

Towards unified cosmic history in $F(R)$ gravity

野尻伸一

名古屋大学理学研究科素粒子宇宙物理学専攻

名古屋大学素粒子宇宙起源機構

(Kobayashi-Maskawa Institute

for the Origin of Particles and the Universe, KMI)

要旨

宇宙の精密観測の飛躍的發展により、宇宙の歴史の中で二つの加速膨張の時期、すなわち、宇宙初期のインフレーションおよび約 50 億年前から始まった現在の宇宙の加速膨張の存在が明らかになった。現在の加速膨張は宇宙に満ちる未知のエネルギーである暗黒エネルギーの存在を示唆している。現在の素粒子理論や重力理論では、このインフレーションや暗黒エネルギーを説明することができず、今世紀の物理学における大きな問題となっている。

この問題の解決を目指し、アインシュタインの重力理論を拡張した多種多様なモデルが提案され、多様なアイデアが展開されている。今回は、これらのモデルの中で $F(R)$ 重力と呼ばれるものを中心に紹介する。宇宙初期のインフレーションも現在の加速膨張も、ともに宇宙の加速膨張であるが、宇宙初期のインフレーションは時空の曲率が大きい時に起こり、現在の宇宙の加速膨張は曲率が小さい時に起こっている。この二つの加速膨張を統一的に説明するようなモデルの構築を目指す。

今回の講演は主に次の文献に基づいて行う：

S.N. and S. D. Odintsov,

“Unified cosmic history in modified gravity: from $F(R)$ theory to Lorentz non-invariant models,”

Physics Reports 505 (2011) 59-144 [arXiv:1011.0544 [gr-qc]]

Contents

1	準備	4
2	暗黒エネルギー	6
3	微調整問題、一致問題	10
4	$F(R)$ 重力の一般的性質	16
5	現実的な $F(R)$ 重力模型	30
6	$F(R)$ 重力模型の再構築	40
7	Summary	53

1 準備

銀河団よりもはるかに大きなスケール：宇宙が一様等方

⇒ **Friedmann-Robertson-Walker (FRW) 宇宙の計量 (metric)** :

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a(t)^2 \sum_{i, j=1}^3 \tilde{g}_{ij} dx^i dx^j .$$

$a(t)$: スケール因子 (scale factor)、 \tilde{g}_{ij} : 空間部分の計量

$\tilde{R}_{ij} = 2K\tilde{g}_{ij}$ (\tilde{R}_{ij} は \tilde{g}_{ij} から得られる Ricci 曲率)

$K = 1$: 単位球面、 $K = -1$: 単位双曲面、 $K = 0$: 平面

$da(t)/dt > 0$: 宇宙が膨張、 $d^2a(t)/dt^2 > 0$: (膨張が) 加速。

宇宙を満たす物質が完全流体であると仮定。

アインシュタイン方程式の (tt) 成分：第一 **FRW** 方程式：

$$0 = -\frac{3}{\kappa^2}H^2 - \frac{3K}{\kappa^2 a^2} + \rho,$$

(ij) 成分：第二 **FRW** 方程式：

$$0 = \frac{1}{\kappa^2} \left(2 \frac{dH}{dt} + 3H^2 \right) + \frac{K}{\kappa^2 a^2} + p,$$

ρ : エネルギー密度、 p : 圧力。

$H \equiv da(t)/dt$: ハッブル率 (**Hubble rate**)

(現在の宇宙の H の値がハッブル定数)

2 暗黒エネルギー

現在の宇宙背景輻射 (CMB) の観測 $\Rightarrow K \sim 0$

$$\rho \sim \rho_c \equiv \frac{3}{\kappa^2} H_0^2 \sim (10^{-3} \text{ eV})^4 \sim 10^{-29} \text{ g/cm}^3 .$$

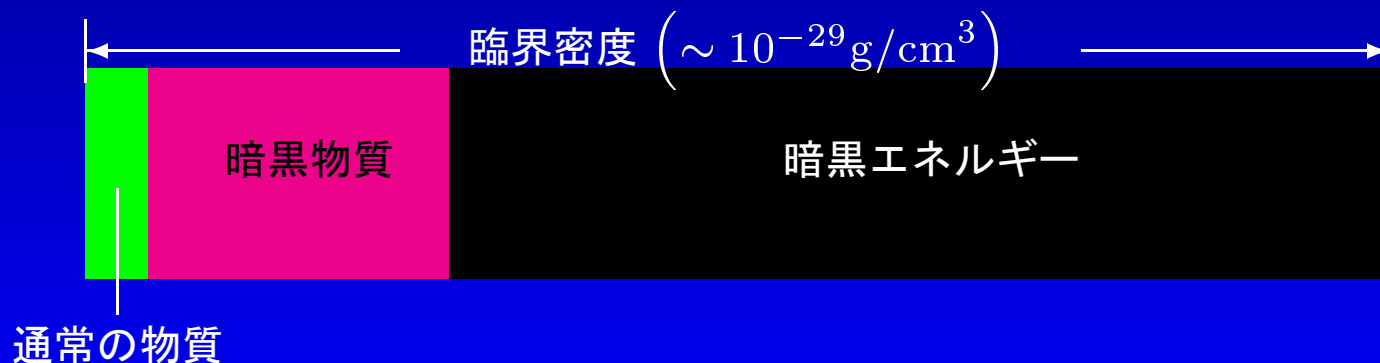
ρ_c : 臨界密度、 H_0 : 現在の H の値 :

$$H_0 \sim 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \sim 10^{-33} \text{ eV} .$$

宇宙が平坦 \Rightarrow 宇宙の密度が臨界密度程度。

通常物質は臨界密度の 4% 程度、暗黒物質も 23% 程度。

残り 70% が何か未知のもの : 暗黒エネルギー。



Ia 型超新星の観測 \Rightarrow およそ 50 億年前から宇宙の膨張が加速。

第一、第二 FRW 方程式 \Rightarrow

$$\frac{1}{a} \frac{d^2 a(t)}{dt^2} = \frac{dH}{dt} + H^2 = -\frac{\kappa^2}{6} (\rho + 3p) .$$

加速膨張 $\Rightarrow p < -\rho/3$

暗黒エネルギー：負の圧力

状態方程式 (equation of state) パラメータ

$$w \equiv \frac{p}{\rho} ,$$

暗黒エネルギー： $w \sim -1$ 。

輻射： $w = 1/3$

通常の物質や（冷たい）暗黒物質： $w \sim 0$ （ダスト）

宇宙定数： $w = -1$ 。

状態方程式パラメータ w が定数のときエネルギー密度の保存則

$$\frac{d\rho}{dt} + 3H(\rho + p) = 0,$$

より $\rho = \rho_0 a^{-3(1+w)}$, ρ_0 : 積分定数。

第一 FRW 方程式より、

$w > -1$ の場合

$$a(t) = a_0 t^{\frac{2}{3(1+w)}}, \quad a_0 \equiv \left(\frac{3\rho_0 \kappa^2 (1+w)^2}{4} \right)^{\frac{1}{3(1+w)}}.$$

$w < -1$ の場合

$$a(t) = a_0 (t_0 - t)^{\frac{2}{3(1+w)}}, \quad a_0 \equiv \left(\frac{3\rho_0\kappa^2 (1+w)^2}{4} \right)^{\frac{1}{3(1+w)}}.$$

$t = t_0$ で $a(t)$ が発散 : **Big Rip** 特異点

$w = -1$ の場合

$$a(t) = a_0 e^{H_0 t}, \quad H_0 \equiv \frac{\rho_0\kappa^2}{3},$$

de Sitter 時空。

3 微調整問題、一致問題

「微調整問題 (fine-tuning problem)」、

「一致問題 (coincidence problem)」

定義は人により微妙にまちまちだったりする。

第一、第二 FRW 方程式 ($K = 0$)

$$0 = -\frac{3}{\kappa^2}H^2 + \frac{\Lambda}{2\kappa^2} + \rho_{\text{matter}}, \quad 0 = \frac{1}{\kappa^2} \left(2\frac{dH}{dt} + 3H^2 \right) - \frac{\Lambda}{2\kappa^2} + p_{\text{matter}},$$

Λ : 宇宙定数。

暗黒エネルギーを宇宙項とすると、宇宙定数は不自然に小さい。

$$\Lambda \sim (10^{-33} \text{ eV})^2 \ll M_{\text{Planck}} \sim 10^{19} \text{ GeV} = 10^{28} \text{ eV}$$

人間原理？

$$\frac{\Lambda}{2\kappa^2} \sim \rho_{\text{matter}}$$

現在の宇宙の年齢 (137 億年)

$$\sim (10^{-33} \text{ eV})^{-1}$$

現在の宇宙の温度 (3K)

$$\sim 10^{-3} \text{ eV} \sim (\rho_{\text{matter}})^{1/4}$$

暗黒エネルギー : dynamical?

暗黒エネルギーが w が -1 よりわずかに小さい流体であったとする。

$$\rho_{\text{DE}} = \rho_{\text{DE}0} a^{-3(1+w)} \sim \rho_{\text{DE}0}$$

通常物質や暗黒物質 ($w = 0$ のダスト)

$$\rho_{\text{matter}} = \rho_{\text{matter}0} a^{-3}$$

暗黒エネルギー—通常物質や暗黒エネルギーの密度の比

$$\rho_{\text{DE}}/\rho_{\text{matter}} = (\rho_{\text{DE}0}/\rho_{\text{matter}0}) a^{-3}$$

$\rho_{\text{DE}0}$ と $\rho_{\text{matter}0}$ がそれぞれ現在の宇宙の値でそれらが同程度であるとすると： $\rho_{\text{DE}0} \sim \rho_{\text{matter}0}$

密度の比 $\rho_{\text{DE}}/\rho_{\text{matter}} \sim a^{-3}$ となるので、
宇宙の晴れ上がりの時期 ($a \sim 10^{-3}$) :

$$\rho_{\text{DE}}/\rho_{\text{matter}} \sim 10^{-9}$$

初期条件として密度の比を微調整する必要がある。

暗黒物質と暗黒エネルギーが相互作用し互いに移り変わるような
モデル？

宇宙膨張に合わせて暗黒エネルギーが状態方程式パラメータの値
を動的に変えていくようなモデル (tracker)？

暗黒エネルギーを真空のエネルギーであるとする。
通常の物質の量子補正により真空のエネルギーは4次発散。
高エネルギーで超対称性が回復するとすると、

真空のエネルギーの量子補正: $\Lambda_{\text{cutoff}}^2 \Lambda_{\text{SUSY}}^2$

Λ_{cutoff} : カットオフのスケール

Λ_{SUSY} : 超対称性の破れるスケール

counter term を使うことにより $(10^{-3} \text{ eV})^4$ 程度のごく小さなエネルギーを残そうとすると非常な微調整をする必要があり、きわめて不自然。

我々が量子重力をよく理解していない？

暗黒エネルギーを宇宙に満ちる流体と考えたことは アインシュタイン方程式の右辺の $T_{\mu\nu}$ の中に暗黒エネルギーの寄与を含めることになる。一方、アインシュタイン方程式の左辺を変えることで宇宙の加速膨張を説明しようという試みもある。このような重力理論を修正重力理論という。

4 $F(R)$ 重力の一般的性質

$F(R)$ 重力：修正重力理論の一つ。

アインシュタイン=ヒルベルト (Einstein-Hilbert) 作用

$$S_{\text{EH}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{R}{2\kappa^2} - \frac{\Lambda}{2\kappa^2} + \mathcal{L}_{\text{matter}} \right),$$

$F(R)$ 重力理論の作用

$$S_{F(R)} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{F(R)}{2\kappa^2} + \mathcal{L}_{\text{matter}} \right).$$

$F(R)$ ：スカラー曲率 R の適当な関数。

有効状態方程式パラメータ

$$w_{\text{eff}} = -1 - \frac{2\dot{H}}{3H^2}.$$

$F(R)$ 重力の運動方程式 :

$$\frac{1}{2}g_{\mu\nu}F(R) - R_{\mu\nu}F'(R) - g_{\mu\nu}\square F'(R) + \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}F'(R) = -\frac{\kappa^2}{2}T_{\text{matter}\ \mu\nu}.$$

FRW 宇宙の計量を仮定 ($K = 0$)

$$0 = -\frac{F(R)}{2} + 3\left(H^2 + \dot{H}\right)F'(R) - 18\left(4H^2\dot{H} + H\ddot{H}\right)F''(R) + \kappa^2\rho_{\text{matter}},$$

$$0 = \frac{F(R)}{2} - \left(\dot{H} + 3H^2\right)F'(R) + 6\left(8H^2\dot{H} + 4\dot{H}^2 + 6H\ddot{H} + \ddot{H}\right)F''(R) + 36\left(4H\dot{H} + \ddot{H}\right)F'''(R) + \kappa^2 p_{\text{matter}}.$$

厳密解:

リッチ曲率が **covariantly constant** ($\nabla_\rho R_{\mu\nu} = 0$) と仮定。

$$R_{\mu\nu} = (R_0/4)g_{\mu\nu}, \quad (R = R_0)$$

R_0 : 定数。

代数方程式 :

$$0 = 2F(R_0) - R_0F'(R_0).$$

この方程式が解を持てば **(anti-)de Sitter** 空間や
Schwarzschild-(anti-)de Sitter 時空、**Kerr-(anti-)de Sitter** 時空が
exact vacuum solution ($T_{\mu\nu} = 0$)。

$F(R)$ が $F(R) \propto f_0 R^m$ と仮定 :

$$0 = f_0 \left\{ -\frac{1}{2} \left(6\dot{H} + 12H^2 \right)^m + 3m \left(\dot{H} + H^2 \right) \left(6\dot{H} + 12H^2 \right)^{m-1} \right. \\ \left. - 3mH \frac{d}{dt} \left\{ \left(6\dot{H} + 12H^2 \right)^{m-1} \right\} \right\} + \kappa^2 \rho_0 a^{-3(1+w)} .$$

$\rho_0 = 0$ の場合 :

$$H = \frac{-\frac{(m-1)(2m-1)}{m-2}}{t} ,$$

\Rightarrow

$$w_{\text{eff}} = -\frac{6m^2 - 7m - 1}{3(m-1)(2m-1)} .$$

状態方程式パラメータが w である物質からの寄与を含める :

$$a = a_0 t^{h_0}, \quad h_0 \equiv \frac{2m}{3(1+w)},$$
$$a_0 \equiv \left[-\frac{3f_0 h_0}{\kappa^2 \rho_0} (-6h_0 + 12h_0^2)^{m-1} \{(1-2m)(1-m) - (2-m)h_0\} \right]^{-\frac{1}{3(1+w)}},$$

有効状態方程式パラメータ :

$$w_{\text{eff}} = -1 + \frac{w+1}{m}.$$

$F(R)$ 重力のスカラー場での表示

補助場 $A \Rightarrow$

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \{ F'(A) (R - A) + F(A) \} .$$

A の変分 $\Rightarrow A = R \Rightarrow$ 元の作用

スケール変換 : $g_{\mu\nu} \rightarrow e^\sigma g_{\mu\nu}, \sigma \equiv -\ln F'(A)$

$$\Rightarrow S_E = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R - \frac{3}{2} g^{\rho\sigma} \partial_\rho \sigma \partial_\sigma \sigma - V(\sigma) \right) ,$$

$$V(\sigma) = e^\sigma \mathcal{G}(e^{-\sigma}) - e^{2\sigma} f(\mathcal{G}(e^{-\sigma})) = \frac{A}{F'(A)} - \frac{F(A)}{F'(A)^2} .$$

「Einstein frame での作用」

$\mathcal{G}(e^{-\sigma}) : \sigma = -\ln F'(A) \Rightarrow A = \mathcal{G}(e^{-\sigma})$

計量テンソルを通じ、スカラー場 σ と通常の物質との相互作用が現れる。

σ の質量 :

$$m_\sigma^2 \equiv \frac{3}{2} \frac{d^2 V(\sigma)}{d\sigma^2} = \frac{3}{2} \left\{ \frac{A}{F'(A)} - \frac{4F(A)}{(F'(A))^2} + \frac{1}{F''(A)} \right\} .$$

m_σ が小さければスカラー場 σ の伝播によりニュートンの重力法則に大きな補正が現れる。

ナীবには $m_\sigma \sim H$ 。

W. Hu and I. Sawicki, “Models of $f(R)$ Cosmic Acceleration that Evade Solar-System Tests,”

Phys. Rev. D 76, 064004 (2007) [arXiv:0705.1158 [astro-ph]].

カメレオン機構を使った模型。

Hu-Sawicki の模型も時空の曲率が容易に大きくなるという問題。

小さなパラメータ $m \sim 10^{-33}$ eV

$R \gg m^2$ で

$$F(R) = R - c_1 m^2 + \frac{c_2 m^{2n+2}}{R^n} + \mathcal{O}(R^{-2n}) .$$

c_1, c_2, n : 次元を持たない定数である。

$V(\sigma)$

$$V(\sigma) \sim \frac{c_1 m^2}{A^2} .$$

$R = A \rightarrow \infty \Leftrightarrow$ ポテンシャルの小さな値

\Rightarrow 大きな曲率が容易に現れる。

一般的に、 R が大きいときに $F(R)$ が次のように振舞うとする：

$$F(R) \sim F_0 R^\epsilon .$$

F_0 、 ϵ ：は正の定数、 $\epsilon > 1$ 。

ポテンシャル $V(\sigma)$

$$V(\sigma) \sim \frac{\epsilon - 1}{\epsilon^2 F_0 A^{\epsilon-2}} .$$

$1 < \epsilon < 2$ なら $R = A \rightarrow \infty$ でポテンシャル $V(\sigma) \rightarrow +\infty$ 。

\Rightarrow 大きな曲率が容易に現れない。

$\epsilon = 2$ の時 $R \rightarrow \infty$ で $V(\sigma) \rightarrow 1/F_0$

$\Rightarrow 1/F_0$ が十分に大きければ大きな曲率が現れない。

反重力の問題

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \{ F'(A) (R - A) + F(A) \} .$$

$F'(R) < 0 \Leftrightarrow$ 反重力 $\Rightarrow F'(R) > 0$ を要請。

$$\frac{dV(\sigma)}{dA} = \frac{F''(A)}{F'(A)^3} (-AF'(A) + 2F(A)) ,$$

スカラー場 σ が停留値を取る条件：

$$0 = -AF'(A) + 2F(A) ,$$

de Sitter 時空が解となる条件と同一。

この条件が満たされるとき質量

$$m_{\sigma}^2 = \frac{3}{2F'(A)} \left(-A + \frac{F'(A)}{F''(A)} \right),$$

$F'(R) > 0$ なら もし、

$$-A + \frac{F'(A)}{F''(A)} > 0.$$

ならば $m_{\sigma}^2 > 0 \Leftrightarrow$ ポテンシャルが極小。

もし

$$-A + \frac{F'(A)}{F''(A)} < 0,$$

ポテンシャルが極大 \Rightarrow de Sitter 時空の解が不安定。

$-A + \frac{F'(A)}{F''(A)} = 0$ の場合。

$$0 = -RF'(R) + 2F(R) \Leftrightarrow 0 = \frac{d}{dR} \left(\frac{F(R)}{R^2} \right).$$

解 : $R = R_0$ 、 $F(R)$ が次のような振る舞いをするとする :

$$\frac{F(R)}{R^2} = f_0 + f(R) (R - R_0)^n .$$

f_0 : 定数、 n : 2 以上の整数、 $f(R_0) \neq 0$ と仮定。

$F(0) = 0$ 、 $F'(R) > 0$ を仮定 $\Rightarrow F(R) > 0$ ($R > 0$)、 $f_0 > 0$

$n = 2$

$$-R_0 + \frac{F'(R_0)}{F''(R_0)} = -\frac{f(R_0)A_0}{f_0 + f(A_0)},$$

$\Rightarrow -f_0 < f(A_0) < 0$ ならば **de Sitter** 時空の解は安定。

$n \geq 3$

$$-R_0 + \frac{F'(R_0)}{F''(R_0)} = 0.$$

$R \sim R_0$ 付近での m_σ^2 の符号を調べる。

$$m_\sigma^2 \sim -\frac{3n(n-1)R_0^2 f(R_0)}{2f_0^2} (R - R_0)^{n-2}.$$

n が偶数 : $f(R_0) < 0$ 安定、 $f(R_0) > 0$ 不安定。

n が奇数 : 常に不安定になる。

$f(R_0) < 0$ ($f(R_0) > 0$) の時

$R > R_0$ なら $m_\sigma^2 > 0$ ($m_\sigma^2 < 0$)、 $R < R_0$ ならば $m_\sigma^2 < 0$ ($m_\sigma^2 > 0$)

\Rightarrow

$f(R_0) < 0$ のときは R は小さくなるとうとする。

$f(R_0) > 0$ のときは R は大きくなるとうとする。

一般には Einstein frame では元の frame (しばしば Jordan frame と呼ばれる) と宇宙の発展の振る舞いが変わる。これはスケール変換で時間も変換されているからである。例えば、Einstein frame の作用に基づくと $w < -1$ の流体 (phantom) が存在するときの宇宙の発展は実現できないことが知られているが、元の作用では $w < -1$ の流体が存在するときの宇宙の発展を実現できる。 $w < -1$ のときの Big Rip 特異点の時刻 $t = t_0$ は Einstein frame では $t \rightarrow \infty$ に対応する。

5 現実的な $F(R)$ 重力模型

$F(R)$ の関数形に対する条件 :

- $R \rightarrow 0$ のときにアインシュタイン重力を再現。

$$F(R) \rightarrow R \quad \text{すなわち} \quad \frac{F(R)}{R^2} \rightarrow \frac{1}{R}.$$

\Rightarrow 平坦な時空が解。

- 現在の加速膨張に対応する安定な de Sitter 時空が解、すなわち、曲率が $R \sim R_L \sim (10^{-33} \text{ eV})^2$ 程度のとき $R \sim R_L$ に $F(R)$ が次のように振舞う :

$$\frac{F(R)}{R^2} = f_{0L} - f_{1L} (R - R_L)^{2n+2} + o\left((R - R_L)^{2n+2}\right).$$

f_{0L} 、 f_{1L} : 正の定数、 n : 正の整数。

- インフレーションに対応する準安定な de Sitter 時空が解。
 $R \sim R_I \sim (10^{16 \sim 19} \text{ GeV})^2$ 。ゆっくりと曲率が減少。

$$\frac{F(R)}{R^2} = f_{0I} - f_{1I} (R - R_I)^{2m+1} + o\left((R - R_I)^{2m+1}\right).$$

f_{0I} 、 f_{1I} : 正の定数、 m : 正の整数。

- 曲率が容易に発散するのを避けるため、 $R \rightarrow \infty$ のとき

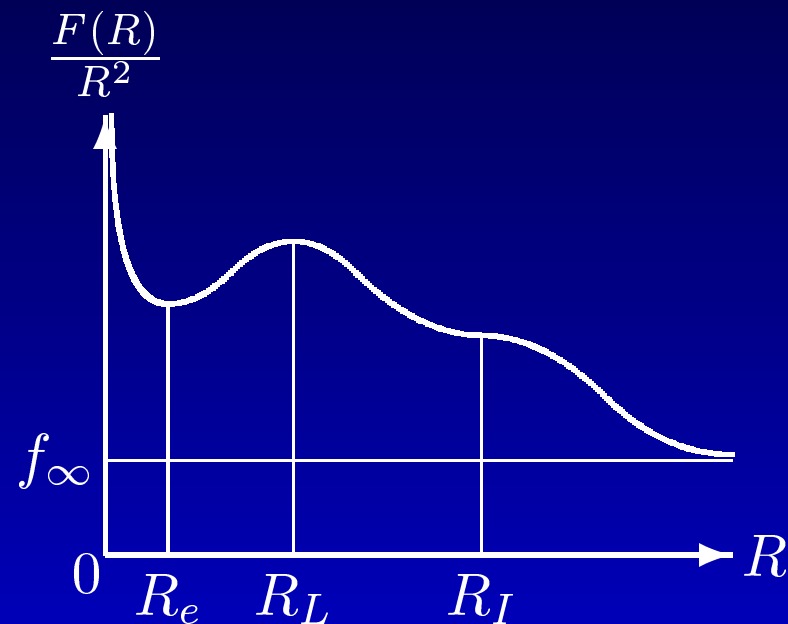
$$F(R) \rightarrow f_{\infty} R^2 \quad \text{すなわち} \quad \frac{F(R)}{R^2} \rightarrow f_{\infty}.$$

f_{∞} : 正で十分小さな定数。または

$$F(R) \rightarrow \tilde{f}_{\infty} R^{2-\epsilon} \quad \text{すなわち} \quad \frac{F(R)}{R^2} \rightarrow \frac{\tilde{f}_{\infty}}{R^{\epsilon}}.$$

\tilde{f}_{∞} : 正の定数 $0 < \epsilon < 1$ 。

- 反重力を避けるため、 $F'(R) > 0$ 。
- $R \rightarrow 0$ で $F(R) \rightarrow R$ 、 $F'(R) > 0 \Rightarrow F(R) > 0$ 。



余分に不安定な de Sitter 時空の解が $R = R_e$ に現れる。
 宇宙の発展は $R = R_L$ で止まる。

具体例 :

$$\frac{F(R)}{R^2} = \left\{ (X_m(R_I; R) - X_m(R_I; R_1)) \times (X_m(R_I; R) - X_m(R_I; R_L))^{2n+2} + X_m(R_I; R_1) X_m(R_I; R_L)^{2n+2} + f_\infty^{2n+3} \right\}^{\frac{1}{2n+3}},$$

$$X_m(R_I; R) \equiv \frac{(2m+1) R_I^{2m}}{(R - R_I)^{2m+1} + R_I^{2m+1}}.$$

n, m は 1 以上の整数。

R_1 :

$$X(R_I; R_e) = \frac{(2n+2) X(R_I; R_1) X(R_I; R_1) + X(R_I; R_L)}{2n+3}.$$

$0 < R_1 < R_L \ll R_I$ と仮定。

$X(R_I; R)$ は R な単調減少関数で $R \rightarrow 0$ の極限で

$$X(R_I; R) \rightarrow \frac{1}{R} \Rightarrow F(R) \rightarrow R$$

$R \rightarrow \infty$ の極限

$$X(R_I; R) \rightarrow \frac{(2m+1) R_I^{2m}}{R^{2m+1}} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{F(R)}{R^2} \rightarrow f_\infty$$

$$R \sim R_L$$

$$f_{0L} = \left\{ X_m (R_I; R_1) X_m (R_I; R_L)^{2n+2} + f_\infty^{2n+3} \right\}^{\frac{1}{2n+3}},$$

$$f_{1L} = \frac{1}{2m+3} \left\{ X_m (R_I; R_1) X_m (R_I; R_L)^{2n+2} + f_\infty^{2n+3} \right\}^{-\frac{2(n+1)}{2n+3}} \\ \times (X_m (R_I; R_1) - X_m (R_I; R_L)) \\ \times \frac{(2m+1)^{4(m+1)} \{R_I (R_L - R_I)\}^{4m(m+1)}}{\left\{ (R_L - R_I)^{2m+1} + R_I^{2m+1} \right\}^{4(m+1)}},$$

\Rightarrow

$$\frac{F(R)}{R^2} = f_{0L} - f_{1L} (R - R_L)^{2n+2} + o\left((R - R_L)^{2n+2}\right).$$

$$R \sim R_I$$

$$f_{0I} = \left\{ (X_m(R_I; R_I) - X_m(R_I; R_1)) (X_m(R_I; R_I) - X_m(R_I; R_L))^{2n+2} + X_m(R_I; R_1) X_m(R_I; R_L)^{2n+2} + f_\infty^{2n+3} \right\}^{\frac{1}{2n+3}}$$

$$f_{1I} = \frac{2m+1}{R_I^{2m+2}} \left\{ (X_m(R_I; R_I) - X_m(R_I; R_1)) (X_m(R_I; R_I) - X_m(R_I; R_L))^{2n+2} + X_m(R_I; R_1) X_m(R_I; R_L)^{2n+2} + f_\infty^{2n+3} \right\}^{\frac{2(n+1)}{2n+3}} \\ \times \left\{ (X_m(R_I; R_I) - X_m(R_I; R_L))^{2n+2} + (2n+2) (X_m(R_I; R_I) - X_m(R_I; R_1)) (X_m(R_I; R_I) - X_m(R_I; R_L))^{2n+1} \right\} .$$

\Rightarrow

$$\frac{F(R)}{R^2} = f_{0I} - f_{1I} (R - R_I)^{2m+1} + o\left((R - R_I)^{2m+1}\right) .$$

カメレオン機構 : $R_1 < R_L \ll R \ll R_I$

$$X_m(R_I; R) \sim \frac{1}{R}, \quad X_m(R_I; R_1) \sim \frac{1}{R_1}, \quad X_m(R_I; R_L) \sim \frac{1}{R_L}.$$

\Rightarrow

$$\frac{F(R)}{R^2} \sim f_\infty + \frac{f_n}{R}, \quad f_n \equiv \frac{R_1 + (2n + 2) R_L f_\infty^{-2n-2}}{(2n + 3) R_1 R_L^{2n+2}} \sim \frac{f_\infty^{-2n-2}}{R_L^{2n+2}}.$$

$R_1 \sim R_L$ と仮定した。

もし $f_\infty R \ll f_n$ すなわち $\frac{1}{f_\infty^{2n+3}} \gg R R_L^{2n+2}$ のとき

$$m_\sigma^2 \sim \frac{3}{4f_\infty}.$$

地球の内側の領域：

$1\text{ g} \sim 6 \times 10^{32}\text{ eV}$ で $1\text{ cm} \sim (2 \times 10^{-5}\text{ eV})^{-1}$ なので質量の密度は大体

$\rho_{\text{matter}} \sim 1\text{ g/cm}^3 \sim 5 \times 10^{18}\text{ eV}^4$ 。

スカラー曲率の大きさは $R \sim \kappa^2 \rho_{\text{matter}} \sim (10^{-19}\text{ eV})^2$ 程度。

地球の大気中：

$\rho_{\text{matter}} \sim 10^{-6}\text{ g/cm}^3 \sim 10^{12}\text{ eV}^4$ で $R_0 \sim \kappa^2 \rho_{\text{matter}} \sim (10^{-25}\text{ eV})^2$ 。

太陽系：

星間ガス \sim 典型的には 1 cm^3 当たり、陽子が一個。

$\rho_{\text{matter}} \sim 10^{-5}\text{ eV}^4$, $R_0 \sim 10^{-61}\text{ eV}^2$

例えば、 $\frac{1}{f_\infty} \sim \text{MeV}^2$ とするとこのスカラー場のコンプトン波長は非常に小さくなりニュートンの重力法則への補正は無視できる。

$F'(R) > 0$? ... 全領域で満たされる。

$R = R_I$ のインフレーションの後、輻射や物質が生成されるとする。もし、輻射や物質のエネルギー密度が $f(R) = F(R) - R$ の寄与に比べて大きくなると輻射または物質優勢期の宇宙が再現される。曲率が $R \sim R_L$ となると現在の加速膨張が始まる。

6 $F(R)$ 重力模型の再構築

通常は作用が与えられた適当な模型から出発し、それから得られる方程式により宇宙の発展を調べるが、ここでは逆のことを考える。すなわち、任意の宇宙膨張の時間発展（特に観測と合うものに注目する）が与えられたときに、その時間発展を方程式の解に持つような模型を構築する。これを「再構築」と呼ぶことにする。

宇宙時間を使った再構築

作用を次のように書き直す：

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2\kappa^2} (P(\phi)R + Q(\phi)) + \mathcal{L}_{\text{matter}} \right\} .$$

P 、 Q ：補助場であるスカラー場 ϕ の適当な関数。

ϕ の変分 $\Rightarrow 0 = P'(\phi)R + Q'(\phi) \Rightarrow \phi = \phi(R)$ 。

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{F(R)}{2\kappa^2} + \mathcal{L}_{\text{matter}} \right\} ,$$
$$F(R) \equiv P(\phi(R))R + Q(\phi(R)) .$$

$g_{\mu\nu}$ で変分 $\Rightarrow \sim$ FRW 方程式

$$0 = -6H^2 P(\phi) - Q(\phi) - 6H \frac{dP(\phi(t))}{dt} + 2\kappa^2 \rho_{\text{matter}},$$
$$0 = \left(4\dot{H} + 6H^2\right) P(\phi) + Q(\phi) + 2 \frac{d^2 P(\phi(t))}{dt^2} + 4H \frac{dP(\phi(t))}{dt} + 2\kappa^2 p_{\text{matter}}.$$

$Q(\phi)$ を消去

$$0 = 2 \frac{d^2 P(\phi(t))}{dt^2} - 2H \frac{dP(\phi(t))}{dt} + 4\dot{H} P(\phi) + 2\kappa^2 (p_{\text{matter}} + \rho_{\text{matter}}).$$

スカラー場 ϕ を自由に再定義できるので、 ϕ が定数で無い限りは少なくとも局所的に $\phi = t$ と選ぶことが出来る。

多くの場合 ρ_{matter} と p_{matter} は定数の w_i を持つ物質からの寄与の和。

スケール因子 a を適当な関数 $g(t)$ で $a = a_0 e^{g(t)}$ (a_0 は定数) のように表す。⇒ 2 階の微分方程式 :

$$0 = 2 \frac{d^2 P(\phi)}{d\phi^2} - 2g'(\phi) \frac{dP(\phi)}{d\phi} + 4g''(\phi) P(\phi) + 2\kappa^2 \sum_i (1 + w_i) \rho_{i0} a_0^{-3(1+w_i)} e^{-3(1+w_i)g(\phi)} .$$

原理的にはこの微分方程式を解くことにより $P(\phi)$ が求まる。

$$Q(\phi) = -6 (g'(\phi))^2 P(\phi) - 6g'(\phi) \frac{dP(\phi)}{d\phi} + 2\kappa^2 \sum_i \rho_{i0} a_0^{-3(1+w_i)} e^{-3(1+w_i)g(\phi)} .$$

$a = a_0 e^{g(t)}$ で表されるような任意の時間発展に対し、それを解に持つような $F(R)$ の形が分かる。

例： Λ CDM 宇宙。

$$a = a_0 e^{g(t)}, \quad g(t) = \frac{2}{3(1+w)} \ln \left(\alpha \sinh \left(\frac{3(1+w)}{2l} (t - t_s) \right) \right).$$

t_s : 積分定数。

$$\alpha^2 \equiv \frac{1}{3} \kappa^2 l^2 \rho_0 a_0^{-3(1+w)}.$$

l : でてきた「長さパラメーター」 (宇宙定数 Λ 、 $\Lambda = 6/l^2$)

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= 2 \frac{d^2 P(\phi)}{d\phi^2} - \frac{2}{l} \coth \left(\frac{3(1+w)}{2l} (\phi - t_s) \right) \frac{dP(\phi)}{d\phi} \\ &\quad - \frac{6(1+w)}{l^2} \sinh^{-2} \left(\frac{3(1+w)}{2l} (\phi - t_s) \right) P(\phi) \\ &\quad + \frac{4}{3} \rho_{r0} a_0^{-4} \left(\alpha \sinh \left(\frac{3(1+w)}{2l} (\phi - t_s) \right) \right)^{-8/3(1+w)} \\ &\quad + \rho_{d0} a_0^{-3} \left(\alpha \sinh \left(\frac{3(1+w)}{2l} (\phi - t_s) \right) \right)^{-2/(1+w)}. \end{aligned}$$

物質からに寄与を無視。 ϕ から z に変数変換

$$z \equiv -\sinh^{-2} \left(\frac{3(1+w)}{2l} (t - t_s) \right),$$

⇒ ガウスの超幾何方程式 :

$$0 = z(1-z) \frac{d^2 P}{dz^2} + \left[\tilde{\gamma} - (\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} + 1) z \right] \frac{dP}{dz} - \tilde{\alpha} \tilde{\beta} P,$$
$$\tilde{\gamma} \equiv 4 + \frac{1}{3(1+w)}, \quad \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} + 1 \equiv 6 + \frac{1}{3(1+w)}, \quad \tilde{\alpha} \tilde{\beta} \equiv -\frac{1}{3(1+w)}.$$

解 : ガウスの超幾何関数

$$P = P_0 F(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}; z) \equiv P_0 \frac{\Gamma(\tilde{\gamma})}{\Gamma(\tilde{\alpha})\Gamma(\tilde{\beta})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\tilde{\alpha} + n)\Gamma(\tilde{\beta} + n)}{\Gamma(\tilde{\gamma} + n)} \frac{z^n}{n!}.$$

Γ : ガンマ関数である。

もう一つ線形独立な解 $(1 - z)^{\tilde{\gamma} - \tilde{\alpha} - \tilde{\beta}} F(\tilde{\gamma} - \tilde{\alpha}, \tilde{\gamma} - \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}; z)$ があるがここでは単純化のために落とすことにする。

$$Q = -\frac{6(1 - z)P_0}{l^2} F(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}; z) - \frac{3(1 + w)z(1 - z)P_0}{l^2(13 + 12w)} F(\tilde{\alpha} + 1, \tilde{\beta} + 1, \tilde{\gamma} + 1; z).$$

e-folding を用いた再構築

宇宙時間 t の代わりに e-folding を使った再構築。

e-folding : $N = \ln \frac{a}{a_0}$ 、赤方偏移 z :

$$e^{-N} = \frac{a_0}{a} = 1 + z.$$

赤方偏移 z : 観測と直接関係する量。

$$\frac{d}{dt} = H \frac{d}{dN}, \quad \frac{d^2}{dt^2} = H^2 \frac{d^2}{dN^2} + H \frac{dH}{dN} \frac{d}{dN} \text{ 等より}$$

$$0 = -\frac{F(R)}{2} + 3(H^2 + HH')F'(R) \\ -18\left(4H^3H' + H^2(H')^2 + H^3H''\right)F''(R) + \kappa^2\rho_{\text{matter}}.$$

$$H' \equiv dH/dN, \quad H'' \equiv d^2H/dN^2.$$

ハッブル率 H が N の関数 $g(N)$ によって与えられているとする :

$$H = g(N) = g(-\ln(1+z)) .$$

スカラー曲率は $R = 6g'(N)g(N) + 12g(N)^2 \Rightarrow N = N(R)$ 。

$$\begin{aligned} 0 = & -18 \left(4g(N(R))^3 g'(N(R)) + g(N(R))^2 g'(N(R))^2 \right. \\ & \left. + g(N(R))^3 g''(N(R)) \right) \frac{d^2 F(R)}{dR^2} \\ & + 3 \left(g(N(R))^2 + g'(N(R)) g(N(R)) \right) \frac{dF(R)}{dR} - \frac{F(R)}{2} \\ & + \kappa^2 \sum_i \rho_{i0} a_0^{-3(1+w_i)} e^{-3(1+w_i)N(R)} . \end{aligned}$$

R を変数とする $F(R)$ についての微分方程式。

$$G(N) \equiv g(N)^2 = H^2 \Rightarrow$$

$$0 = -9G(N(R)) (4G'(N(R)) + G''(N(R))) \frac{d^2 F(R)}{dR^2} \\ + \left(3G(N(R)) + \frac{3}{2}G'(N(R)) \right) \frac{dF(R)}{dR} \\ - \frac{F(R)}{2} + \kappa^2 \sum_i \rho_{i0} a_0^{-3(1+w_i)} e^{-3(1+w_i)N(R)} .$$

$$R = 3G'(N) + 12G(N) \circ$$

解の安定性

解を $G = G_0(N)$ とし、その解からの摂動を考える：

$$G(N) = G_0(N) + \delta G(N).$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned}
 0 = & G_0(N) \left. \frac{d^2 F(R)}{dR^2} \right|_{R=3G'_0(N)+12G_0(N)} \delta G''(N) \\
 & + \left\{ 3G_0(N) (4G'_0(N) + G''_0(N)) \left. \frac{d^3 F(R)}{dR^3} \right|_{R=3G'_0(N)+12G_0(N)} \right. \\
 & \left. + \left(3G_0(N) - \frac{1}{2}G'_0(N) \right) \left. \frac{d^2 F(R)}{dR^2} \right|_{R=3G'_0(N)+12G_0(N)} \right\} \delta G'(N) \\
 & + \left\{ 12G_0(N) (4G'_0(N) + G''_0(N)) \left. \frac{d^3 F(R)}{dR^3} \right|_{R=3G'_0(N)+12G_0(N)} \right. \\
 & \left. + (-4G_0(N) + 2G'_0(N) + G''_0(N)) \left. \frac{d^2 F(R)}{dR^2} \right|_{R=3G'_0(N)+12G_0(N)} \right. \\
 & \left. + \frac{1}{3} \left. \frac{dF(R)}{dR} \right|_{R=3G'_0(N)+12G_0(N)} \right\} \delta G.
 \end{aligned}$$

ρ_{matter} の N 依存性が知られているため、 ρ_{matter} の揺らぎは考える必要がない。
安定性の条件

$$\begin{aligned}
 & 6 \left(4G'_0(N) + G''_0(N) \right) \frac{d^3 F(R)}{dR^3} \Big|_{R=3G'_0(N)+12G_0(N)} \\
 & \times \left(\frac{d^2 F(R)}{dR^2} \Big|_{R=3G'_0(N)+12G_0(N)} \right)^{-1} + 6 - \frac{G'_0(N)}{G_0(N)} > 0, \\
 & 36 \left(4G'_0(N) + G''_0(N) \right) \frac{d^3 F(R)}{dR^3} \Big|_{R=3G'_0(N)+12G_0(N)} \\
 & \times \left(\frac{d^2 F(R)}{dR^2} \Big|_{R=3G'_0(N)+12G_0(N)} \right)^{-1} - 12 + \frac{6G'_0(N)}{G_0(N)} \\
 & + \frac{3G''_0(N)}{G_0(N)} + \frac{1}{G_0(N)} \frac{dF(R)}{dR} \Big|_{R=3G'_0(N)+12G_0(N)} \\
 & \times \left(\frac{d^2 F(R)}{dR^2} \Big|_{R=3G'_0(N)+12G_0(N)} \right)^{-1} > 0.
 \end{aligned}$$

例：de Sitter 時空

最初の式： H 、 G_0 、 $R = R_0 \equiv 12G_0$ が定数なので、 $\delta > 0$ 。自明に満たされる。

二つ目の式

$$\begin{aligned} & -12G_0 + \left. \frac{dF(R)}{dR} \right|_{R=12G_0} \left(\left. \frac{d^2F(R)}{dR^2} \right|_{R=12G_0} \right)^{-1} \\ & = -R_0 + \left. \frac{dF(R)}{dR} \right|_{R=R_0} \left(\left. \frac{d^2F(R)}{dR^2} \right|_{R=R_0} \right)^{-1} > 0, \end{aligned}$$

これまでに示した標準的な結果と一致。

7 Summary

- 暗黒エネルギー及び $F(R)$ 重力理論の現在の状況を紹介した。
- $F(R)$ 重力理論：問題の発見とその解決の繰り返し。未だ否定されていない。
- 超弦理論等の高次元の素粒子理論との関係は？
例：Brans-Dicke 型理論の低エネルギー有効理論？

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{e^\phi}{2\kappa^2} R - \frac{1}{2} \omega(\phi) \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) + L_{\text{matter}} \right\} .$$

kinetic term を無視して、 ϕ で変分し、得られた方程式を ϕ について R の関数として解いて、 ϕ 消去すれば $F(R)$ 理論が得られる。