

On quantum corrections of a string world sheet for a Wilson loop in the AdS/CFT correspondence

日大理工 三輪光嗣

第4回日大理工・益川塾連携素粒子物理学シンポジウム
2014年11月8・9日 京都産業大学むすびわざ館

目次

- 背景と動機
- N. Drukkerの提案
- 破れたゼロモードの具体形
- 相関関数への応用
- 課題と展望

背景と動機

AdS/CFT対応

[Maldacena '98]

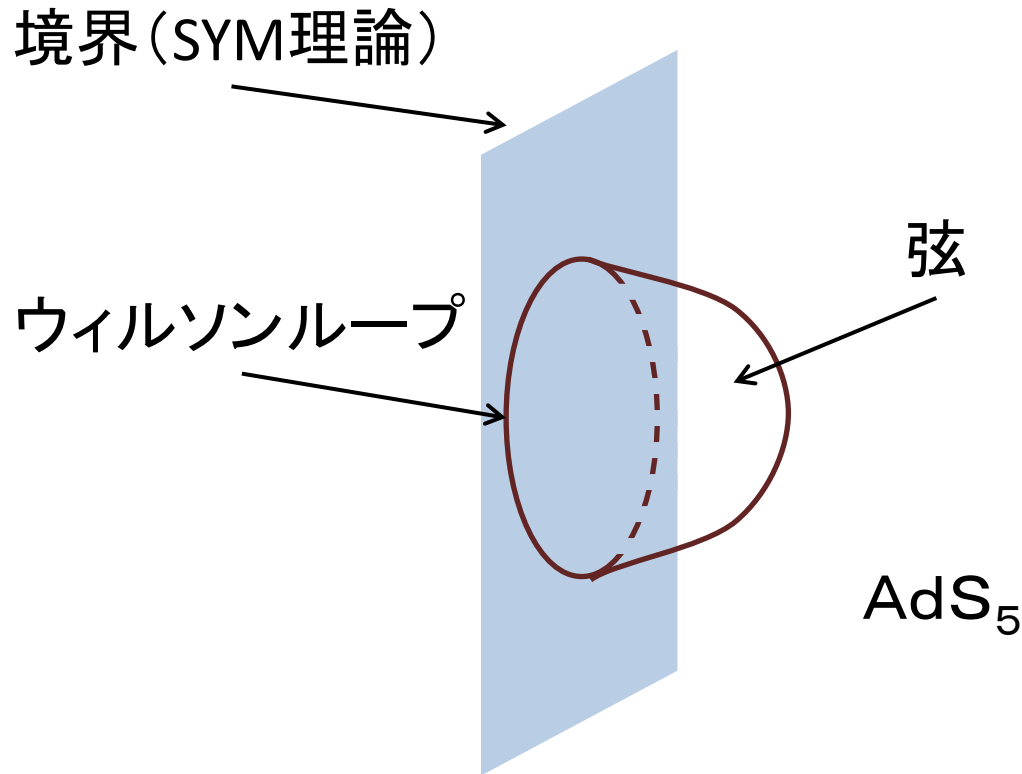
Superstring theory
on $\text{AdS}_5 \times S^5$ space \Leftrightarrow 4-dim 4 SUSY SYM

- 様々な分野で応用されている。
- 対応そのものの理解もまだ不十分。

⇒ 研究の目標: 対応そのものの検証

AdS/CFT対応におけるウィルソンループ

[Rey-Yee '98; Maldacena '98]



$$\langle W(C) \rangle_{\text{gauge}} = \int e^{-S_{\text{string}}}$$

強結合 \Leftrightarrow 古典弦

1/2BPS円形ウィルソンループの期待値: 変形ベッセル関数

$$\langle W(C) \rangle_{\text{gauge}} = \frac{2}{\sqrt{\lambda}} I_1(\sqrt{\lambda}) + \frac{1}{N^2} \frac{\lambda}{48} I_2(\sqrt{\lambda}) + \dots$$

$N \rightarrow \infty$

強結合 \downarrow

[Erickson-Semenoff-Zarembo '00;
Drukker-Gross '00, Pestun '07]

$$\sqrt{\frac{2}{\pi \lambda^{3/2}} e^{\sqrt{\lambda}}}$$

$$\int e^{-S_{\text{string}}} = \int \text{[sphere]} + \int \text{[cylinder]} + \dots$$

$N \rightarrow \infty$

$$S_{\text{string}} = \sqrt{\lambda} \int d^2\sigma \mathcal{L}$$

古典解 \downarrow

$$e^{\sqrt{\lambda}}$$

[Berenstein-Corrado-Fischler-Maldacena '98;
Drukker-Gross-Ooguri '99]

ディスクへの量子補正の計算

$$\int e^{-S_{\text{string}}} = e^{-S_{\text{classical}}} \times \int e^{-S_{\text{fluctuation}}}$$

揺らぎの1ループ計算 → 発散の処理などで難航
(円形ウィルソングループの期待値)

[Drukker-Gross-Tseytlin '00;
Kruczenski-Tirziu '08;
Kristjansen-Makeenko '12]

ところが ...

特殊な状況ではベッセル関数そのものを出せる！！

[Drukker '06]

N. Drukker の提案

1/4BPSウィルソンループ

[Drukker '06]

$$W_{\theta_0}(C) = \frac{1}{N} \text{trP} \exp \oint \left(iA_\mu \dot{x} + |\dot{x}| \Phi_I \underline{\theta}_I \right) d\tau$$

$$x^\mu(\tau) = (a \cos \tau, a \sin \tau, 0, 0)$$

$$\underline{\theta}_I(\tau) = (\sin \underline{\theta}_0 \cos \tau, \sin \underline{\theta}_0 \sin \tau, \cos \underline{\theta}_0, 0, 0, 0)$$

θ_0 : 演算子のパラメータ

(これらが弦の世界面に対して境界条件を与える。)

ゲージ理論側での期待値計算:

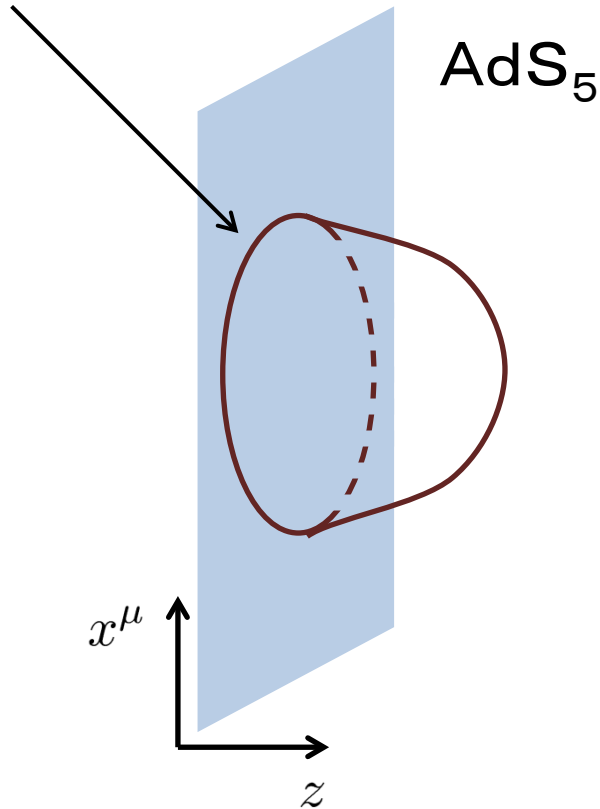
$$\langle W_{\theta_0}(C) \rangle \sim \frac{2}{\sqrt{\lambda'}} I_1(\sqrt{\lambda'}) \quad (\sqrt{\lambda'} = \cos \theta_0 \sqrt{\lambda})$$

$$(N \rightarrow \infty)$$

対応する弦 (AdS₅部分)

[Drukker '06]

$$x^\mu(\tau) = (a \cos \tau, a \sin \tau, 0, 0)$$



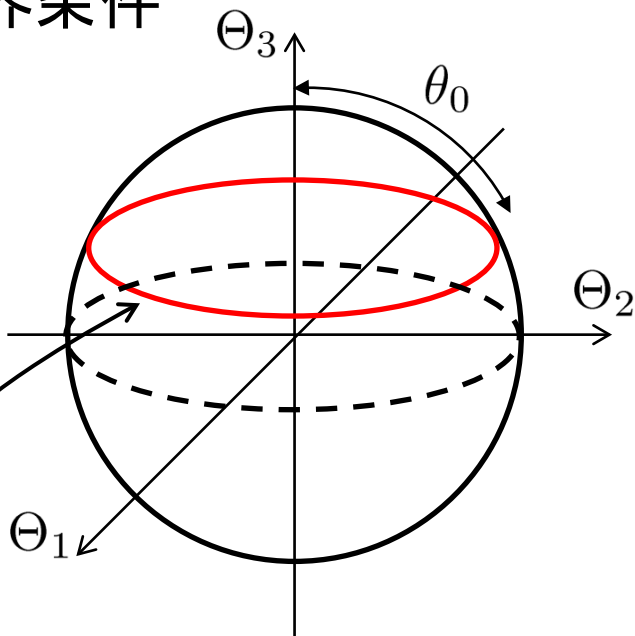
$$\begin{aligned} z &= a \tanh \sigma \\ x^1 &= a \frac{\cos \tau}{\cosh \sigma} \\ x^2 &= a \frac{\sin \tau}{\cosh \sigma} \\ x^3 &= 0 \\ x^4 &= 0 \end{aligned}$$

(以降AdS部分は常にこの配位)

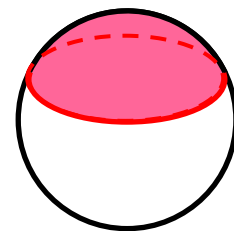
対応する弦 (S⁵部分)

[Drukker '06]

境界条件

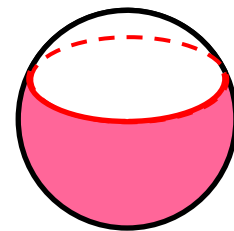


$$\theta_I(\tau) = (\sin \theta_0 \cos \tau, \sin \theta_0 \sin \tau, \cos \theta_0, 0, 0, 0)$$



上に閉じる解

$$e^{-S_{\text{classical}}} = e^{\sqrt{\lambda}'}$$



下に閉じる解

$$e^{-S_{\text{classical}}} = e^{-\sqrt{\lambda}'}$$

変形ベッセル関数の
積分表示の二つの鞍点を再現

$$\Theta_1 = \frac{\cos \tau}{\cosh(\sigma_0 \pm \sigma)}, \quad \Theta_2 = \frac{\sin \tau}{\cosh(\sigma_0 \pm \sigma)}, \quad \Theta_3 = \tanh(\sigma_0 \pm \sigma), \quad \Theta_{4,5,6} = 0$$

$$(\tanh \sigma_0 = \cos \theta_0)$$

ゼロモード

[Drukker '06]

$$\cos \theta_0 = 0 \quad \rightarrow \quad \theta_I(\tau) = (\cos \tau, \sin \tau, \underline{0, 0, 0, 0})$$

$$\Theta_1 = \frac{\cos \tau}{\cosh \sigma}$$

$$\Theta_2 = \frac{\sin \tau}{\cosh \sigma}$$

$$\Theta_3 = \tanh \sigma \cos \alpha$$

$$\Theta_4 = \tanh \sigma \sin \alpha \cos \beta$$

$$\Theta_5 = \tanh \sigma \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma$$

$$\Theta_6 = \tanh \sigma \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

$$\langle W(C) \rangle = \int e^{-S}$$

$$\sim \int d\Omega_3 e^{-S(\alpha, \beta, \gamma)} = 1$$

$$S(\alpha, \beta, \gamma) = 0$$

$$\left(d\Omega_3 = \frac{1}{2\pi^2} d\alpha d\beta d\gamma \sin^2 \alpha \sin \beta \right)$$

S³対称性

破れたゼロモード

[Drukker '06]

$$\cos \theta_0 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \theta_I(\tau) = (\sin \theta_0 \cos \tau, \sin \theta_0 \sin \tau, \cos \theta_0, 0, 0, 0)$$

対称性が破れる

$\cos \theta_0 \rightarrow 0$ の極限でゼロモード $\alpha\beta\gamma$ になる
弦の配位 $\alpha\beta\gamma$ を見つける

$$S(\alpha, \beta, \gamma) \Rightarrow \alpha \text{ 依存} \Rightarrow \alpha\beta\gamma \text{ 積分を試みる}$$

考える極限:

- ① $\cos \theta_0 \rightarrow 0$: 破れが小さい (破れたゼロモードは軽い)
- ② $\sqrt{\lambda} \rightarrow \infty$: 一般的な揺らぎは禁止

$$\sqrt{\lambda'} = \cos \theta_0 \sqrt{\lambda} : \text{有限}$$

破れたゼロモード

[Drukker '06]

破れたゼロモードの積分:

$$\begin{aligned}\langle W(C) \rangle &= \int e^{-S} \\ &\sim \int d\Omega_3 e^{-S(\alpha, \beta, \gamma)} = \int d\Omega_3 e^{\underline{\cos \alpha \sqrt{\lambda'}}} = \frac{2}{\sqrt{\lambda'}} I_1(\sqrt{\lambda'})\end{aligned}$$

$$\left(d\Omega_3 = \frac{1}{2\pi^2} d\alpha d\beta d\gamma \sin^2 \alpha \sin \beta \right)$$

破れたゼロモードの具体形

破れたゼロモードの具体形

$$\Theta_1 = f(\alpha, \sigma) \cos \tau$$

$$\Theta_2 = f(\alpha, \sigma) \sin \tau$$

$$\Theta_3 = f(\alpha, \sigma) (\cosh \sigma_0 \sinh \sigma \cos \alpha + \sinh \sigma_0 \cosh \sigma)$$

$$\Theta_4 = f(\alpha, \sigma) \sinh \sigma \sin \alpha \cos \beta$$

$$\Theta_5 = f(\alpha, \sigma) \sinh \sigma \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma$$

$$\Theta_6 = f(\alpha, \sigma) \sinh \sigma \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

$$f(\alpha, \sigma) = \frac{1}{\cosh \sigma_0 \cosh \sigma + \sinh \sigma_0 \sinh \sigma \cos \alpha}$$

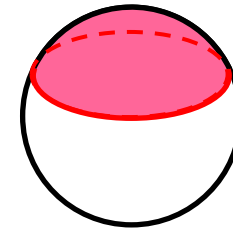
$(\sigma, \tau, \alpha, \beta, \gamma)$ で S^5 の座標系を与える。

$$ds_{S^5}^2 = f(\alpha, \sigma)^2 \left(d\sigma^2 + d\tau^2 + \sinh^2 \sigma (d\alpha^2 + \sin^2 \alpha (d\beta^2 + \sin^2 \beta d\gamma^2)) \right)$$

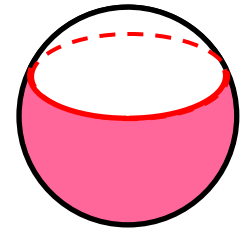
$$(0 \leq \tau < 2\pi, 0 \leq \sigma < \infty, 0 \leq \alpha < 2\pi, 0 \leq \beta < \pi, 0 \leq \gamma < \pi,)$$

破れたゼロモードの性質

- ✓ $(\sigma, \tau, \alpha, \beta, \gamma)$ で S^5 の座標となっている。
- ✓ ビラソコ条件を満たす。
- ✓ $\sigma=0$ の境界条件を満たす。
- ✓ $\alpha=0$ 、 $\alpha=\pi$ が古典解に対応する。
- ✓ $\cos\theta_0=0$ ではゼロモードに帰着する。
- ✓ $S(\alpha, \beta, \gamma) = -\cos\alpha (\lambda')^{1/2} \rightarrow$ ベッセル関数を再現する。



$\alpha=0$



$\alpha=\pi$

相関関数への応用

相関関数

$$\langle W_{\theta_0}(C) \mathcal{O}_J(\vec{x}) \rangle \quad \left(\mathcal{O}_J = \frac{(2\pi)^J}{\sqrt{J\lambda^J}} \text{tr}(\Phi_3 + i\Phi_4)^J \right)$$

$\left[\begin{array}{l} J: \text{弦理論では } (\Theta_3, \Theta_4) \text{ 平面内での} \\ \text{角運動量に対応} \end{array} \right]$

ゲージ理論側の計算結果

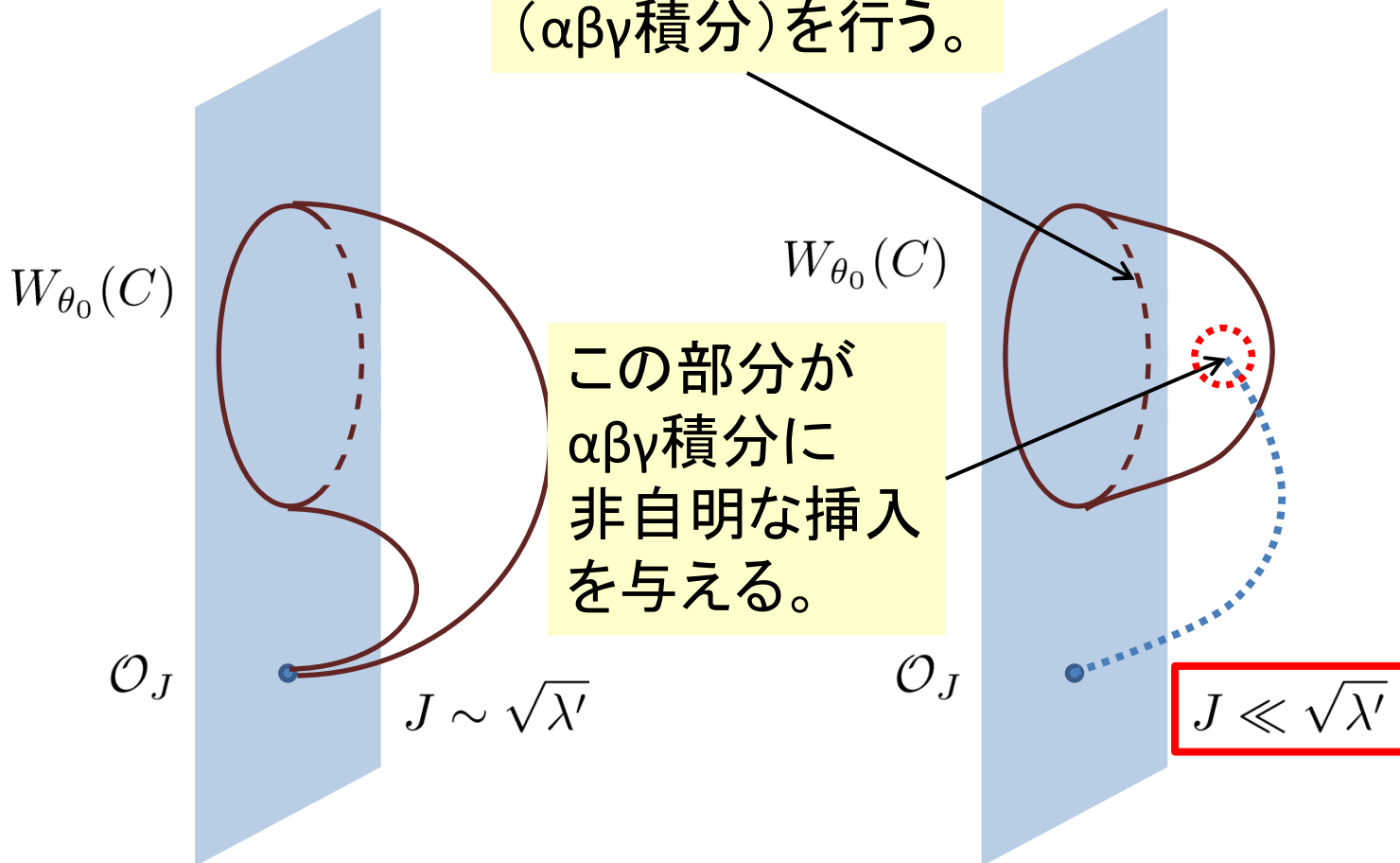
$$\langle W_{\theta_0}(C) \mathcal{O}_J(\vec{x}) \rangle \underset{(N \rightarrow \infty)}{\sim} \frac{1}{N} \frac{a^J}{\ell^{2J}} \sqrt{J} I_J(\sqrt{\lambda'})$$

[Semenoff-Zarembo '01; Semenoff-Young '06]

弦理論の計算

[Berenstein-Corrado-Fischler-Maldacena '98; Zarembo '02;
Semenoff-Young '06; Giombi-Pestun '13; Enari-Miwa '13]

世界面の足し上げ
($\alpha\beta\gamma$ 積分)を行う。



ベッセル関数・・・

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{J}}{N} \frac{a^J}{\ell^{2J}} \frac{\sqrt{\lambda'}}{2} \int d\Omega_3 \cos \alpha (\cos \alpha + i \sin \alpha \cos \beta)^J e^{\cos \alpha \sqrt{\lambda'}} \\ = \frac{1}{N} \frac{a^J}{\ell^{2J}} \sqrt{J} \left[I_J(\sqrt{\lambda'}) - \frac{J+2}{\sqrt{\lambda'}} I_{J+1}(\sqrt{\lambda'}) \right] \\ = \frac{1}{N} \frac{a^J}{\ell^{2J}} \sqrt{J} I_J(\sqrt{\lambda'}) \left[1 + \mathcal{O}(J/\sqrt{\lambda'}) \right] \end{aligned}$$

ゲージ理論:

$$\langle W_{\theta_0}(C) \mathcal{O}_J(\vec{x}) \rangle \sim \frac{1}{N} \frac{a^J}{\ell^{2J}} \sqrt{J} I_J(\sqrt{\lambda'})$$

$J \ll \sqrt{\lambda'}$ のパラメタ領域なら良さそう。

この領域で $I_J(\sqrt{\lambda'}) \sim e^{\sqrt{\lambda'}}$ だと悲しいが・・・

変形ベッセルの漸近展開

$$I_J(\sqrt{\lambda'}) \sim \frac{e^{\sqrt{\lambda'}}}{\sqrt{2\pi\sqrt{\lambda'}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \prod_{m=1}^n \left(-\frac{J^2 - \frac{(2m-1)^2}{2^2}}{2\sqrt{\lambda'}} \right) + \dots \quad (J \ll \sqrt{\lambda'})$$

$\sqrt{\lambda'} \lesssim J^2$ なら非自明な $\sqrt{\lambda'}$ 依存が残る。

$$I_J(\sqrt{\lambda'}) \sim \frac{e^{\sqrt{\lambda'}}}{\sqrt{2\pi\sqrt{\lambda'}}} \times \exp\left(-\frac{J^2}{2\sqrt{\lambda'}}\right) \quad [\text{Zarembo '02}]$$

Mathematica による数値計算 ($\sqrt{\lambda'} = 10000$)

J	2	10	100	1000
$\frac{e^{\sqrt{\lambda'}}}{\sqrt{2\pi\sqrt{\lambda'}}} \frac{1}{I_J(\sqrt{\lambda'})}$	1.00019	1.005	1.6487	4.986×10^{21}
$1 - \frac{J+2}{\sqrt{\lambda'}} \frac{I_{J+1}(\sqrt{\lambda'})}{I_J(\sqrt{\lambda'})}$	0.9996	0.9988	0.9899	0.9093

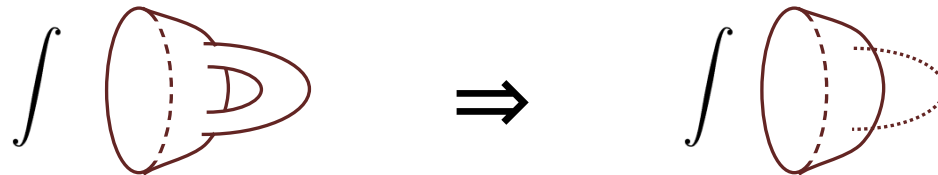
課題と展望

課題と展望

- ピタッと合わせられるか？
 - 角運動量を持った世界面を考える。
 - (積分測度の定義をきちんと考える。)

- 摂動論的な計算との関係？

- 高いジーナスの場合に応用(出来るか??)



一般性について少し

$$\Theta_1 = \left(\frac{1}{\cosh \sigma} + \tanh \sigma_0 \underline{x(\alpha, \sigma)} \right) \cos \tau$$

$$\Theta_2 = \left(\frac{1}{\cosh \sigma} + \tanh \sigma_0 \underline{x(\alpha, \sigma)} \right) \sin \tau$$

$$\Theta_3 = \tanh \sigma \cos \alpha + \tanh \sigma_0 \underline{y(\alpha, \sigma)}$$

$$\Theta_4 = \left(\tanh \sigma \sin \alpha + \tanh \sigma_0 \underline{z(\alpha, \sigma)} \right) \cos \beta$$

$$\Theta_5 = \left(\tanh \sigma \sin \alpha + \tanh \sigma_0 \underline{z(\alpha, \sigma)} \right) \sin \beta \cos \gamma$$

$$\Theta_6 = \left(\tanh \sigma \sin \alpha + \tanh \sigma_0 \underline{z(\alpha, \sigma)} \right) \sin \beta \sin \gamma$$

$$\Theta_I^2 = 1 \text{、ビラソロ条件} \rightarrow S = -\cos \alpha \sqrt{\lambda'}$$

(これらは $\sigma_0 \rightarrow 0$ で消えるので、新たなゼロモードは含まれない)

弦理論の計算

O_J に対応する揺らぎ:

[Berenstein-Corrado-Fischler-Maldacena '98;
Semenoff-Young '06; Giombi-Ricci-Trancanelli '06]

$$G_{MN} = g_{MN} + h_{MN}$$

$$h_{\mu\nu}^{\text{AdS}} = \left[-\frac{6J}{5} g_{\mu\nu}^{\text{AdS}} + \frac{4}{J+1} D_{(\mu} D_{\nu)} \right] (s^J Y_J) \quad \left(Y_J = \left(\frac{\Theta_3 + i\Theta_4}{\sqrt{2}} \right)^J \right)$$
$$h_{\alpha\beta}^{\text{S}} = 2J g_{\alpha\beta}^{\text{S}} (s^J Y_J)$$

$$s^J(\vec{x}, z) = \int d^4 x' \left(\frac{z}{z^2 + |\vec{x} - \vec{x}'|^2} \right)^J s_0^J(\vec{x}')$$

$$\int d\Omega_3 \left[\frac{\delta}{\delta s_0^J(\vec{x})} \left[\exp \left(-\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d^2\sigma G_{MN} \partial_a X^M \partial_a X^N \right) \right]_{s_0^J=0} \right]$$

今回の計算