1　命題論理

命題３・１　　いくつかの等式の証明

第一分配律

$$v(A \wedge (B \vee C)) = v((A \wedge B) \vee (A \wedge C))$$

左辺が T ということは、
$v(A) = T$　かつ　$v(B \vee C) = T$
すなわち、$v(A) = T$ かつ “$v(B) = T$ または $v(C) = T$”
言い換えると、 $v(A) = T$ であり、また、$v(B)$ と $v(C)$ の少なくとも一方が T。
ゆえに、“$v(A) = T$ で、かつ $v(B) = T$” であるか、または、$v(A) = T$ で、かつ $v(C) = T$”
これを記号化すると、右辺になる。

真・偽

$$v(A \vee \neg A) = T$$

$v(A \vee B) = T$ になるのは、(1) $v(A) = T$ であるか、または (2) $v(\neg A) = T$ のときである。$v(A) = T$ ならば (1) のケースである。$v(A) = F$ ならば、$v(\neg A) = T$ なので、(2) のケースである。いずれにしても (1),(2) のどちらかは成り立つ。ゆえに $v(A \vee \neg A)$ は恒に T である。
$v(X) = F$ のとき、 $v(A \vee X) = v(A)$
$v(X) = F$ とする。$v(A) = T$ のとき、$v(A), v(X)$ の少なくとも一方が T という条件が成り立つので、$v(A \vee X) = T$。$v(A) = F$ のとき、$v(A), v(X)$ の両方とも F なので、$v(A \vee X) = F$。いずれにしても、$v(A)$ と $v(A \vee X)$ はつねに等しい。

命題３・３について
この命題は大事である。論理結合子４個のうち、$\neg$ と $\wedge$、または $\neg$ と $\vee$ のそれぞれ２個で十分であることが分かる。
いくつか証明する。

$$v(A \wedge B) = T \Leftrightarrow v(A) = T \quad \text{かつ} \quad v(B) = T$$

$$v(\neg(\neg A \vee \neg B)) = T \Leftrightarrow v(\neg A \vee \neg B) = F$$

$$\Leftrightarrow v(\neg A) = F, v(\neg B) = F \Leftrightarrow v(A) = t \quad \text{かつ} \quad v)B = T$$

$$v(A \Rightarrow B) = F \Leftrightarrow v(A) = T \quad \text{かつ} \quad v(B) = T \quad \text{でない}$$

$$\Leftrightarrow v(A) = T, v(\neg B) = T \Leftrightarrow v(A \wedge \neg B) = T \Leftrightarrow v(\neg(A \wedge \neg B)) = F$$