数学：私の歩き方

八杉満利子　京都産業大学・理学部
yasugi@cc.kyoto-su.ac.jp
http://www.kyoto-su.ac.jp/ yasugi/index-j.html

参考文献

「ゲーデルの謎を解く」林晋、岩波書店

「論理パズルとパズルの論理」八杉満利子・林晋、遊星社

「お話・数学基礎論」 八杉満利子・林、講談社

「お話＜論理パズルの論理学＞」八杉満利子
http://www.kyoto-su.ac.jp/ yasugi/easyprop-j.html

「集合と論理２００３」　八杉満利子
http://www.kyoto-su.ac.jp/ yasugi/Education/prop03-j.html

「論理とプログラム２００３」　八杉満利子
http://www.kyoto-su.ac.jp/ yasugi/Education/ronpro03-j.html

集合のパラダイス

集合って何？

たとえば　　果物籠

$$B = \{\text{ みかん、りんご }\}$$

無数にみかんが入ってる籠もあるよ！

$$A = \{m_1, m_2, m_3, \cdots, m_n, m_{n+1} \cdots, \}$$

集合で遊ぼ

二つの同窓会で会った人々

どちらかの同窓会で会った人々

みかんが欲しい？りんごが欲しい？
両方？どっちも要らない？

果物籠はいくつできた？

$$2^2 = 4$$

$$2^3 = 8$$

あ国語

$$あ, ああ, あああ, ああああ, \cdots, あああ\cdots ああ, \cdots$$

あ語が番号と握手！

$$あ \leftrightarrow 1, ああ \leftrightarrow 2, \cdots, ああ\cdots ああ \leftrightarrow n \cdots$$

あ語を盛った籠を並べよう！

籠たちと番号をデートさせよう！
どうなるかな？
はみだし君がいる！かわいそう！

集合で遊んでどうなるの？

数学ができるんだ！

あ語は正の整数

あ語盛りの籠は実数

もっともっと大きな集合もある

勝手に大きな集合考えてだいじょうぶ？

大丈夫じゃない！

どうしたらいい？

集合の世界を整備しよう

どうやって？

論理ゲームにするの

論理学の世界の旅の始まり

集合のパラダイスに地雷があった

$$sakura = \{x | x \notin x\}$$

$$sakura \in sakura \Rightarrow sakura \notin sakura$$

$$sakura \notin sakura \Rightarrow not sakura \notin sakura$$

$$\Rightarrow sakura \in sakura$$

入っているとすると入っていない

入っていないとすると入っている
何か変だ。パラドックス！

何でも集合にするのがいけないんだ！

床屋さんのパラドックス

桜村の太郎兵衛さんは床屋さん。
太郎兵衛さんの看板
「私は、桜村の住人で自分の髭を剃らないすべての人の髭を剃ります。また、そういう人の髭だけを剃ります」
太郎兵衛さんは桜村の住人です。太郎兵衛さんは自分の髭を剃りますか？剃りませんか？

論理パズルで遊ぼ

花のパズル

アキ　「この花は昼顔か夕顔なんだけど」
ノゾミ「これって昼顔じゃないよ」
カズホ「それじゃこの花は夕顔ね」
アキとノゾミの発言が正しいときに、カズホは正しい？

書き換え

アキ「この花は昼顔である、かまたは、この花は夕顔である」
ノゾミ「この花は昼顔ではない」
カズホ「（アキとノゾミの発言が正しいとすると）この花は夕顔である」

文章を符号で表す

「この花は昼顔である」を○
「この花は夕顔である」を◇

花のパズルの答え方

規則１　「○または◇」が正しいのは、○か◇の少なくとも一方が正しいとき。

規則２　「○でない」が正しいのは、○が正しくないとき。

アキ「○と◇のすくなくとも一方が正しい」

ノゾミ「○はうそ」

カズホ「◇が正しい」

カズホは正しい！

パズルの論理

文章は四個の接続詞で十分なのだ！

$$\neg(\text{でない}), \wedge(\text{そして}), \vee(\text{または}), \Rightarrow (\text{ならば})$$

アキ「○ ∨ ◇」
ノゾミ「¬○」
カズホ「◇」

パズルを解くのは**命題論理**

果物屋さんの論理

果物屋さんのセール

「さあ、買った、買った！
この箱の中のみかんはみんなおいしいよ！」

「ほんと？」

「箱の中のみかん食べてごらん、
おいしいだろ？」

ほんとにおいしい？

果物屋さん

「すべての物について、それが箱の中のみかんならば、それはおいしい」

規則１　「すべての物についてある性質が正しい」とき、「個別の物についても正しい」　（全称命題の特殊化）

規則２　「〇ならば◇」が正しく〇が正しいとき、◇も正しい。（三段論法）

ある性質：箱の中に入っているならば、おいしい

　果物屋さんの発言が正しいとしよう。

規則１より、一つのみかんについて

　「そのみかんが箱の中に入っているならば、そのみかんはおいしい」
箱の中のみかんを食べてみよう。

規則２により、「そのみかんはおいしい」

やっぱりおいしい！

論理で書くと

$$\forall x(x \text{ は箱の中に入っているみかん} \Rightarrow x \text{ はおいしい})$$

果物屋さんが正しいことをどうやって確かめる？

　果物屋さん
「この箱の中には大きいみかんも小さいみかんもあるよ」

箱の中のみかんについて

$$\exists x(x\text{ は大きい}) \land \exists x(x\text{ は小さい})$$

果物屋さんの論理は**述語論理**

述語論理を使えば集合のパラダイスのできごとはきちんと書ける。だから、
数学もきちんと書ける。

論理の規則を使ってゲームみたいに数学ができる！

ゲームばかりしててはだめ

ゲーデル文の怪

「この文はまちがっている」

で、この文はまちがってる？
「この文はまちがている」をゲーデル文と呼ぼう。

ゲーデル文「ゲーデル文はまちがっている」

コード化されたゲーデル文は正しい数学の式！
でも数学のゲームでは証明できない。

私の歩いた道

論理はもっといろいろある

数学はどんな論理で成り立っているか？

長くて終わりのない道

ちょっと飽きた！

そして２１世紀

論理と情報は仲間だった。そして数学も！

論理でプログラムの仕様を書く
数学の定理からプログラムを抽出する

コーヒーブレイク：「数学の中の計算」