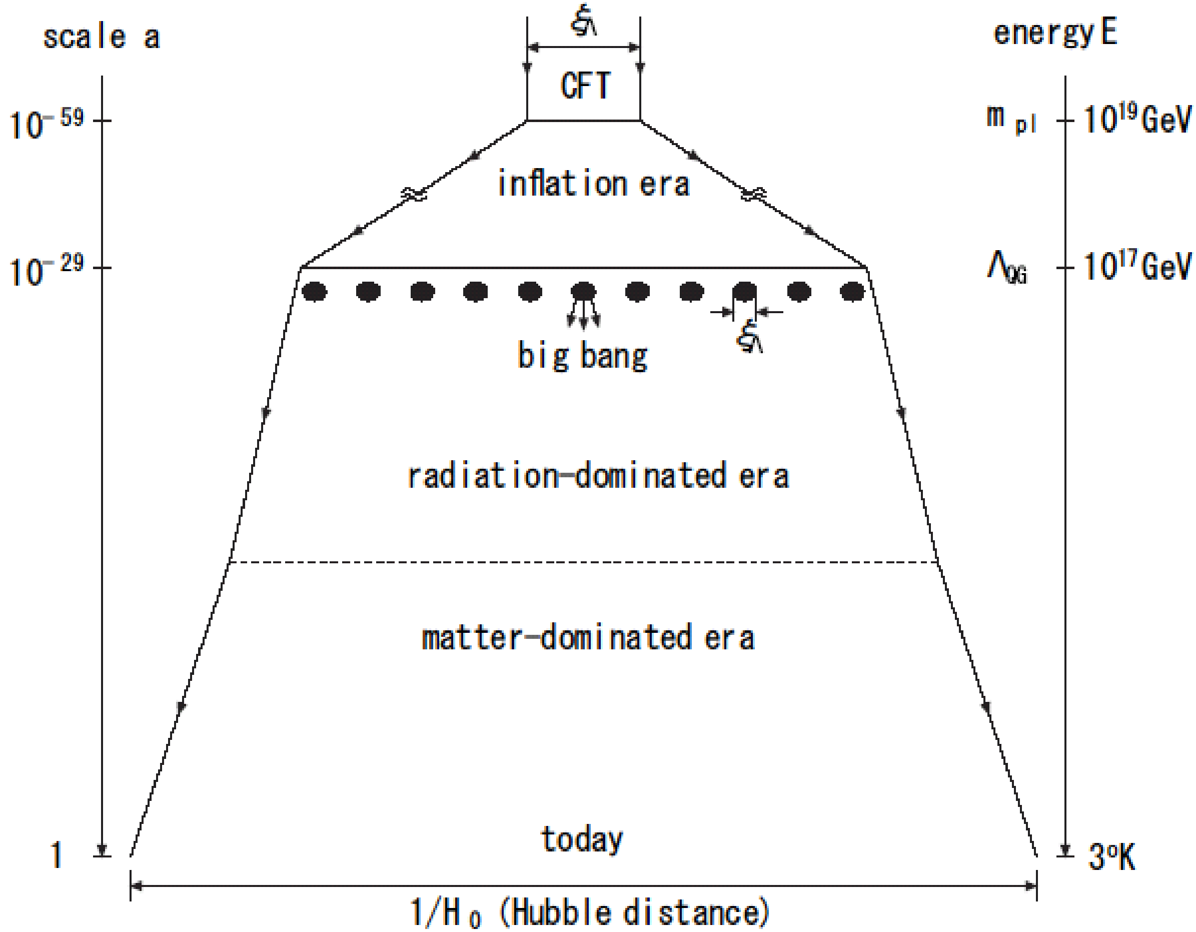
宇宙の膨張率: 10^{59}

インフレーション期間:

10^{30} $(\Leftrightarrow \mathcal{N}_e = 70)$

フリードマン期間: :

10^{29} $(\Leftrightarrow 10^{17}\mathrm{GeV}/2.7\mathrm{K})$



$$\boxed{1/H_0 \simeq 10^{59}\xi_\Lambda}$$

(~4000Mpc)

CMBで観測可能

ゆらぎ（重力ポテンシャル）の発展方程式

$$ds^2 = a^2[-(1+2\Psi)d\eta^2 + (1+2\Phi)d\mathbf{x}^2]$$

Evolution equation for gravitational potentials

Effective action
= Riegert + Weyl + Einstein

$$\begin{aligned}
&B(\tau)\Big\{-2\partial_\eta^4\Phi - 2\partial_\eta\phi\partial_\eta^3\Phi + \left(-8\partial_\eta^2\phi + \frac{10}{3}\not{\partial}^2\right)\partial_\eta^2\Phi \\
&\quad + \left(-12\partial_\eta^3\phi + \frac{10}{3}\partial_\eta\phi\not{\partial}^2\right)\partial_\eta\Phi + \left(\frac{16}{3}\partial_\eta^2\phi - \frac{4}{3}\not{\partial}^2\right)\not{\partial}^2\Phi \\
&\quad + 2\partial_\eta\phi\partial_\eta^3\Psi + \left(8\partial_\eta^2\phi + \frac{2}{3}\not{\partial}^2\right)\partial_\eta^2\Psi + \left(12\partial_\eta^3\phi - \frac{10}{3}\partial_\eta\phi\not{\partial}^2\right)\partial_\eta\Psi \\
&\quad + \left(-\frac{16}{3}\partial_\eta^2\phi - \frac{2}{3}\not{\partial}^2\right)\not{\partial}^2\Psi\Big\} \\
&+ H_{\mathrm{D}}^2 e^{2\phi}\Big\{6\partial_\eta^2\Phi + 18\partial_\eta\phi\partial_\eta\Phi - 4\not{\partial}^2\Phi - 6\partial_\eta\phi\partial_\eta\Psi \\
&\qquad + \left(12\partial_\eta^2\phi + 12\partial_\eta\phi\partial_\eta\phi - 2\not{\partial}^2\right)\Psi\Big\} = 0
\end{aligned}$$

Constraint equation

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{t_r^2(\tau)}\left\{4\partial_\eta^2\Phi - \frac{4}{3}\not{\partial}^2\Phi - 4\partial_\eta^2\Psi + \frac{4}{3}\not{\partial}^2\Psi\right\} \\
&+ B(\tau)\Big\{\frac{4}{3}\partial_\eta^2\Phi + 4\partial_\eta\phi\partial_\eta\Phi + \left(\frac{28}{3}\partial_\eta^2\phi - \frac{8}{3}\partial_\eta\phi\partial_\eta\phi - \frac{8}{9}\not{\partial}^2\right)\Phi \\
&\qquad - \frac{4}{3}\partial_\eta\phi\partial_\eta\Psi + \left(-\frac{4}{3}\partial_\eta^2\phi + \frac{8}{3}\partial_\eta\phi\partial_\eta\phi - \frac{4}{9}\not{\partial}^2\right)\Psi\Big\} \\
&+ H_{\mathrm{D}}^2 e^{2\phi}\{-2\Phi - 2\Psi\} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \text{Initially } \Phi(\tau_i) = \Psi(\tau_i) \\ (t_r = 0) \\ \text{Finally } \Phi(\tau_\Lambda) = -\Psi(\tau_\Lambda) \\ (t_r = \infty) \end{cases}$$

スケール不変な初期スペクトル

初期条件＝スケール不変なCFTスペクトル $\Phi = \Psi = \varphi$

$$\langle \varphi(\tau_i, \mathbf{x}) \varphi(\tau_i, \mathbf{x}') \rangle = -\frac{1}{4b_1} \log\left(m^2 |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2 \right)$$

$$\tau_i = 1/E_i \quad (E_i \geq H_\mathbf{D})$$

$$m = a(\tau_i) H_\mathbf{D}$$

In Fourier space

$$-\log\left(m^2|\mathbf{x}|^2\right) = \int_{k>\epsilon} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{4\pi^2}{k^3} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} - \cancel{\log\left(\frac{m^2}{\epsilon^2 e^{2\gamma-2}}\right)}$$

Delta function in Fourier space

$$P(\tau_i, k) = \frac{k^3}{2\pi^2} \langle |\tilde{\varphi}(\tau_i, \mathbf{k})|^2 \rangle = \frac{1}{2b_1}$$

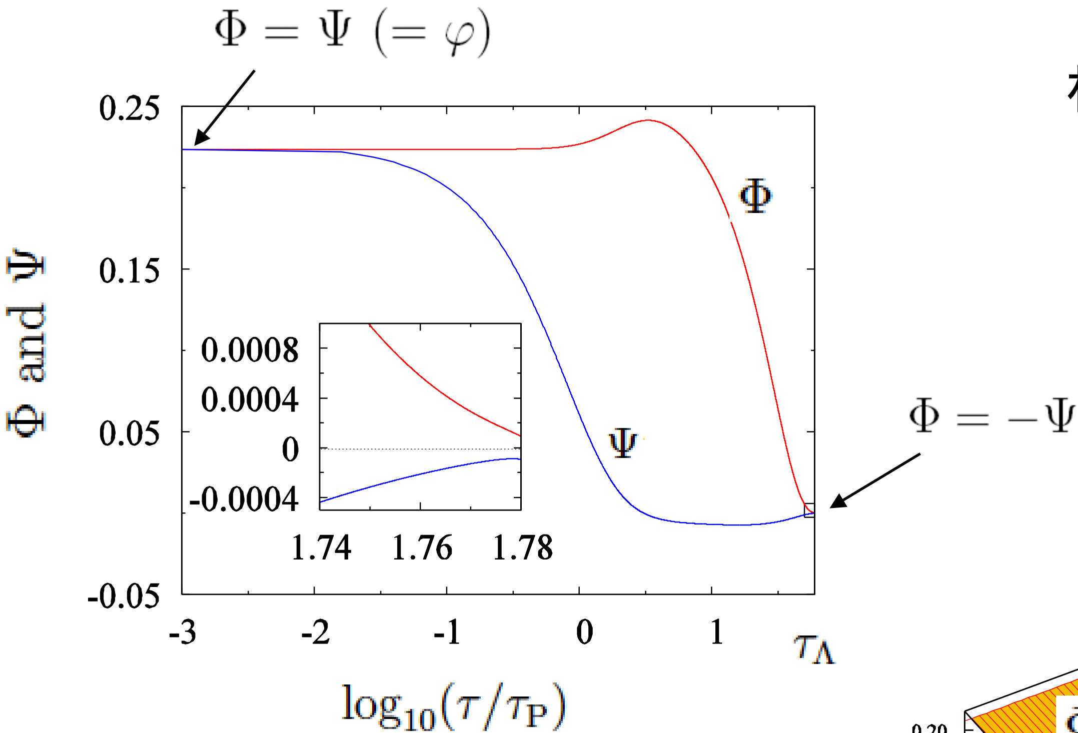
$$b_1 \simeq 10$$

for GUT models

Harrison-Zel'dovich-Peebles spectrum

注：b_1 > 0 ⇔ 物理的（unitarity）

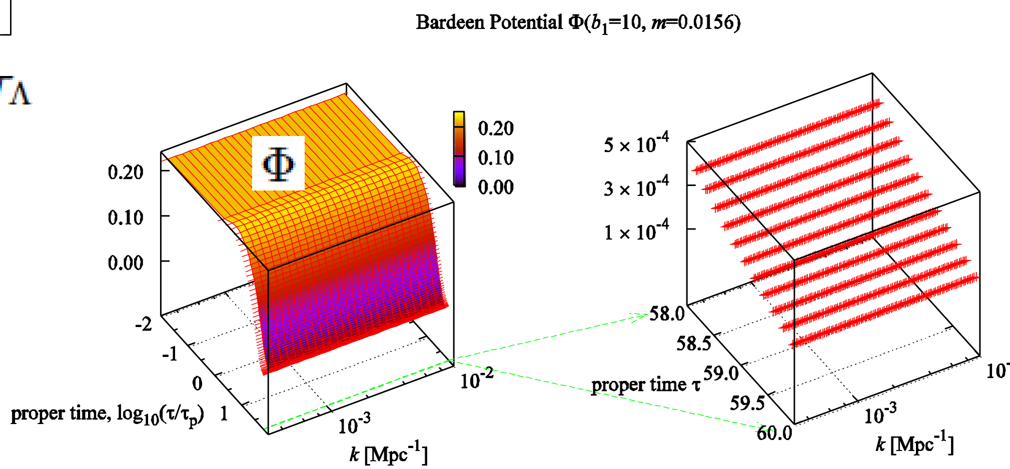
重力ポテンシャルの時間発展（線形近似）



相転移点での揺らぎの大きさ
のおおよその目安

$$\frac{\delta R}{R} \sim \frac{\Lambda_{\mathrm{QG}}^2}{12 H_{\mathrm{D}}^2} \sim 10^{-5}$$

振幅が小さくなる（＝安定）



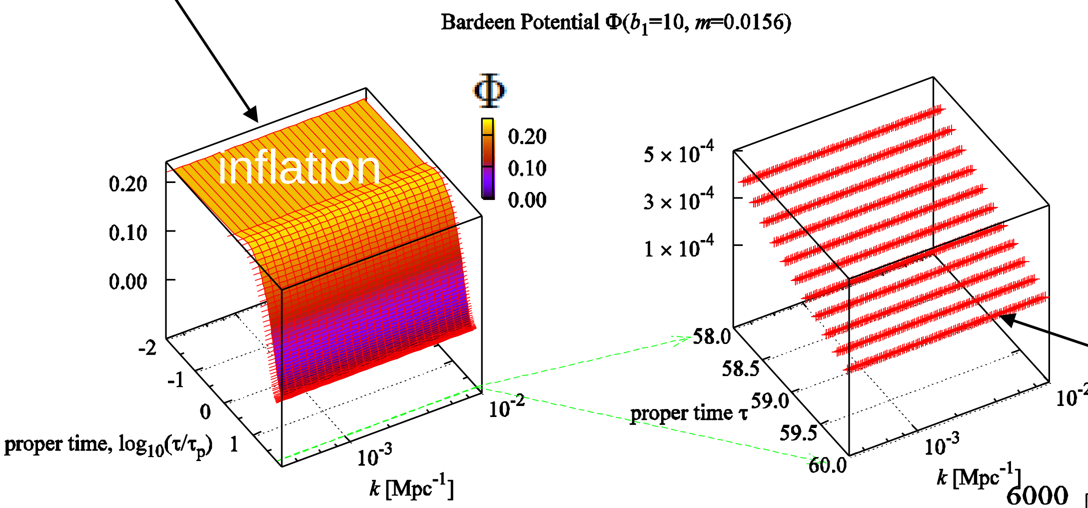
ゆらぎの時間発展 (From CFT to CMB)

スケール不変なスペクトル（対数相関）

Planck長さからHubble距離まで

$$10^{59} = 10^{30} + 10^{29}$$

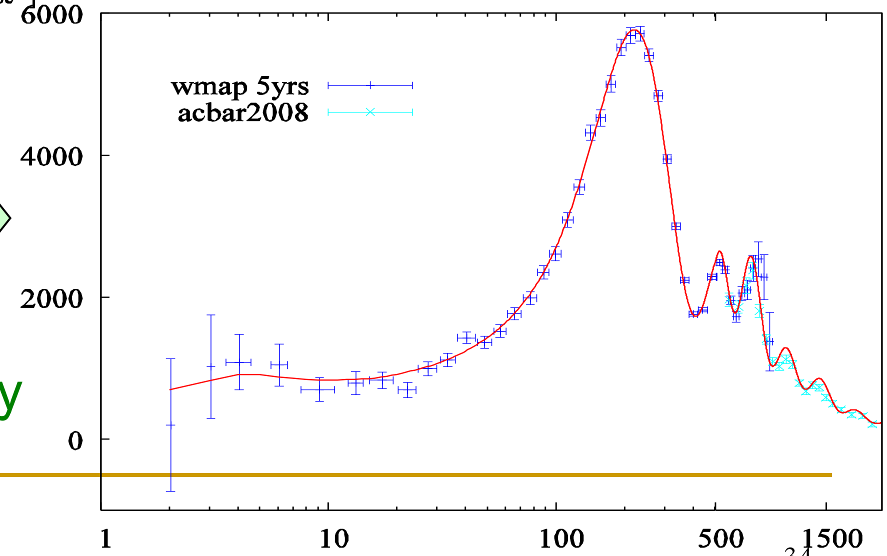
inflation　　Friedmann



相転移点でのスペクトル

振幅が小さくなる

$$\frac{\delta R}{R} \sim \frac{\Lambda_{\rm QG}^2}{12H_{\rm D}^2} \sim 10^{-5}$$



Cosmological perturbation theory
を使ってCMBスペクトルを計算

相関距離の効果

$m = a(\tau_i) H_{\rm D}$

相関距離 $\xi_\Lambda = 1/\Lambda_{\rm QG}\ (\gg l_{\rm pl})$ $\Lambda_{\rm QG} \simeq 10^{17}\ {\rm GeV}$

➔インフレーション以前に ξ_Λ より大きなゆらぎは存在しない
➔共動座標でみて、現在も存在しない

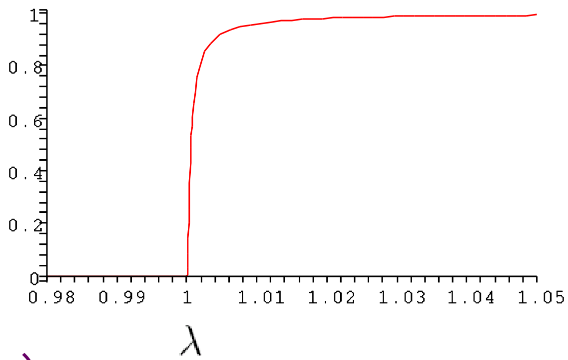
$$1/\lambda \simeq 4000\ {\rm Mpc} \qquad \lambda = a(\tau_i)\Lambda_{\rm QG} \quad a(\tau_i) \simeq 10^{-59}$$

この値はインフレーションのシナリオと矛盾しない

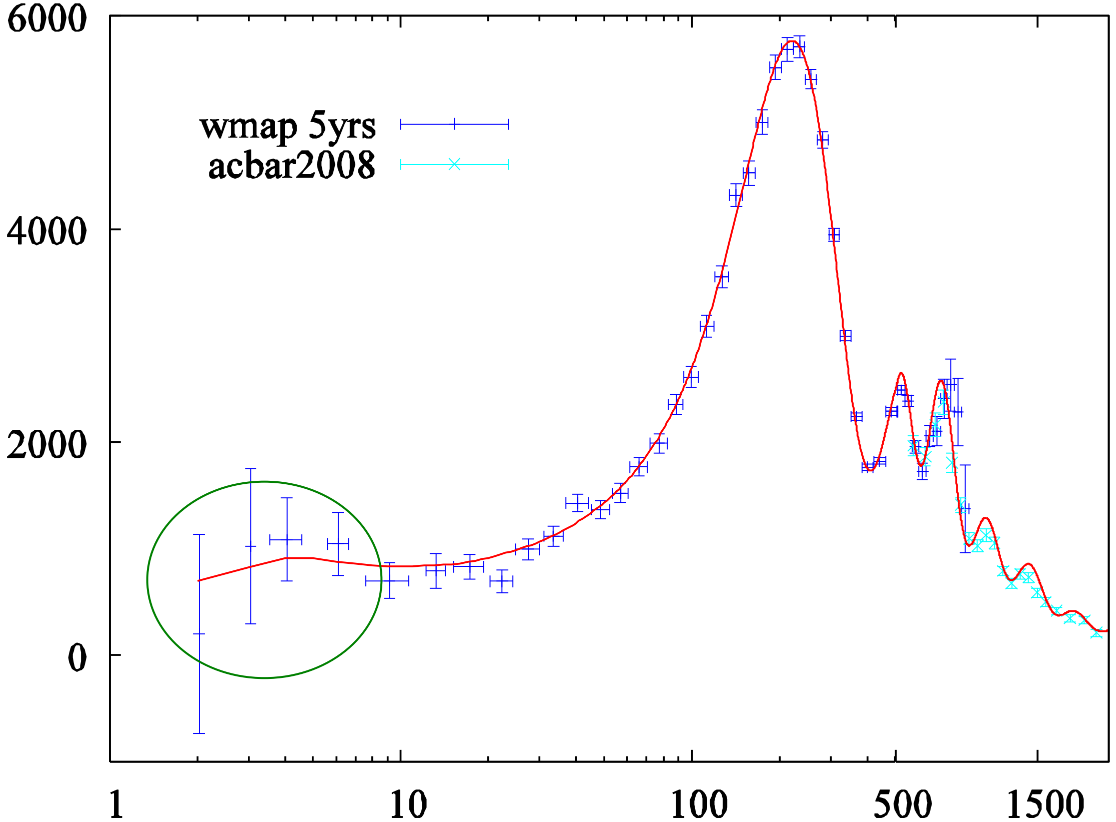
この効果をrunning couplingを用いて表す

$$P_s(k) = A_s \left(\frac{k}{m}\right)^{n_s - 1 + v/\log(k^2/\lambda^2)}, \quad n_s = 1$$

スケール不変（Harrison-Zel'dovichスペクトル）



TT power spectrum



$$\lambda = 0.00026\ \mathrm{Mpc}^{-1}$$

$$r = 0.06$$

$$\tau_e = 0.08$$

$$\Omega_c = 0.20,\ \ \Omega_b = 0.043,\ \ \Omega_{\rm vac} = 0.757,\ \ H_0 = 73$$

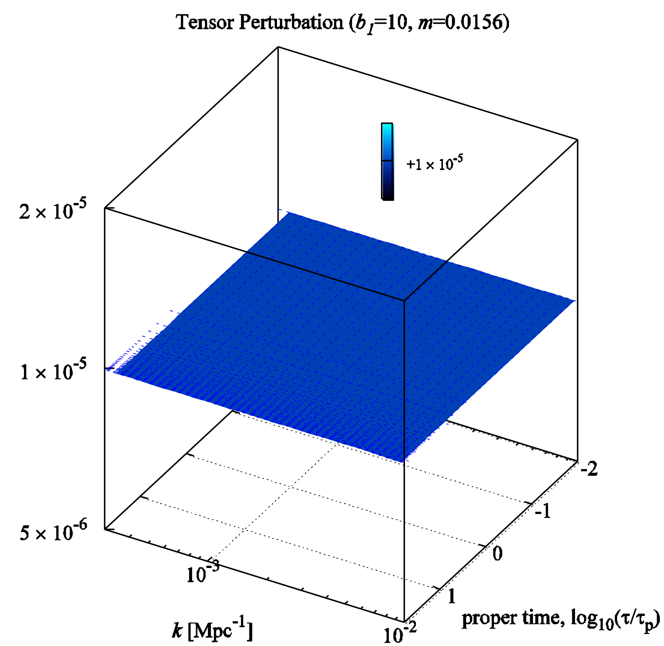
$$[\chi^2/\mathrm{dof} = 1.10\ (2 \leq l \leq 1000)]$$

テンソルゆらぎ

$$
\begin{aligned}
&-\frac{2}{t_\tau^2(\tau)}\left\{\partial_\eta^4 h_{ij}^{\mathrm{TT}} - 2\not\partial^2\partial_\eta^2 h_{ij}^{\mathrm{TT}} + \not\partial^4 h_{ij}^{\mathrm{TT}}\right\} \\
&+\frac{b_1}{8\pi^2}B(\tau)\left\{\left(\frac{1}{3}\partial_\eta^2\phi + \frac{4}{3}\partial_\eta\phi\partial_\eta\phi\right)\partial_\eta^2 h_{ij}^{\mathrm{TT}} + \left(\frac{1}{3}\partial_\eta^3\phi + \frac{8}{3}\partial_\eta^2\phi\partial_\eta\phi\right)\partial_\eta h_{ij}^{\mathrm{TT}}\right. \\
&\qquad\qquad \left. + \left(-\frac{7}{3}\partial_\eta^2\phi + \frac{2}{3}\partial_\eta\phi\partial_\eta\phi\right)\not\partial^2 h_{ij}^{\mathrm{TT}}\right\} \\
&+\frac{b_1}{8\pi^2}H_{\mathrm{D}}^2 e^{2\phi}\left\{-\frac{1}{2}\partial_\eta^2 h_{ij}^{\mathrm{TT}} - \partial_\eta\phi\partial_\eta h_{ij}^{\mathrm{TT}} + \frac{1}{2}\not\partial^2 h_{ij}^{\mathrm{TT}}\right\} = 0
\end{aligned}
$$

Initial CFT spectrum

$$
P_t(k) = A_t\left(\frac{k}{m}\right)^{n_t + v/\log(k^2/\lambda^2)}, \quad n_t = 0
$$



漸近自由性のためテンソルゆらぎの初期値は小さいけれども、その値がインフレーションの期間保たれるので、相転移点では無視できない➔ $r = P_t/P_s$

第四章
まとめ

- CFTからの摂動展開として繰り込み可能な4次元量子重力理論を構成した
- 共形モードを非摂動的に量子化することで共形不変性がゲージ不変性の一部として実現することを示した
- 漸近自由性の帰結として宇宙初期では共形モードのゆらぎがテンソルモードのそれより優勢になることを示した

量子重力的宇宙論のまとめ

- 余分なスカラー場を導入せずに、重力場のダイナミクスだけでインフレーションモデルを構成した
  - 新しい力学的スケール $\Lambda_{\rm QG} \simeq 10^{17}\ {\rm GeV}$ ➔ 時空相転移
  - e-foldings数 ➔ $\mathcal{N}_e \simeq M_{\rm P}/\Lambda_{\rm QG}$
  - 宇宙の初期条件 ➔ CFTスペクトル（スケール不変）
  - 相転移点での振幅の大きさ ➔ $\delta R/R \simeq (\Lambda_{\rm QG}/M_{\rm P})^2$
- CMBスペクトルの大角度成分の鋭い落ち込みを力学的スケールを用いて説明した

今後の課題

- 重力的インスタントン

  self-dual Weyl解 $C_{\mu\nu\lambda\sigma} = \tilde{C}_{\mu\nu\lambda\sigma}$

- 重力的ソリトン解

  安定な解なら ➔ ダークマターの候補

- ブラックホールのダイナミクス
- 超対称化

付録
量子化と共形代数

WZ作用とEuler密度の関係について

2次元量子重力		4次元量子重力
R	Euler密度	修正項 $E_4 = G_4 - \frac{2}{3}\nabla^2 R$
$\sqrt{-g}R = \sqrt{-\bar{g}}\left(2\bar{\Delta}_2\phi + \bar{R}\right)$	関係式	$\sqrt{-g}E_4 = \sqrt{-\bar{g}}\left(4\bar{\Delta}_4\phi + \bar{E}_4\right)$
$\Delta_2 = -\nabla^2$	共形不変な微分演算子	$\Delta_4 = \nabla^4 + 2R^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu - \frac{2}{3}R\nabla^2 + \frac{1}{3}\nabla^\mu R\nabla_\mu$
$-\frac{b_L}{4\pi}\int d^2x \int_0^\phi d\phi\sqrt{-g}R = -\frac{b_L}{4\pi}\int d^2x\sqrt{-\bar{g}}\left(\phi\bar{\Delta}_2\phi + \bar{R}\phi\right)$	WZ作用	$-\frac{b_1}{(4\pi)^2}\int d^4x \int_0^\phi d\phi\sqrt{-g}E_4 = -\frac{b_1}{(4\pi)^2}\int d^4x\sqrt{-\bar{g}}\left(2\phi\bar{\Delta}_4\phi + \bar{E}_4\phi\right)$
Liouville作用		Riegert作用 （最低次で現れるWZ作用）

Wess-Zumino積分可能条件

bare action
(conf. anomaly)

Conformal variation of effective action

(=path integral by conf. mode)

$$\delta_\omega \Gamma = \int d^4x \sqrt{-g}\,\omega \left\{ \eta_1 R^2_{\mu\nu\lambda\sigma} + \eta_2 R^2_{\mu\nu} + \eta_3 R^2 + \eta_4 \nabla^2 R + m_1 R + m_2 \right\}$$

Integrability condition

$$[\delta_{\omega_1}, \delta_{\omega_2}]\Gamma = 8(\eta_1 + \eta_2 + 3\eta_3) \times \int d^4x \sqrt{-g} R \omega_{[1} \nabla^2 \omega_{2]} = 0$$

➔ Weyl action and Euler combination (no R^2)

$$\begin{cases} C^2_{\mu\nu\lambda\sigma} = R^2_{\mu\nu\lambda\sigma} - 2R^2_{\mu\nu} + \dfrac{1}{3} R^2 \\ G_4 = R^2_{\mu\nu\lambda\sigma} - 4R^2_{\mu\nu} + R^2 \end{cases}$$

Riegert作用の正準量子化

新しい変数 $\chi = \partial_\eta \phi$

Lagrange multiplier

$$\Rightarrow \quad S_{\mathrm{RWZ}} = \int d^4x \left\{ -\frac{b_1}{8\pi^2}\left[(\partial_\eta \chi)^2 + 2\chi \partial\!\!\!/^2 \chi + \left(\partial\!\!\!/^2 \phi \right)^2 \right] + v\left(\partial_\eta \phi - \chi \right) \right\}$$

共役運動量 $\mathrm{P}_\chi = -\frac{b_1}{4\pi^2}\partial_\eta \chi \qquad \mathrm{P}_\phi = -\partial_\eta \mathrm{P}_\chi - \frac{b_1}{2\pi^2}\partial\!\!\!/^2 \chi$

正準交換関係
（Dirac量子化）

$$[\phi(\eta,\mathbf{x}), \mathrm{P}_\phi(\eta,\mathbf{x}')] = [\chi(\eta,\mathbf{x}), \mathrm{P}_\chi(\eta,\mathbf{x}')] = i\delta_3(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$$

$$\phi_<(x) = \frac{\pi}{\sqrt{b_1}} \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\omega^{3/2}} \left\{ a(\mathbf{k}) + i\omega\eta b(\mathbf{k}) \right\} e^{ik_\mu x^\mu} \qquad \phi = \phi_< + \phi_<^\dagger$$

$$\begin{aligned} \left[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')\right] &= \delta_3(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \\ \left[a(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{k}')\right] &= \left[b(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')\right] = \delta_3(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \\ \left[b(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{k}')\right] &= 0 \end{aligned}$$

共形変換の生成子($Q_\zeta = \int d^3\mathrm{x}\,\zeta^\lambda T_{\lambda 0}$)

並進
$$P_0 = H = \int d^3\mathrm{x}\,\mathcal{A}, \quad P_j = \int d^3\mathrm{x}\,\mathcal{B}_j,$$

Lorentz変換
$$M_{0j} = \int d^3\mathrm{x}\left\{-\eta\mathcal{B}_j - x_j\mathcal{A} - :\mathrm{P}_\chi\partial_j\phi:\right\}, \quad M_{ij} = \int d^3\mathrm{x}\left\{x_i\mathcal{B}_j - x_j\mathcal{B}_i\right\},$$

Dilatation
$$D = \int d^3\mathrm{x}\left\{\eta\mathcal{A} + x^k\mathcal{B}_k + :\mathrm{P}_\chi\chi: + \mathrm{P}_\phi\right\},$$

特殊共形変換
$$K_0 = \int d^3\mathrm{x}\Big\{\left(\eta^2 + \mathrm{x}^2\right)\mathcal{A} + 2\eta x^k\mathcal{B}_k + 2\eta :\mathrm{P}_\chi\chi: + 2x^k :\mathrm{P}_\chi\partial_k\phi: - \frac{b_1}{4\pi^2}\left(2:\chi^2: + :\partial_k\phi\partial^k\phi:\right) + 2\eta\mathrm{P}_\phi + 2\mathrm{P}_\chi\Big\},$$
$$K_j = \int d^3\mathrm{x}\Big\{\left(-\eta^2 + \mathrm{x}^2\right)\mathcal{B}_j - 2x_j x^k\mathcal{B}_k - 2\eta x_j\mathcal{A} - 2x_j :\mathrm{P}_\chi\chi: - 2\eta :\mathrm{P}_\chi\partial_j\phi: - \frac{b_1}{2\pi^2} :\chi\partial_j\phi: - 2x_j\mathrm{P}_\phi\Big\},$$

where
$$\mathcal{A} = -\frac{2\pi^2}{b_1} :\mathrm{P}_\chi^2: + :\mathrm{P}_\phi\chi: + \frac{b_1}{8\pi^2}\left(2:\chi\partial\!\!\!/^2\chi: + :\partial\!\!\!/^2\phi\,\partial\!\!\!/^2\phi:\right),$$
$$\mathcal{B}_j = :\mathrm{P}_\chi\partial_j\chi: + :\mathrm{P}_\phi\partial_j\phi: .$$

共形代数

$$
\begin{aligned}
[P_\mu, P_\nu] &= 0 \qquad [M_{\mu\nu}, P_\lambda] = -i\left(\eta_{\mu\lambda}P_\nu - \eta_{\nu\lambda}P_\mu\right) \\
[M_{\mu\nu}, M_{\lambda\sigma}] &= -i\left(\eta_{\mu\lambda}M_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\lambda} - \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\lambda} - \eta_{\nu\lambda}M_{\mu\sigma}\right) \\
[D, P_\mu] &= -iP_\mu \quad [D, M_{\mu\nu}] = 0 \quad [D, K_\mu] = iK_\mu \\
[M_{\mu\nu}, K_\lambda] &= -i\left(\eta_{\mu\lambda}K_\nu - \eta_{\nu\lambda}K_\mu\right) \quad [K_\mu, K_\nu] = 0 \\
[K_\mu, P_\nu] &= 2i\left(\eta_{\mu\nu}D + M_{\mu\nu}\right)
\end{aligned}
$$

共形場の最も簡単な例

$$
V_\alpha(x) =: e^{\alpha\phi(x)} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} :\phi^n(x):
$$

$$
\begin{aligned}
i\,[P_\mu, V_\alpha(x)] &= \partial_\mu V_\alpha(x) \\
i\,[M_{\mu\nu}, V_\alpha(x)] &= \left(x_\mu\partial_\nu - x_\nu\partial_\mu\right)V_\alpha(x) \\
i\,[D, V_\alpha(x)] &= \left(x^\mu\partial_\mu + h_\alpha\right)V_\alpha(x) \\
i\,[K_\mu, V_\alpha(x)] &= \left(x^2\partial_\mu - 2x_\mu x^\nu\partial_\nu - 2x_\mu h_\alpha\right)V_\alpha(x)
\end{aligned}
$$

共形次元

$$
h_\alpha = \alpha - \frac{\alpha^2}{4b_1}
$$

BRST演算子

15ゲージ自由度
(conf. Killing vectors)

$$\zeta^\lambda \quad \Rightarrow \quad c^\lambda = \mathrm{c}_-^\lambda + 2x_\mu \mathrm{c}^{\mu\lambda} + x^\lambda \mathrm{c} + x^2 \mathrm{c}_+^\lambda - 2x^\lambda x_\mu \mathrm{c}_+^\mu$$

$$\begin{aligned} \{\mathrm{c}, \mathrm{b}\} &= 1 \\ \left\{\mathrm{c}^{\mu\nu}, \mathrm{b}^{\lambda\sigma}\right\} &= \eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}\eta^{\nu\lambda} \\ \left\{\mathrm{c}_-^\mu, \mathrm{b}_+^\nu\right\} &= \left\{\mathrm{c}_+^\mu, \mathrm{b}_-^\nu\right\} = \eta^{\mu\nu} \end{aligned}$$

c: gauge ghosts

b: anti-ghosts

共形変換の生成子

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{gh}}^\mu &= i\left(-2\mathrm{b}\mathrm{c}_+^\mu + \mathrm{b}_+^\mu \mathrm{c} + \mathrm{b}^\mu{}_\lambda \mathrm{c}_+^\lambda + 2\mathrm{b}_+^\lambda \mathrm{c}^\mu{}_\lambda\right) \\ M_{\mathrm{gh}}^{\mu\nu} &= i\left(\mathrm{b}_+^\mu \mathrm{c}_-^\nu - \mathrm{b}_+^\nu \mathrm{c}_-^\mu + \mathrm{b}_-^\mu \mathrm{c}_+^\nu - \mathrm{b}_-^\nu \mathrm{c}_+^\mu + \mathrm{b}^{\mu\lambda} \mathrm{c}^\nu{}_\lambda - \mathrm{b}^{\nu\lambda} \mathrm{c}^\mu{}_\lambda\right) \\ D_{\mathrm{gh}} &= i\left(\mathrm{b}_-^\lambda \mathrm{c}_{+\lambda} - \mathrm{b}_+^\lambda \mathrm{c}_{-\lambda}\right) \\ K_{\mathrm{gh}}^\mu &= i\left(2\mathrm{b}\mathrm{c}_-^\mu - \mathrm{b}_-^\mu \mathrm{c} + \mathrm{b}^\mu{}_\lambda \mathrm{c}_-^\lambda + 2\mathrm{b}_-^\lambda \mathrm{c}^\mu{}_\lambda\right) \end{aligned}$$

BRST演算子

$$Q_{\mathrm{BRST}} = \mathrm{c}_-^\mu \left(P_\mu + \frac{1}{2}P_\mu^{\mathrm{gh}}\right) + \mathrm{c}^{\mu\nu}\left(M_{\mu\nu} + \frac{1}{2}M_{\mu\nu}^{\mathrm{gh}}\right) + \mathrm{c}\left(D + \frac{1}{2}D^{\mathrm{gh}}\right)$$

Wess-Zumino条件と背景時空独立性

Riegert作用の積分表示

$$S_{\mathrm{RWZ}}(\phi,\hat{g}) = -\frac{b_1}{(4\pi)^2}\int d^4x \int_0^{\phi} d\phi \sqrt{-g}E_4 \qquad E_4 = G_4 - 2\nabla^2 R/3$$

Wess-Zumino積分可能条件（積分領域の分解の仕方より）

$$S_{\mathrm{RWZ}}(\phi,\hat{g}) = S_{\mathrm{RWZ}}(\omega,\hat{g}) + S_{\mathrm{RWZ}}(\phi-\omega, e^{2\omega}\hat{g})$$

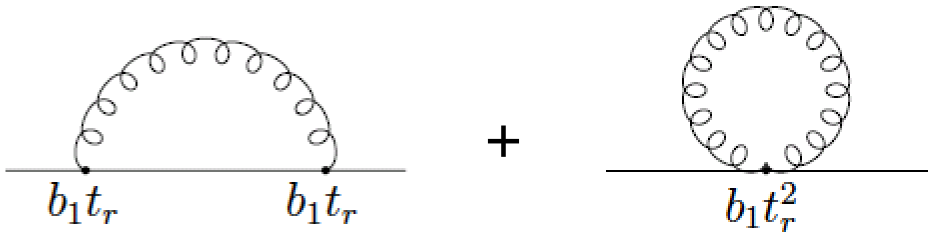
背景時空独立性の証明

$$\begin{aligned}
Z|_{e^{2\omega}\hat{g}} &= \int [d\phi dh]_{e^{2\omega}\hat{g}} \exp\left\{ iS_{\mathrm{RWZ}}(\phi, e^{2\omega}\hat{g}) + iI(e^{2\omega}g)\right\} \\
&= \int [d\phi dh]_{\hat{g}} \exp\left\{ iS_{\mathrm{RWZ}}(\omega,\hat{g}) + iS_{\mathrm{RWZ}}(\phi, e^{2\omega}\hat{g}) + iI(e^{2\omega}g)\right\} \\
&= \int [d\phi dh]_{\hat{g}} \exp\Big\{ \underbrace{iS_{\mathrm{RWZ}}(\omega,\hat{g}) + iS_{\mathrm{RWZ}}(\phi-\omega, e^{2\omega}\hat{g})}_{\text{Wess-Zumino条件を使用}} + iI(g)\Big\} \\
&= Z|_{\hat{g}}
\end{aligned}$$

Wess-Zumino条件を使用

付録
くりこみ計算

共形モードの非くり込み定理($Z_\phi = 1$)



= UV finite

$$\frac{2b_1}{(4\pi)^2}k^4\left[-3\frac{t_r^2}{(4\pi)^2}\left(\frac{1}{\bar{\epsilon}}-\log\frac{z^2}{\mu^2}+\frac{7}{6}\right)\right]$$

$$\frac{2b_1}{(4\pi)^2}k^4\left[3\frac{t_r^2}{(4\pi)^2}\left(\frac{1}{\bar{\epsilon}}-\log\frac{z^2}{\mu^2}+\frac{7}{12}\right)\right]$$

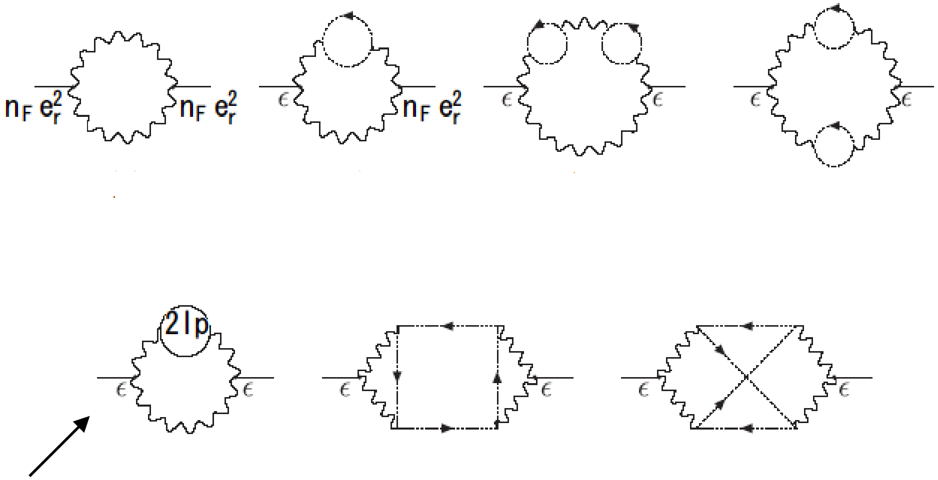
z: small fictitious mass (IR regularization)
ゲージ不変ではない ➔ cancel out !

$$D = 4 - 2\epsilon$$

$$1/\bar{\epsilon} = 1/\epsilon - \gamma + \log 4\pi$$

propagator $1/k^4 \to 1/(k^2+z^2)^2$

Two-point function of e^4

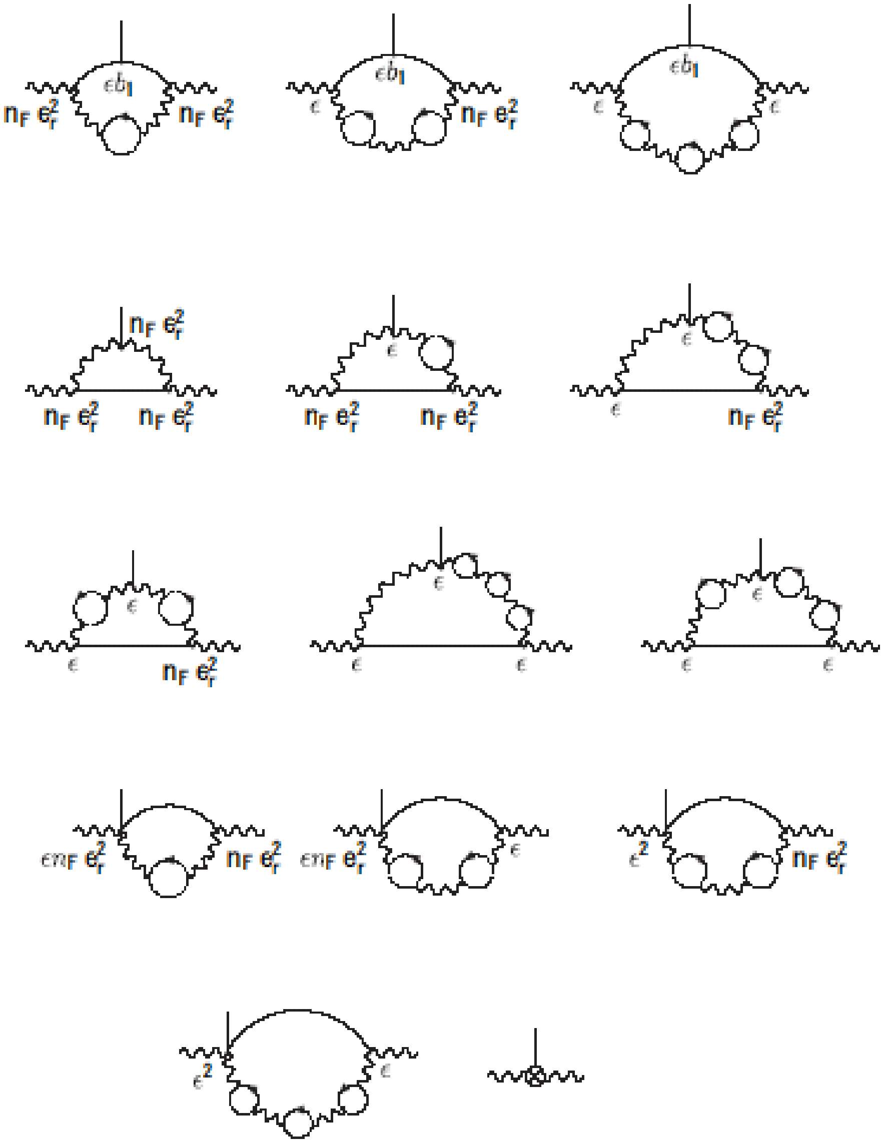


$\epsilon = (4 - D)/2$

And also, two-point function of e^6

発散を $Z_\phi = 1$ で取り除くことができる

Vertex function ($\phi F_{\mu\nu}^2$) of e^6



Hathrellの共形異常の計算の再現

Hathrell, Ann.Phys.142(1982)34;
Ann.Phys.139(1982)136

Hathrellが用いたcounterterm

$$aC^2_{\mu\nu\lambda\sigma} + bG_4 + cH^2 \qquad H = R/(D-1)$$

$1/t^2$

曲がった時空上で3-loopの計算を実行し、bとcの
展開係数（留数）の間に次の関係が成り立つことを示した：

$$\boxed{b_2 = 2c_1}$$

（＊物質の種類によらない）

D次元量子重力作用

$$G_D = G_4 + \frac{(D-3)^2(D-4)}{(D-1)^2(D-2)}R^2 \Leftrightarrow c = \frac{(D-3)^2(D-4)}{(D-2)}b$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = \frac{(D-3)^2}{D-2}b_2 = \frac{1}{2}b_2 + o(D-4)$$

付録　その他

非ガウス性と相転移点でのスペクトル

Non-Gaussianity in initial CFT spectrum

$$\delta_R = \frac{\delta R}{12m^2} = \frac{1}{2m^2} e^{2\varphi} \left(-\partial_i \partial^i \varphi - \partial_i \varphi \partial^i \varphi \right)$$

In Fourier space $\quad \tilde{\delta}_R(k) = \frac{k^2}{2m^2} \tilde{\varphi}_{\mathrm{NL}}(k)$

$$\tilde{\varphi}_{\mathrm{NL}}(k) = \tilde{\varphi}(k) + \int \frac{d^3\mathbf{q}}{(2\pi)^3} \tilde{\varphi}\left(\mathbf{k}/2 - \mathbf{q}\right) \tilde{\varphi}\left(\mathbf{q} + \mathbf{k}/2\right) \left(\frac{3}{4} + \frac{q^2}{k^2} \right) + o(\tilde{\varphi}^3)$$

➔ non-Gaussianity parameter is $f_{\mathrm{NL}} \simeq 1$

これは、diffeomorphism inv.からの帰結なので、
このオーダーが宇宙進化の過程で保たれる
➔相転移点では非がウス性の効果は無視できる

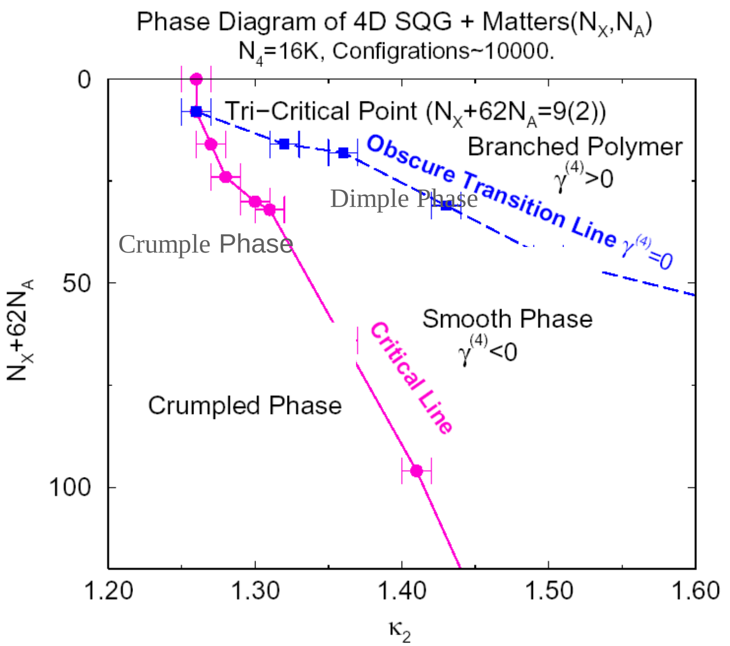
格子重力(DT法)との関係

String susceptibility $Z \sim N_4^{\gamma_{\rm st}^{(4)}-3}\exp(\mu_c N_4)$

一方、連続理論からの予言は

$$\gamma_{\rm st}^{(4)} = 2 - \frac{1}{2}\left(b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_1}\right) \qquad b_1 = \frac{1}{360}\left(N_{\rm X} + 62N_{\rm A}\right) + \frac{769}{180} - a_1 t_r^2$$

(=0. 0028) (=4. 27)



Horata, Egawa, Yukawa (2002)