弦の場の理論入門

– その成果と課題 –

畑 浩之 (京大理)

2011 年 5 月 14 日 at 益川塾

Introduction

– 弦の場の理論とは? –

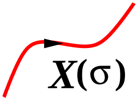
以下では、
弦の場の理論 = String Field Theory
= SFT **と省略**

String Field

局所場: $\varphi(\boldsymbol{x}, t)$

- 空間の各点 x に力学変数 φ
- 点 x に粒子を生成/消滅

⇓ これを単純に弦 (ひも) に拡張すると



弦場 (string field): $\Phi[X(\sigma), t]$

- ひもの空間的配位 $X(\sigma)$ 毎に力学変数 Φ
  (Φ は関数 $X(\sigma)$ の汎関数)
- $X(\sigma)$ の形&位置を持ったひもの生成/消滅

SFT with Lorentz & Gauge Invariance

しかし、我々の欲しい SFT は

- Lorentz 不変性
- 弦的なゲージ対称性
  (∋ Yang-Mills 対称性、一般座標不変性)

そのためには、

$$\Phi[X(\sigma), t] \underset{t\to X^0(\sigma)}{\Longrightarrow} \Phi[X^\mu(\sigma), \underbrace{b(\sigma), c(\sigma)}_{\text{ghost 座標}}]$$

しかし、$t \to X^0(\sigma)$ の置き換えは
「ひもの時刻が一意でない」
$\Rightarrow$ 最後まで問題の種

構成されたSFTは

- **弦場** Φ **の作用** $S(\Phi)$:

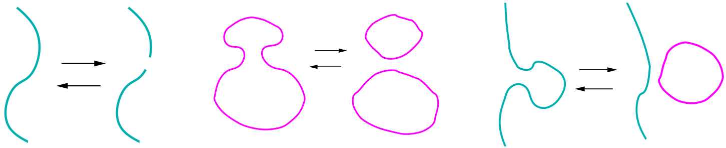
$$S(\Phi) = \frac{1}{2}\Phi Q_{\mathrm{B}}\Phi + \frac{1}{3}\Phi^3 + \dots$$

- **(弦的) 局所ゲージ対称性**:

$$\delta_{\Lambda}\Phi = Q_{\mathrm{B}}\Lambda + \Phi * \Lambda - \Lambda * \Phi + \dots$$
$$\Rightarrow \delta_{\Lambda}S(\Phi) = 0$$

ここに、$\Lambda = \Lambda[X^{\mu}(\sigma), b(\sigma), c(\sigma)]$ **は弦座標の任意汎関数**

これにより、相互作用 (切れる/くっつく) をする弦の系を記述:



$\Downarrow$

SFT への期待と現実

- Covariant & Gauge-invariant SFT は、弦理論の "非摂動論的" 解析に大きな役割を果たすものとして期待され構築された ('85 ~)。
- 実際、それは Yang-Mills 局所ゲージ対称性や一般座標不変性を包含する "弦的ゲージ対称性" を持つ美しいゲージ理論として構成された。

(局所) 場の理論の様々な解析手法 (Effective potential, Instanton, Large-N,...) を応用して、弦理論の真の真空がわかるかも!

- **しかし、その期待に反して** SFT **は長い間** (**少なくとも前世紀までは**) **"役立たず"** **の不遇の時を過ごしてきた。**
- Tachyon condensation **の解析** (1999~)/**厳密解の発見** (2005) **によって、**SFT **は初めて面目躍如となったが、しかし、まだまだ当初の期待に応えているとは言えない。**

SFT の歴史

- Light-cone SFT by Kaku-Kikkawa ('74)
  - BRST 1st quantization (Kato-Ogawa '83)
  - Batalin-Vilkovisky formalism ('83)
- Covariant & Gauge Invariant SFT ('85∼)
  - Cubic SFT (Witten)
  - HIKKO (Hata-Itoh-Kugo-Kunitomo-Ogawa)
  - Non-Polynomial closed SFT (S-Z,K-K-S)
- Boundary SFT (Witten, '92)
- Tachyon condensation in SFT ('99∼)
- **厳密解** for tachyon vacuum (Schnabl, 2005)

Plan of this talk

1. Introduction
2. SFT の構成
3. Tachyon condensation
4. SFT の課題

おことわり

- Super-SFT については全く触れません
  (∵ よく知らない、好きでない)
- 全ての数式は、Up to sign (or Up to factor) でのみ正しい

SFTの構成法

SFT の最初の構築は試行錯誤によるものであったが、その後、Batalin-Vilkoviski(BV) 形式を用いることによって systematic に構成出来ることがわかった。
(むしろ、SFT によって BV 形式が再発見された。)

BV 形式に基づいた SFT の構成: 準備

弦座標を index I **で表した、次の簡略記号を用いる**:

弦座標: $\left(X^\mu(\sigma), b(\sigma), c(\sigma)\right) = I$

弦座標積分: $\int \mathcal{D}X(\sigma)\mathcal{D}b(\sigma)\mathcal{D}c(\sigma) = \sum_I$

String field: $\Phi[X^\mu(\sigma), b(\sigma), c(\sigma)] = \Phi_I$

汎汎関数微分: $\dfrac{\delta}{\delta\Phi[X(\sigma), b(\sigma), c(\sigma)]} = \dfrac{\partial}{\partial\Phi_I}$

(古典)BV 方程式

SFT action $S(\Phi)$ **は、次の** BV **方程式を満たすように構成すべし**:

(古典)BV 方程式

$$\sum_I \left(\frac{\partial S}{\partial \Phi_I}\right)^2 = 0$$

BV **方程式は次の二つを保証する**:

(但し、古典レベル=経路積分測度を考えないで)

- Gauge invariance of SFT action $S(\Phi)$
- Procedure of Gauge-Fixing and BRST invariance

ゲージ不変性

$^{\forall}\Lambda[X^{\mu}(\sigma), b(\sigma), c(\sigma)] = \Lambda_I$ **を用いて**

$$\boxed{\textbf{(弦的) 局所ゲージ変換:}\quad \delta_\Lambda \Phi_I = \sum_J \frac{\partial^2 S}{\partial \Phi_I \partial \Phi_J} \Lambda_J}$$

を定義すると ($\sum_I$ **等を省略**):

$$\delta_\Lambda S(\Phi) = \frac{\partial S}{\partial \Phi_I} \delta_\Lambda \Phi_I = \frac{\partial S}{\partial \Phi_I} \frac{\partial^2 S}{\partial \Phi_I \partial \Phi_J} \Lambda_J$$

$$= \frac{1}{2} \Lambda_J \frac{\partial}{\partial \Phi_J} \underbrace{\left(\frac{\partial S}{\partial \Phi_I} \right)^2}_{= 0 \ \text{(BV eq)}} \boldsymbol{= 0}$$

Gauge 固定と BRST 不変性

BV **形式は、更に、**gauge **不変な作用** $S(\Phi)$ **から**

1. Gauge **固定をした作用** $\widehat{S}(\phi)$
2. BRST **変換** δ_{B} with
   - BRST **不変性**: $\delta_{\mathrm{B}}\widehat{S}(\phi) = 0$
   - (On-shell) Nilpotency: $(\delta_{\mathrm{B}})^2 = 0$ up to EOM

を与える (詳細は省略)。

BV 方程式の解 $S(\Phi)$: 多項式構成

$$S(\Phi) = \frac{1}{2} Q_{IJ}\Phi_I\Phi_J + V^{(3)}_{IJK}\Phi_I\Phi_J\Phi_K + V^{(4)}_{IJKL}\Phi_I\Phi_J\Phi_K\Phi_L + \ldots$$

と仮定して

$\Downarrow$ BV 方程式: $(\partial S/\partial\Phi_I)^2 = 0$

- $Q_{IJ}Q_{JK} = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = Q_B$ Kato-Ogawa
- $Q_{II'}V^{(3)}_{I'JK} + Q_{JJ'}V^{(3)}_{IJ'K} + Q_{KK'}V^{(3)}_{IJK'} = 0$
- $\sum_{I\to J,K,L} Q_{II'}V^{(4)}_{I'JKL} + \sum_{(I,J,K,L)\text{ の位置}} V^{(3)}_{IJM}V^{(3)}_{MKL} = 0$
- $QV^{(N)} + \sum_{M=3}^{N-1} \underbrace{V^{(N-M+2)}V^{(M)}}_{} = 0$

自由項 $\frac{1}{2}\Phi_I Q_{IJ} \Phi_J$

ここで、自由項 $\frac{1}{2}\Phi_I Q_{IJ}\Phi_J$ with $\mathcal{Q} = Q_{\rm B}^{\text{Kato-Ogwa}}$

$$Q_{\rm B} = \int_0^\pi d\sigma \left\{ \frac{\delta}{\delta b}\left[\frac{1}{2}\left(-\left(\frac{\delta}{\delta X}\right)^2 + (X')^2\right) + i\left(c'\,b + \frac{\delta}{\delta b}\frac{\delta}{\delta c}\right)\right] + ic\left(X'\frac{\delta}{\delta X} + c'\frac{\delta}{\delta c} + \left(\frac{\delta}{\delta b}\right)' c\right)\right\}$$

を眺めておこう。

弦場の Fock space 表現:

$$\left|\Phi(x, b_0)\right\rangle = b_0 \left|\phi(x)\right\rangle + \underbrace{\left|\psi(x)\right\rangle}_{0\ \text{(Siegel-gauge)}}$$

b_0 : $b(\sigma)$ のゼロモード

x^μ : $X^\mu(\sigma)$ のゼロモード = string の重心座標

$\left|\phi(x)\right\rangle$ を展開 (Open SFT):

$$\left|\phi(x)\right\rangle = |0\rangle\, t(x) + \alpha^\mu_{-1}|0\rangle A_\mu(x) + \alpha^\mu_{-2}|0\rangle W_\mu(x) + \alpha^\mu_{-1}\alpha^\nu_{-1}|0\rangle v_{\mu\nu}(x) + c_{-1}b_{-1}|0\rangle u(x) + \dots$$

$$\Downarrow$$

$$\Phi\cdot Q_{\mathrm{B}}\Phi = \int d^{26}x\ \langle\phi(x)|\ \underset{\textstyle -\partial^2+(\mathrm{mass})^2}{\overset{\textstyle L_0}{\|}}\ |\phi(x)\rangle$$

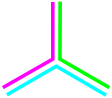
$$= \int d^{26}x\Big\{t(-\partial^2-1)t + A_\mu(-\partial^2)A_\mu + W_\mu(-\partial^2+1)W_\mu + v_{\mu\nu}(-\partial^2+1)v_{\mu\nu} - u(-\partial^2+1)u + \ldots\Big\}$$

すなわち、

$$\begin{aligned} t :&\quad \text{Tachyon 場 } (m^2=-1) \\ A_\mu :&\quad \text{Photon 場 } (m^2=0) \\ W_\mu, v_{\mu\nu}, u, \ldots :&\quad \text{Massive 場 } (m^2\geq 1) \end{aligned}$$

BV 方程式を満たす $V^{(n)}$

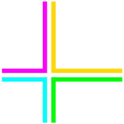
- **Cubic Open SFT** (Witten, '86)

$V^{(3)} =$  **の接続を表わすデルタ汎関数**

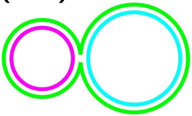
- **HIKKO Open SFT** ('86): $\Phi[X^{\mu}(\sigma), b(\sigma), c(\sigma), \alpha]$

$\Uparrow$

string-length

$V^{(3)} =$  , $V^{(4)} = \int d\alpha$ 

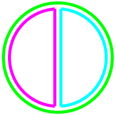
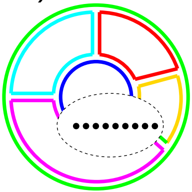
- **HIKKO Closed SFT** ('86)

$V^{(3)} =$ 

続 BV 方程式を満す $V^{(n)}$

- **Non-Polynomial Closed SFT**

  (Saadi-Zwiebach, Kugo-Kunitomo-Suehiro, '89)

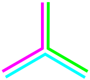
$V^{(3)} =$  $, \quad V^{(N=4,\cdots,\infty)} = \int\cdots\int d^{2N-6}\ell$ 

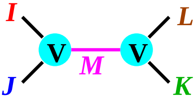
- **Boundary SFT** (Open SFT, '92) [**番外**]

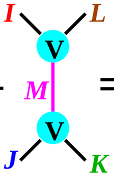
  SFT action is given implicitly as a solution to

$$dS = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta d\theta' \langle d\mathcal{O}(\theta)\,\{Q_{\mathrm{B}},\mathcal{O}(\theta')\}\rangle_\lambda$$

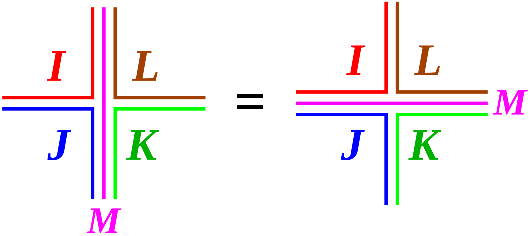
$V^{(3)}$ in Cubic SFT

$V^{(3)} =$  が如何に条件 $V^{(3)}_{IJM}V^{(3)}_{MKL} + V^{(3)}_{LIM}V^{(3)}_{MJK} = 0$

即ち、

+ 

=0 を満足するか?



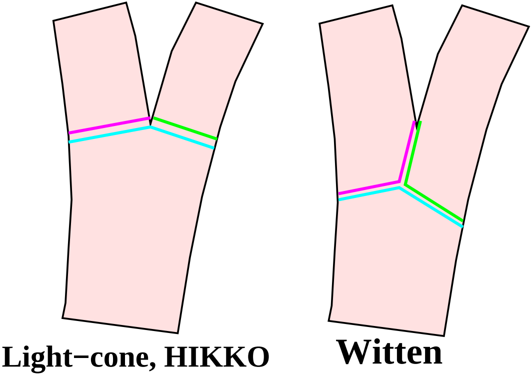
∵ どちらも弦座標 (I, J, K, L) について同じ接続

様々なBV方程式の解 $S(\Phi)$ があるが

String Feynman 図 (=world sheet) を、

Propagator + Vertex

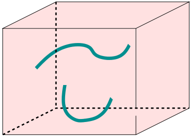
に分割する方法が色々ある:



Tachyon condensation in SFT

ここでは、SFT **の** (**唯一の**?) **輝かしい** (?) **成果である、タキオン凝縮の解析について解説する。**

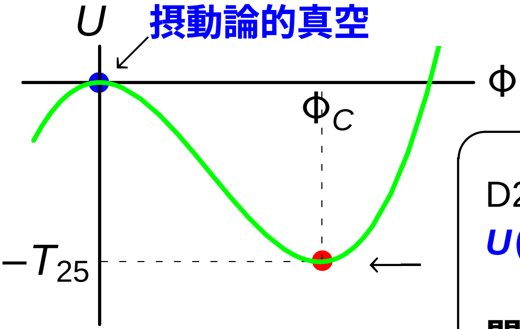
Asoke Sen の予想 in bosonic 開弦理論 (1998)



D25-brane **が一枚**

不安定タキオン・モード有り

⇑



非摂動論的真空

D25-brane **が消滅**

$U(\Phi_C) = -T_{25}$

⇓

開弦の励起モード無し
純粋な開弦理論

D25 張力: $T_{25} = \dfrac{1}{2\pi^2\alpha'^{13}}$

この問題の解析には

弦理論の Off-shell **定式化** **(様々な真空を扱える)**
が必要 $\Rightarrow$ **SFT の出番!**

Level truncation 近似 in CSFT ('88, '99~)

弦場を $(\text{mass})^2 = L - 1$ **まで展開して** (L = Level)、

$$|\phi\rangle = \underbrace{|0\rangle\, \boldsymbol{t}}_{\text{level-0}} + \underbrace{c_{-1}b_{-1}\,|0\rangle\, \boldsymbol{u} + \alpha^{\mu}_{-1}\alpha^{\mu}_{-1}\,|0\rangle\, \boldsymbol{v}}_{\text{level-2}} + \ldots$$

Lorentz **不変・並進不変な古典解を求める**:
$\Rightarrow$ **成分場** $(t, u, v, \ldots)$ **は定数**

Level truncation 計算の結果

L	$-U(\Phi_C)/T_{25}$
0	0.684616
2	0.959377
4	0.987822
6	0.995177
8	0.997930
10	0.999182
12	0.999822
14	1.000174
16	1.000375
18	1.000494
20	1.000563

$L = 20$ **の値は** Takahashi-Kishimoto(2009) **による**

厳密解 for 非摂動論的真空

更に、今では厳密解も見つかっている:

- **高橋-谷本解** (2002): $U(\Phi_C)$ **の計算が難しい**
- Schnabl **解** (2005)

作用と EOM は Chern-Simons 理論と類似

$$\text{EOM:} \quad Q_{\mathrm{B}}\Phi_C + \Phi_C * \Phi_C = 0$$

$$S(\Phi_C) = \int \left(\frac{1}{2}\Phi_C Q_{\mathrm{B}} \Phi_C + \frac{1}{3}\Phi_C^3 \right) = -\frac{1}{6}\int \Phi_C^3$$

$\Phi_C = U Q_{\mathrm{B}} U^{-1}$(pure-gauge) **で** U **をうまく選ぶと、**

- $U(\Phi_C) = -T_{25}$
- No open-string modes around $\Phi = \Phi_C$

SFTの問題点

最後に、SFT に残された次の問題に触れる:

1. 量子 SFT(特に、Closed SFT)
2. 背景時空に依らない SFT

量子 BV 方程式

BV 方程式を満す Closed SFT action (HIKKO, Non-polynomial) は、実は、正しい Loop 振幅を再現出来ない! S-matrix Unitarity も破れる。

これを解決するには、量子 BV 方程式を満すようにSFT action を再構成する必要がある:

量子 BV 方程式

$$\sum_I \left(\frac{\partial S}{\partial \Phi_I}\right)^2 = i\hbar \sum_I \frac{\partial^2 S}{\partial \Phi_I \partial \Phi_I}$$

続 量子 BV 方程式

$S(\Phi)$ が量子 BV 方程式を満すと

- ゲージ固定した量子 SFT 作用 $\widehat{S}(\phi)$
- 量子 BRST 変換 δ_{B}

を

$$\text{SFT 経路積分:} \quad \int \mathcal{D}\phi \exp\left(\frac{i}{\hbar}\widehat{S}(\phi)\right)$$

が measure $\mathcal{D}\phi$ も含めた BRST 不変性

$$\delta_{\mathrm{B}}\left\{\frac{i}{\hbar}\widehat{S}(\phi) + \ln \mathcal{D}\phi\right\} = 0$$

を持つように与えることが出来る。

しかし、$\cdots$

量子 BV 方程式の解は

$$S(\Phi) = \underbrace{S^{(0)}(\Phi)}_{\text{古典 BVeq の解}} + \hbar S^{(1)}(\Phi) + \hbar^2 S^{(2)}(\Phi) + \dots$$

という「$\hbar$ の無限級数」の形で与えられる。

$$\Downarrow$$

複雑すぎて役に立たない!!!

なんとかしなくては....

(未だ何ともなっていない)

コメント: SFT=非局所相互作用の理論

古典 BV 方程式の解 $S^{(0)}(\Phi)$ はエルミートであるのに、何故 S-matrix unitariy が破れるのか?

相互作用 vertex $V^{(N)}$ が弦の重心座標 $x^\mu = \int_0^{2\pi} d\sigma X^\mu(\sigma)$ に関して**非局所相互作用**:

$$V^{(N)} \sim \exp\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)^2 = \exp\left[-\left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)^2 + \nabla^2\right]$$

[運動項は普通のヤツ: $Q_B \sim (\partial/\partial x^\mu)^2 + m^2$]

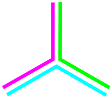
$$\Downarrow$$

SFT は正準量子化法が適用できない理論

コメント: Cubic SFT

Cubic SFT **の場合**:

$$S_{\mathrm{CSFT}} = \frac{1}{2}\Phi Q_{\mathrm{B}}\Phi + \frac{1}{3!}\underbrace{V^{(3)}_{IJK}}\,\Phi_I\Phi_J\Phi_K$$



- $t_{\text{中点}} = X^0(\frac{\pi}{2})$ **について相互作用は局所的**
  $\Rightarrow t_{\text{中点}}$ **を時間として正準量子化**(**ビミョー**?)
- $\dfrac{\partial^2 S_{\mathrm{CSFT}}}{\partial\Phi_I\partial\Phi_I} = 0$ **という "証明" もある。**

背景時空に依らない SFT 定式化?

これまでに話した SFT (特に closed SFT) は、全て特定の背景時空 (平坦時空) の周りの理論であった:

$$S(\Phi) = \frac{1}{2}\Phi Q_{\mathrm{B}}\Phi + V^{(3)}_{IJK}\Phi_I\Phi_J\Phi_K + \ldots$$

$\boxed{Q_{\mathrm{B}} \text{ が平坦計量 } \eta_{\mu\nu} \text{ を陽に含む}}$

閉弦場に含まれる graviton 場は平坦からの揺らぎ:

$$\left|\Phi_{\text{閉}}(x)\right\rangle = \alpha^{\mu}_{-1}\overline{\alpha}^{\nu}_{-1}\left|0\right\rangle h_{\mu\nu}(x) + \ldots$$

$$g_{\mu\nu}(x) \sim \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x)$$

出来ることなら、 Einstein-Hilbert action

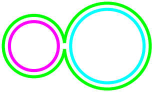
$$S_{\rm EH} = \int d^D x \sqrt{-g}\, R$$

のような、背景時空に依らない SFT が欲しい!

昔の提案 (Pregeometrical SFT)

- $V^{(N)}$ **は弦座標の接続を表わすデルタ汎関数**
  $\Rightarrow$ **背景時空には依らないだろう (形式的証明有)**
- $V^{(N\geq 4)} = 0$ **の** SFT **があれば、** $Q = 0$ **としても** BV eq **の解** $\Rightarrow V^{(3)}$ **だけで作用を作る**

$$\Downarrow$$

$$S_{\rm Pregeom.} = \frac{1}{3!} V^{(3)}_{IJK} \Psi_I \Psi_J \Psi_K \qquad V^{(3)}_{\rm HIKKO} =$$ 

元の $Q = Q_{\mathrm{B}}$ **の** SFT **は、**Pregeom. SFT **の弦場** Ψ **が期待値を持つことで再現される**:

$$\Psi = \langle\Psi\rangle + \Phi$$

$$\Downarrow$$

$$S_{\mathrm{Preg.}} = \frac{1}{2}\Phi_{\boldsymbol{I}}\underbrace{V^{(3)}_{\boldsymbol{IJK}}\langle\Psi_{\boldsymbol{K}}\rangle}_{(Q_{\mathrm{B}})_{\boldsymbol{IJ}}}\Phi_{\boldsymbol{J}} + \frac{1}{3!}V^{(3)}_{\boldsymbol{IJK}}\Phi_{\boldsymbol{I}}\Phi_{\boldsymbol{J}}\Phi_{\boldsymbol{K}}$$

となるような、EOM: $V^{(3)}_{IJK}\langle\Psi_J\rangle\langle\Psi_K\rangle = 0$ **の解** $\langle\Psi\rangle$ **を与える事が出来る。**

弦場の凝縮により、運動と幾何が発生する

しかし...

以上のような Pregoemetrical SFT **の形式論はできるが、それを用いて** “**おもしろい物理**” **をやるには至っていない。**

やっぱり、もっと「うまい理論」が欲しい!

しかし...

以上のような Pregoemetrical SFT **の形式論はできるが、それを用いて“おもしろい物理”をやるには至っていない。**

やっぱり、もっと「うまい理論」が欲しい!

背景時空に依らない
量子論的にも完全な
閉弦の場の理論

しかし...

以上のような Pregoemetrical SFT の形式論はできるが、それを用いて "おもしろい物理" をやるには至っていない。

やっぱり、もっと「うまい理論」が欲しい!

背景時空に依らない
量子論的にも完全な
閉弦の場の理論

まったく新しい原理/発想が必要?

ご清聴ありがとうございました。