仲よしのロジック

八杉満利子 林晋

平成11年 5月 17日

目 次

表 目 次

Chapter 1

論理パズルってなに？

1.1　仲良しの日曜日

日曜日の朝に彩希が一穂に電話をかけて

「お昼食べたら淳子のお誕生日のプレゼント買いに行かない？」

と誘います。三人は大の仲良しです。一穂は先にピアノのおけいこレッスンをしておきたいので、

「お昼までにピアノのレッスンが終わったら行く。でも、もし終わらなかったらもうちょっと後にして」

と答えます。一穂は大好きなショパンのマズルカを何回か弾いて、これなら明日先生に見ていただいてもだいじょうぶ、とにっこり。お昼も食べて、さあ、一穂はショッピングに行くでしょうか？

もちろん行きますね。

二人は、おしゃれなアクセサリストアに出かけます。でも、何を買うかは決めていません。まず手分けして見てから決めよう、ということになりました。一穂は

「彩希がハンカチ売場に行くんなら、私はソックス売場に行く」

といいます。１０分後に入り口で会うことにして、彩希はハンカチ売場に行きます。それで、一穂はソックス売場に行くでしょうか？

もちろん行きますね。

この二つの質問に「もちろんイエスよ」と、すぐ答えが出たのはなぜでしょうか。最初は買い物とピアノ、次はハンカチとソックス、というように、ぜんぜんちがう話です。でも答えの出し方はどこか似ていませんか？

その次の土曜日に、彩希と一穂は淳子を訪ねます。バースデーパーティにおよばれしているのです。まだ少し早いので、淳子が出てきて三人はポーチに腰かけます。彩希と一穂は、ピンクのリボンをかけたプレゼントを渡しながら、

「ハッピーバースデー、淳子。ハンカチにしようかソックスにしようか迷ったんだけど」

淳子は嬉しそうに受け取って、

「それでどっち？」

と聞きます。一穂は

「これがソックスならば、これはソックスじゃないの」

と、変な返事をします。一穂は正直な女の子ですから、いつでも本当のことを言います。さてこの中身はソックスでしょうか、ちがうのでしょうか？

これにはちょっとは頭をひねるかな？

答えを教えてしまいましょう。もしも

プレゼントがソックス

だとすると、一穂の言ったことから、

これはソックスじゃない

ということになります。一つの物が、ソックスで、しかもソックスではない、なんておかしいですね。ということは、プレゼントがソックスだと考えるのがいけなかったのです。だからぷれぜんとはソックスではありません。二人は、ハンカチを選んだのですね。

三人は外で話していたので、風が吹いたら淳子がくしゃみをしました。「花粉症？」とほかの二人が聞くと、淳子は

「私が花粉症なら、私は花粉症じゃないの」

と答えます。淳子も正直な女の子です。さて、淳子は花粉症でしょうか。

もしも

淳子が花粉症

ならば、淳子が言ったことから

淳子は花粉症ではない

ということになります。つまり淳子は花粉症であって、しかも花粉症ではない、というおかしなことになります。ということは、淳子が花粉症だとしたことがいけないのです。だから、淳子は花粉症ではありません。ちょっと風にむせただけなのです。

ソックスと花粉症、二つのことはちがう話題なのに、答えの求め方は似ていませんか?というより、同じであることに気づきませんか?

1.2 論理パズル

皆さんはいろんなパズルを知っているでしょう。たとえば、ジグソーパズルは、たくさんのピースの形をあわせながら、絵を作っていくものですね。また、クロスワード パズルを解くためには、国や町の名前とか、英語の単語とか、いろいろ知識が必要です。

彩希と一穂と淳子の会話について、私が皆さんにいろいろな質問をしました。質問はどれも「...ですか、...ではないですか？」というもので、答えはいつもイエスかノーでした。答えの出し方は、話の中身にはあまり関係なさそうでした。

こういう質問は、論理パズルというものの一種です。論理パズルというのは、登場人物や町の名前などには関係なく、文章の作り方だけから答えが出るようなパズルのことです。

ソックスと花粉症の話を、パズルとして書き直してみましょう。

ソックス

「これがソックスならば、これはソックスじゃないの」が本当ならば、これはソックスでしょうか？

花粉症

「私が花粉症ならば、私は花粉症じゃないの」が本当ならば、私は花粉症でしょうか？

二つをくらべてみてください。どちらも

♡♡ならば♡♡でない

という文章が正しいとき、

♡♡は正しいか？

という形をしています。こういうパズルを出されたら、イエスかノーで答えることになります。つまり、♡♡が正しいか正しくないか、ということを聞かれているのです。

前にも説明したように、このパズルは、次のようにして解くことができます。

♡♡が正しいとしましょう。かっこの中の文章が正しいのですから、このとき、♡♡ではないことになります。つまり♡♡が正しくてしかも正しくない、言いかえれば

♡♡は本当で、しかもうそである

ということになります。そんなはずはないから、最初に「♡♡が正しい」としたのが間違いです。ということは、♡♡は正しくないのです。パズルの答えはノーです。

♡♡を「これはソックス」や「私は花粉症」で置きかえると、もとのパズルになります。

ここで答えを出すために使っているのは、「ならば」と「でない」ということばの意味と、それらによる文章のつながり具合だけなのです。話題になっているソックスや花粉症が何なのか、ということは関係ありません。

「ならば」や「でない」ということばの意味は、現実の物やできごとなどには関係ありません。人の頭の働きだけで理解できるものです。「ならば」は、あることがほかのことから導かれることを表す

接続詞です。「でない」は、あることの反対を表す助動詞です。これらのことばから何か結論を引き出すための法則を、**論理**といいます。だからソックスと花粉症のパズルは、**論理パズル**と呼ばれるのです。

これから、論理パズルの解き方を説明していきます。それには、命題論理という道具を使います。

「論理なんて、聞いただけでめんどくさそう、頭痛がする」
なんて思わないでくださいね。ゲームみたいにパズルが解ければ面白いし、私たちの頭の働きである論理について学ぶのもいい気分ですよ。

やってみよう！

まず論理パズルをいくつか出しておきます。ここでは論理にこだわらずに解いてみてください。問題の 4~7 は文献 [?] から借りてきました。[?] には詳しい解き方も書いてあります。

1. **猫の健康**

   「賢い猫は健康だ」と信じている人がいます。つまり、猫について

   （＊）賢ければ、健康である

   ということです。さて、下の（１）、（２）、（３）のうち、（＊）から導かれるのはどれでしょうか？（これらはすべて猫についての命題です。）

   （１） 健康でないか、または賢い。

（２） 健康であるか、または賢くない。

（３） 賢いか、または健康である。

2. **メルヘンの謎**

   彩希「もし私が人魚なら一穂は雪の女王じゃない、っていうのはうそ」

   淳子「それじゃあ、本当は彩希が人魚で一穂が雪の女王ってわけね」

   彩希の言ったことから、淳子の結論はでるでしょうか？

3. **魔女の謎**

   淳子「私が人魚なら彩希は魔女よ」

   一穂「それじゃあ、淳子が人魚で彩希が魔女でない、ってことはないわけね」

   淳子の言ったことから、彩希の結論はでるでしょうか？

4. **競歩と旅行** [?] $Q20$ 51 ページ

   「女の子は、競歩が好きでないのなら、旅行が好きである」

   これが真実なら、旅行も競歩も好きでない者のなかに、女の子は、

   I いる。

   II いない。

   III いるかもしれないし、いないかもしれない。

5. **スフィンクスの謎** [?] $Q63$ 165 ページ

   ギリシャ神話のスフィンクスは女性の頭と胸をもつ怪物で、彼女は道行く人に謎をかけ、解けなかった者を食い殺しました。その恐ろしいスフィンクスの謎とは次のようなものです。

   「これがマーメイドであるなら、これはスフィンクスである」が偽であるとすると、

   A:「これがスフィンクスなら、これは女性である」

   B:「これがスフィンクスなら、これは女性ではない」

   この二つの文の真偽は？

   1. A は真で、B は偽。
   2. A は偽で、B は真。
   3. A、B どちらも真。
   4. A、B どちらも偽。

6. **私は不死身** [?] $Q71$ 209 ページ

   「私が危険を冒すなら、私はケガをする」であるならば、私は危険を冒さない。そして、私は危険を冒す。ゆえに私はケガをしない。この論理はただしい？

7. **理性的？** [?] 7 – 3 171 ページ

「慎み深い、かつ、快楽主義」ならば懐疑的である。
慎み深いならば「懐疑的か理性的」である。
快楽主義であれば理性的である。このとき、次のどれは結論できて、どれは結論できないか？

(a) 「慎み深い、かつ、快楽主義」であれば理性的である
(b) 「懐疑的、かつ、快楽主義」であれば理性的である
(c) 「慎み深い、かつ、懐疑的} であれば理性的である

1.3 パズルの論理

はじめにでてきた二つの問題を考えてみましょう。問題に名前をつけて、もう一度書きます。

ピアノ
一穂が「お昼までにピアノのレッスンが終わったらショッピングに行く」と言いました。レッスンはお昼までに終わりました。さあ、一穂はショッピングに行くでしょうか？

ショッピング
一穂が「彩希がハンカチ売場に行くのなら、私はソックス売場に行く」と言いました。そして彩希はハンカチ売場に行きます。それで、一穂はソックス売場に行くでしょうか？

どちらの問題にも、二つの条件があります。

（１） あることが起こったら、それによって必ず別なことが起こる

という第一の条件と、

（２） 最初の「あること」が実際に起こる

という第二の条件です。「あることが起こる」という第二の条件がなりたてば、第一の条件から「別なこと」が引き起こされることになります。

ピアノでは、「あること」は一穂がピアノのレッスンを終わること、「別なこと」は一穂が買い物に行くことです。**ショッピング**では、「あること」は彩希がハンカチ売場に行くことで、「別なこと」は一穂がソックス売場に行くことです。

「あること」を♡♡、「別なこと」を◇◇と書くことにすれば、二つの問題は次のように整理することができます。

（１） ♡♡が起こるならば、◇◇が起こる。

（２） ♡♡が実際に起こる。

さて、条件（１）と（２）がなりたつとき、 ◇◇は起こるでしょうか？

「ならば」ということばは、ふだんからよく使いますね。そのふだんの意味で考えてください。答えは

イエス、◇◇は実際に起こる

です。

なぜでしょうか。（１）から、♡♡が実際に起これば、それによって必ず ◇◇が起こることがわかっています。また（２）で、♡♡が本

当に起こる、といっているのですから、◊◊が起こるわけです。

これは、♡♡や ◊◊にどんな文章が入っていても、同じことです。（１）と（２）は、ある文章の形を示しているだけです。そして、これらの形と「ならば」の意味から、答えがでてくるのです。このようにして答えがでるプロセスを、**推論**といいます。その推論は、いろいろな場面や会話とは無関係に、ある規則にしたがっています。この規則を**論理**といいます。

いつも「♡♡が起こる」と書くのは面倒です。これからは♡♡とだけ書くことにします。そうすると、（１）と（２）は

（１）　♡♡ならば◊◊

（２）　♡♡

となって、簡単です。

上の例のように、（１）と（２）から答えをだす推論を**三段論法**と呼びます。聞いたことがあるかもしれませんね。毎日の生活でも、学校の授業でも、いつも使われている推論です。三段論法を使わない人生はありません。

前にも書いたように、論理を使って答えを出せるパズルを、**論理パズル**と呼びます。**ピアノ**と**ショッピング**が論理パズルであることは、もう分かるでしょう。

ソックスと**花粉症**も論理パズルですが、**ピアノ**や**ショッピング**とは別なパターンの論理パズルです。この二つは

（３）　♡♡ならば♡♡でない

がなりたっているときに、

（４）♡♡は正しいか、

という問題です。

仮に

♡♡が正しい

としましょう。（３）がなりたつのだから、三段論法によって

♡♡でない

が導かれます。つまり

♡♡であってしかも♡♡でない

ことになります。「♡♡でない」は♡♡の反対の意味ですから、

♡♡とその反対が両方とも正しい

ということになります。♡♡に「これはソックスである」をあてはめると、「これはソックスで、しかもソックスでない」が正しいことになります。♡♡に「私は花粉症」をあてはめると、「私は花粉症でしかも花粉症ではない」が正しいことになります。こんなことおかしいですね。

これは最初に、♡♡がなりたつと仮定したのが、よくなかったのです。だから、♡♡はなりたたない、と考えるのが正しいのです。（４）の問いには、「ノー」と答えればいいのです。

ここでは、「ならば」についての三段論法と、「でない」の意味から、答えが出ました。このように、いろいろな場面で同じ意味をもつ「ならば」や「でない」ということばは、「論理的なことばである」ということができます。

1.4 パズルの論理をもうちょっと

もう少し論理パズルを出しましょう。

花と星

「花が露でできているならば、星が降る」とします。このとき、星が降らないならば花は露でできている、といえるでしょうか？

「花が露でできているなんて非科学的！」なんて言わないで読み続けてください。この問題の形は次のようになります。

二つの条件

（１） 花が露でできているならば星が降る

と

（２） 星が降らない

から

（３）花が露でできている

といえるでしょうか？

もしも花が露でできているならば、条件（１）から、星が降ることになります。でも条件（２）によれば、星は降らないはずです。ということは、「花が露でできている」とすると、「星が降って、星が降らない」という変なことになります。だから、（１）と（２）がなりたっているときには、（３）はなりたちません。

このパズルのパターンを調べましょう。条件は

（１） ♡♡ならば、◊◊

と

（２） ◊◊ではない

です。問題は

条件（１）と（２）がなりたつとき、♡♡がなりたつか

ということです。条件（２）は、条件（１）の♡♡の否定、つまり反対のこと、になっています。

仮に

♡♡が正しい

としましょう。そうすると（１）から

♢♢

が導かれます。ところが（２）は

♢♢ではない

といっているのですから、♡♡が正しいと仮定したのが間違っていたのです。ということで、♡♡は正しくありません。

いまの議論を整理すると、

♡♡ならば ♢♢

のとき、もし

♢♢でない

ならば

♡♡でない

という結論が得られる、ということになります。後の文を前の文の**対偶**と呼びます。もしかして数学の時間に習ったことがあるかもしれませんね。三段論法と同じように、よく使われる論理です。

1.5 アルファベットを使う

さて、♡♡や◊◊などでは読みにくいので、文章をアルファベットで表してみます。これは数学で数を $x, y, \cdots$ などで仮に表すのと同じことです。もう一度問題を書きます。

ピアノ　一穂が「お昼までにピアノのレッスンが終わったらショッピングに行く」と言いました。レッスンはお昼までに終わりました。さあ、一穂はショッピングに行くでしょうか？

「一穂のレッスンが昼までに終わる」を文字 X で表し、「一穂がショッピングに行く」を文字 Y で表してみましょう。そうすると問題は

「X ならば Y」であるときに、もし X ならば、Y か？

ということになります。詳しく書くと
（１） X ならば Y
と
（２） X
がなりたっているときに、
（３）Y か？
となります。

これはちょうど前にでてきた、♡♡と◊◊をそれぞれ X と Y で置きかえたものになっています。

ショッピング　一穂が

彩希がハンカチ売場に行くんなら、私はソックス売場に行く

と言いました。そして

彩希はハンカチ売場に行きます。

それで、

一穂はソックス売場に行くでしょうか？

「彩希がハンカチ売場に行く」を X、「一穂がソックス売場に行く」を Y とおきましょう。このとき問題はやはり

X ならば Y

であるときに、

もし X ならば、Y か？

と表すことができます。**ピアノ**のパズルと同じですね。
これらの質問に私たちがすぐに答えられるのは、

X ならば Y であって、しかも X ということが実際に起こる

ならば、

必ず Y ということが起こる

ということを認めているからです。「本当にそうだ」と思うからです。このように、どんな状況でもなりたつと認められる考え方を、**論理**といいます。

上のように

XならばYであるときに、もしXならば、Yである

という論理を、**三段論法**といいます。前にもちょっと触れたように、私たちは、この三段論法を毎日の生活や数学の証明などで使って生きているのです。

もう一つ、文章をアルファベットで書きかえてみましょう。

ソックス 「これがソックスならば、これはソックスじゃないの」が本当ならば、これはソックスでしょうか？

「これはソックスである」をXで表しましょう。そうすると問題は

XならばXでない

が正しいとき、

Xは正しいか？

となります。

$\heartsuit\heartsuit$を使って書いたときには、この問題は

$\heartsuit\heartsuit$ならば$\heartsuit\heartsuit$でない

が正しいときに、

♡♡が正しいか？

と表されました。ここで♡♡を X で置きかえれば、今のような書き方になります。

さて、もし仮に X が正しいとすれば、条件から「X でない」となり、「X であって X でない」がなりたつことになります。このように、あることとその反対が同時になりたつことを表す文章を、**矛盾**といいます。誰だって「矛盾なんてなりたつはずがない」って思いますよね。だから、X を仮定したのが間違っていたことになります。このことから、X は正しくない、という結論が出ます。

やってみよう！

1.2 節のやってみよう！のうち、1 と 2 を文字を使って書いてください。問題を繰り返し書いておきます。

1. **猫の健康**「賢い猫は健康だ」と信じている人がいます。つまり、猫について

   （＊）賢ければ、健康である

   ということです。さて、下記の（１）、（２）、（３）のうち、（＊）から導かれるのはどれでしょうか？（これらはすべて猫についての命題です。）

   （１）　健康でないか、または賢い。

   （２）　健康であるか、または賢くない。

   （３）　賢いか、または健康である。

2. **メルヘンの謎**

   彩希「もし私が人魚なら一穂は雪の女王じゃない、っていうのはうそ」

   淳子「それじゃあ本当は、彩希が人魚で一穂が雪の女王ってわけね」

   彩希の言ったことから、淳子の結論はでるでしょうか？

答え

1. **猫の健康** ある猫について「賢い」を X とおき、「健康である」を Y とおく。

   （＊）は「X ならば Y」、（１）、（２）、（３）はそれぞれ「X でないか、または Y」、「X か、または Y でない」、「Y か、または X」と表される。

2. **メルヘンの謎**「彩希が人魚である」を P、「一穂が雪の女王である」を Q とおく。

   彩希は「P ならば、Q ではない」、淳子は「P で、Q」と言っている。

Chapter 2

文章を記号化で書く

2.1　文章をつなぐことば

文章をアルファベットで表すとパズルの書き方が簡単になることがわかりました。ところで、文章をつなぐことばとして、「ならば」や「でない」などを使いました。これらも記号で書けたら、もっと簡単になります。

ふつう**ならば**を表す記号として

$$\Rightarrow$$

を使います。**でない**を表す記号として

$$\neg$$

を使います。

「ならば」の代わりに$\Rightarrow$ を使い、「でない」の代わりに$\neg$ を使って、文章を書いてみましょう。

ピアノのレッスンが終わったら、買い物に行く

「ピアノのレッスンが終わる」を Xとおき、「買い物に行く」を Yとおけば、これは

$$X\text{ならば}Y$$

と表されます。さらにこの「ならば」を記号$\Rightarrow$ で置きかえれば、

$$X \Rightarrow Y$$

となります。

これを使えば、前にあった**ピアノ**と**ショッピング**のパズルは

$$X \Rightarrow Y\text{でしかも }X\text{ならば}Y\text{か？}$$

と表せます。この中で「しかも」は「そして」と同じ意味です。「しかも」とか「そして」を表す記号としてふつう$\wedge$を使います。$\wedge$を使えば、**ピアノ**はさらに

$$((X \Rightarrow Y) \wedge X) \Rightarrow Y\text{が正しいか？}$$

という問いになります。ずいぶん短くなりました。

ソックスと**花粉**のパズルは

$$X\text{ならば }X\text{でないとき、}X\text{か？}$$

でした。「ならば」を$\Rightarrow$で、「でない」を$\neg$で置きかえれば、これは

$$X \Rightarrow (\neg X) \text{ のとき、} X \text{か？}$$

と書きかえられます。

「$\cdots$のとき」は、「$\cdots$ならば」と同じ意味なので、この問いはさらに

$$(X \Rightarrow (\neg X)) \Rightarrow X \text{が正しいか？}$$

と表せます。

花と星のパズルは

$\heartsuit\heartsuit$ならば、$\diamondsuit\diamondsuit$であり、また$\diamondsuit\diamondsuit$ではないとき、$\heartsuit\heartsuit$か？

という問題でした。$\heartsuit\heartsuit$は「花が露でできている」を、$\diamondsuit\diamondsuit$は「星が降る」を表すものでした。

「花が露でできている」を X、「星が降る」を Yとおくと、$\heartsuit\heartsuit$が Xで置きかえられ、$\diamondsuit\diamondsuit$がYでおきかえられます。また、「ならば」を$\Rightarrow$で置きかえれば、問題は

$$X \Rightarrow Y \text{ であり、また } \neg Y \text{のとき、} X \text{か？}$$

となります。

「$X \Rightarrow Y$ であり、また$\neg Y$」は「$X \Rightarrow Y$、そして$\neg Y$」と同じことです。「そして」は$\wedge$で表します。さらに「$\cdots$のとき」が「$\cdots$ならば」の意味であることを使えば、上の問いは

$$((X \Rightarrow Y) \wedge \neg Y) \Rightarrow X \text{が正しいか？}$$

ということになります。

$(X \Rightarrow Y)$ などのかっこは、$X \Rightarrow Y$がひとまとまりの文章であることを示すためについています。

このようにして、パズルの問題を記号だけで表すことができるのです。

パズルでなくても、日本語の文章は、基本的な文章を接続詞や助動詞でつないで作られます。基本的な文章を文字 X、Yなどで置きかえて、「ならば」などのつなぎを$\Rightarrow$ などの記号で置きかえれば、文章をアルファベットと記号だけで表すことができます。

$\wedge, \neg, \Rightarrow$ などを**論理記号**と呼びます。これらが「そして」、「でない」、「ならば」など、文章の論理的なつながりを表すからです。

これらを使って文章を記号で書いたものを**論理式**と呼びます。**論理式**にもいろいろな種類があるので、とくにこの本で扱うものを**命題論理の論理式**ということもあります。

2.2 つなぎを表す記号

前の節で、パズルを論理式という記号の列で表してみました。このことについて、おさらいをしながら少し詳しく説明します。

まず、文章をつなぐことばを表す記号を決めます。それらは**論理記号**と呼ばれ、次の四つです。

$\neg$（でない）　$\wedge$（そして）　$\vee$（または）　$\Rightarrow$（ならば）

専門用語で、$\neg$は bf 否定、$\wedge$は**論理積**、$\vee$は**論理和**、$\Rightarrow$ は**含意**と名付けられています。

最初の論理記号は$\neg$、「$\cdots$でない」のように、一つの文章を否定する役目をします。後の三つは「$\heartsuit\heartsuit$ならば $\diamondsuit\diamondsuit$」のように、二つの文章をつなぎます。

「でない」は、日本語では「露でない」とか「露でできていない」などのように文章の後にきて、前の文章全体を否定します。「露でない」は「露である」という文章を「そうではない」と否定しているのです。「露でできていない」は「露でできている」を「そうではない」と否定しているのです。どの場合にも、ある文章の後に「ではない」が続きます。

記号で書くときには、$\neg\cdots$のように否定の記号$\neg$は文章の前におきます。英語では”It is *not* made of dunes”（それは露でできていない）のように否定が先にきますから、論理記号は英語式ですね。

「そして」は「かつ」とか「しかも」のように、いろいろに言いかえられます。

「一穂ってどんな女の子？」

と聞いたら、淳子が答えてくれました。

「一穂は彩希の友だちで、ピアノが好き」

これは「一穂は彩希のともだちである」と「一穂はピアノが好きである」という二つの文章を「で」ということばでつないだものです。「$\cdots$で」は「$\cdots$、そして」ということですから、淳子は

「一穂は彩希のともだちである。そして一穂はピアノが好きである」

と言ったことになります。つまり「一穂は彩希のともだちである」と「一穂はピアノが好きである」を$\wedge$でつないだことになります。

「ソックスを買うかハンカチを買う」の「か」は「または」の意

味です。この文章は

「ソックスを買う。または、ハンカチを買う」

と同じになって、「か」は$\vee$で表せます。

「レッスンが終わったらショッピングに行く」

は

「レッスンが終わるならばショッピングに行く」

ということですから、「たら」は「ならば」を表す記号$\Rightarrow$ で表せます。

「文章を作るのにたった４種類のつなぎでまにあうの？そんなに簡単だったら、どうして国語で苦労するの？」

って、不思議な気がするでしょう？

でも、ここで問題にしているのは、ある文章が正しいか正しくないか、ということだけなのです。「気持ちの細かいことまで伝わるように」とか、「スマートな文章を書け」とかいうことは、求められていないのです。文章の内容に立ち入らないで、その作り方だけから正しいといえるか、ということを問題にしているのです。

後で説明するように、こういうときにはこの４種類の論理記号で十分まにあうのです。しかも驚くことに、$\neg$と $\wedge$のような二つの論理記号だけでも、まにあうのです。

日本語には、同じような意味をもつことばがたくさんあります。たとえば「でしかも」は「そして」と同じ意味でした。「か」が「または」の意味のこともありました。「あるいは」も「または」の意味です。

「私は風邪をひいたら、ホットミルクをのんで寝るの」

で、「ひいたら」の「たら」は、「ならば」の意味、「のんで」の「で」は「そして」の意味です。

「近くでみるとハンサム」の「と」は「ならば」の意味です。

「猫は聡明でなければ美しくない」の「でなければ」は、「でない」と「ならば」の組み合わせです。

「ソックスかハンカチかどっちか買う」では、「かどっちか」が「または」の意味になります。

「う、う、わかりにくい。いったいどの論理記号を使えばいいのよ!」と、初めはとまどうものです。でも慣れてくれば

「わりと簡単じゃん」

って思えるようになるでしょう。

2.3 文章を記号で書く

基本的な文章をアルファベットの文字で置きかえて、それらの文字と論理記号を組み合わせて、文章を表したものを、**論理**式と呼びます。

もう少し説明すると、まず基本的な文章を $X, Y, Z, \cdots$ などで表すことにします。$X, Y, Z, \cdots$ のそれぞれを**基本論理式**と呼びます。

基本論理式から論理記号を使って作られていくものを、**合成論理式**と呼びます。論理式には、基本論理式と合成論理式があるわけです。

まず合成論理式の例をみましょう。前に**ピアノ**と**ショッピング**を記号で書きました。それは

$$((X \Rightarrow Y) \wedge X) \Rightarrow Y$$

でした。

これは X と Y という基本論理式から$\Rightarrow$ と$\land$を使って次々組み立てられた論理式です。その組み立て方を、順に書き下ろしてみましょう。論理式を組み立てる各ステップでつなぎに使われる論理記号を、その論理式の**一番外の論理記号**と呼びます。

1. X と Y は**基本論理式**。**一番外の論理記号**はない。

2. 論理式 X と Y を$\Rightarrow$ でつないだ

$$(X \Rightarrow Y)$$

   は**合成論理式**。**一番外の論理記号**は$\Rightarrow$。

3. 論理式 $(X \Rightarrow Y)$ と論理式 X を$\land$でつないだ

$$((X \Rightarrow Y) \land X)$$

   は**合成論理式**。**一番外の論理記号**は$\land$。

4. 論理式 $((X \Rightarrow Y) \land X)$ と論理式 Y を$\Rightarrow$ でつないだ

$$(((X \Rightarrow Y) \land X) \Rightarrow Y)$$

   は**合成論理式**。**一番外の論理記号**は$\Rightarrow$。

5.

新しく作った論理式の一番外側に丸かっこがついているのは、それでひとまとまりの論理式であることを示すためです。かっこがなくてもどこでひとまとまりか分かるときにはかっこを省いてもいいのですが、初めはかっこも正確に書いておきます。もう一つ例をあげておきます。

ソックスと**花粉症**　$(X \Rightarrow \neg X) \Rightarrow X$

1. Xは基本論理式。一番外の論理記号はない。

2. Xに論理記号$\neg$をつけて作られる $(\neg X)$ は合成論理式。一番外の論理記号は$\neg$。

3. Xと $(\neg X)$ を$\Rightarrow$ でつないだ $(X \Rightarrow \neg X)$ は合成論理式。一番外の論理記号は$\Rightarrow$。

4. 論理式 $(X \Rightarrow \neg X)$ と Xを$\Rightarrow$ でつないだ $(X \Rightarrow \neg X) \Rightarrow X)$ は合成論理式。一番外の論理記号は$\Rightarrow$。

ここで、論理式を作る一般的な規則を書いておきます。

論理式の作り方と**一番外の論理記号**

1. **論理記号**は$\neg$,　$\wedge$,　$\vee$,　$\Rightarrow$ を使う。

2. 命題変数 $X, Y, Z, \cdots$は**基本論理式**である。

3. **合成論理式**は次のようにして作られる。

   A がすでに作られた論理式ならば、

   $$(\neg A)$$

   は合成論理式である。

4. A と Bがすでに作られた論理式ならば、

   $$(A \wedge B), \quad (A \vee B), \quad (A \Rightarrow B)$$

   はそれぞれ合成論理式である。。

   これらにおける**一番外の論理記号**は、それぞれ

   $$\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$$

   である。

論理式の作り方はこれだけです。合成論理式の読み方は、次のとおりです。

$(\neg A) \cdots\cdots A$ でない
$(A \wedge B) \cdots\cdots A$ かつ B
$(A \vee B) \cdots\cdots A$ または B
$(A \Rightarrow B) \cdots\cdots A$ ならば B

上でもコメントしたように、論理式を作るときにかっこをつけるのは、どの論理記号がどの論理式をつなぐ のかをはっきりさせるためです。一番外のかっこはなくても困りません。

そのために、合成論理式を作るときに

$$\neg A、A \wedge B, A \vee B, A \Rightarrow B$$

としてもだいじょうぶです。途中のかっこははずせません。でもかっこをいつもつけるのは、煩わしいものです。それで、約束ごとを作ってかっこを省略することもあります。次の節で、その約束ごとを説明します。

2.4 かっこについての約束ごと

X, Y, Zから順に作られた論理式をいくつか並べてみましょう。

$$X, Y, Z, (\neg X), ((\neg X) \wedge Y), (Z \Rightarrow Y), ((Z \Rightarrow Y) \vee ((\neg X) \wedge Y))$$

もしかっこがなかったら、たとえば $((\neg X) \wedge Y)$ は$\neg X \wedge Y$となります。これでは、$((\neg X) \wedge Y)$ なのか、$(\neg(X \wedge Y))$ なのか、わかりません。最初の式ならば、意味は「Xではなくて Y」ですし、後の式ならば「Xと Yの両方がなりたつことはない」となります。全然違いますね。

前の節で予告したように、論理式をかくときにうまく約束ごとを作って、かっこの数を少なくできます。例で説明しましょう。

これがソックスじゃないならば、これがソックスなの

「これがソックス」を Xとおいて、この文章を論理式で表すと

$$((\neg X) \Rightarrow X)$$

となります。外のかっこははずしても困ることはないので、まず

$$(\neg X) \Rightarrow X$$

としましょう。残ったかっこをはずと、$\neg X \Rightarrow X$となりますが、これでは$(\neg X) \Rightarrow X$なのか$\neg(X \Rightarrow X)$なのかわかりません。

最初の論理式はもとの文章を表しますが、後の論理式は

「これがソックスならばこれがソックス」ではない

を表します。

しかし、

$\neg$は、ほかの論理記号よりも結びつきが強い

という約束ごとがあれば、$\neg X \Rightarrow X$の$\neg$はすぐ後のXに結びつくことになります。つまり$\neg X$で一つのまとまりとなって、ここにかっこがあるはずだ、ということになります。だからこれは本当は$(\neg X) \Rightarrow X$を表しているのです。

ソックスは買わないけど、ハンカチは買う

で、「ソックスを買う」をX、「ハンカチを買う」をYとおいて論理式で表すと、

$$(\neg X) \wedge Y$$

となります。ここでは、「ソックスを買わない」と「ハンカチを買う」の両方を言っているので、「けど」は実は「そして」という意味なのです。だから$\wedge$を使うのです。

もしかっこをはずすと$\neg X \wedge Y$となって、$(\neg X) \wedge Y$なのか$\neg(X \wedge Y)$なのかわかりません。初めの論理式は「ソックスは買わないけど、ハンカチを買う」を表し、後の論理式は、「ソックスもハンカチも買う」ということはない、を表します。$\neg$は$\wedge$よりも結びつきが強い、という約束ごとがあれば、$\neg$がまずXと結びついて$(\neg X)$となり、その後で$\wedge$が$(\neg X)$とYを結びつけます。だから$\neg X \wedge Y$は$(\neg X) \wedge Y$を表すことがわかります。

$\wedge$と$\vee$は、ふつうは同じ程度の結びつきの強さだと考えられています。ですから、たとえば$A \wedge B \vee C$は$(A \wedge B) \vee C$なのか$A \wedge (B \vee C)$なのかわかりません。こういうときには必ずかっこをつけましょう。

$\Rightarrow$は、ほかのどれよりも結びつきは弱いとします。たとえば

ハンカチを買うんなら、ピンクかブルーがいい

を論理式で書いてみます。「ピンクかブルーがいい」は、「ピンクのハンカチを買うかブルーのハンカチを買う」としていいでしょう。「ハンカチを買う」をX、「ピンクを買う」をY、「ブルーを買う」をZとおきます。そうすると上の文章は、

$$X \Rightarrow (Y \vee Z)$$

となります。

もしかっこをはずすと、$X \Rightarrow Y \vee Z$となります。これだけでは$X \Rightarrow (Y \vee Z)$なのか、$(X \Rightarrow Y) \vee Z$なのかわかりません。最初の論理式は上の文章を表します。

$$(X \Rightarrow Y) \vee Z$$

は、「ハンカチを買うんならピンクがいい、かまたはブルーがいい」を表すことになります。もう少し分かりやすくすれば、

ハンカチをかうんならピンクがいい。そうでなければブルーがいい

ということです。でも、これはあんまり意味がなさそうです。

もし、

$\Rightarrow$ の結びつきが一番弱い

という約束ごとがあれば、まず $Y \vee Z$がひとまとまりになって、それと Xを$\Rightarrow$ が結びつけるので、

$$X \Rightarrow (Y \vee Z)$$

と同じことになります。

論理記号を、結びつきの強い順序に並べると、

$$\neg, (\wedge, \vee), \Rightarrow$$

となります。ただし$\wedge$ と$\vee$は同じ程度です。

2.5 Xや Yについて

論理式を作るもととなる、基本論理式を表す文字 $X, Y, \cdots$などについて、ちょっとコメントをしておきます。

$X, Y, \cdots$ などは、基本的な文章を仮りに表す文字です。いいかえると、$X, Y, \cdots$ などには文章をあてはめることができます。文章の内容を命題ともいうので、$X, Y, \cdots$ などの基本論理式を「命題変数」とも呼びます。

変数というと、x とか y など数を表すものを知っていますね。式 $x + y = y + x$ は「足し算は x と y の順序に関係ない」ということを表しています。x, y はそのときどきに適当な数をあてはめることができるものです。一度 $x + y = y + x$ がなりたつことを確かめておけば、x に 2.718 を、y に 3.141 をあてはめて $2.718 + 3.141 = 3.141 + 2.718$ としてもなりたつことは明らかです。x に 1.414 を、y に 1.732 をあてはめて $1.414 + 1.732 = 1.732 + 1.414$ としても同じことです。

$X, Y, \cdots$ も似たような働きをします。$X, Y, \cdots$ などにあてはめるのは、文章です。$X \Rightarrow X$ は「X ならば X」ということです。「X がなりたつときには X がなりたつ」というのですから、これは正しそうです。

X に「淳子が風邪をひいている」をあてはめると、$X \Rightarrow X$ は「淳子が風邪をひいているならば、淳子が風邪をひいている」というわけです。「そんなの当たり前」ですって？そうですね。X に「彩希がハンカチを買う」をあてはめると「彩希がハンカチを買うならば、彩希がハンカチを買う」となって、これも当たり前です。

$X \Rightarrow X$ は、X に何をあてはめても当たり前のことを表しています。

もう一つ、論理式についてのコメントをしておきます。

論理式 $A \wedge B$ は「A も B もなりたつ」ということを表しますが、ふつうこのようにいうときは、A と B の間には何かの関連があります。

たとえばあなたがコーヒーに砂糖もミルクもいれるのが好きだと

します。ロッテリアでコーヒーを飲むとき、「砂糖もミルクもいれるの」と注文するでしょう。これは「砂糖をいれる。そしてミルクをいれる」ということになります。2回現れる「も」は「そして」を強調するために使われているのです。

「砂糖をいれる」を A とおき、「ミルクをいれるを」Bとおけば、これは $A \wedge B$と表せます。このとき砂糖もミルクもコーヒーにいれるもの、という意味で関連があります。ロッテリアのカウンタでは、A と Bは関連がある、ということになります。

ミルクはいれるけど甘いものは嫌い、という人は「砂糖はいれないけどミルクはいれるの」と言うでしょう。「けど」は二つの文章の一方が否定のときに、「そして」の意味で使われますから、「砂糖はいれないけどミルクはいれるの」は、$\neg A \wedge B$で表せます。このときも$\neg A$ と Bは関連があります。

でも一緒に行った友達が「塩はいれないけどミルクはいれる」と言ったら、あなたはどんな顔をしますか？

「そりゃそうでしょ。塩なんかコーヒーにいれるわけないもんね。でもなんだってそんなよけいなこと言うのよ。ミルクをいれる、っていうだけで分かるじゃない。」

ふつうは、コーヒーに塩をいれるとかいれないとか言いませんよね。コーヒーを飲むときに、塩とミルクは互いになんの関連もありません。でも「塩をいれる」を Cとおくと、友達の言ったことは$\neg C \wedge B$という論理式で表されます。ふつうの会話ではおかしくても、文章を論理記号でつなぐ、という規則にはあてはまっているのです。

前に「花が露でできているならば、星が降る」というのがありました。「花が露でできている」と「星が降る」とはなんの関連もあり

ません。そういう二つの文章を「ならば」でつないでいます。「花が露でできている」を X とおき、「星が降る」を Y とおけば、この文章は $X \Rightarrow Y$ という論理式で表されます。

このとき、X と Y にあてはまるそれぞれの文章どうしには、意味や関連はなくても、全体は論理式になっています。論理で「文章」というときにはこういうことがよくあるのです。

2.6 記号化で書く練習

文章を記号で表す練習をしましょう。

「私は風邪をひいたら、ホットミルクをのんでねるの」

「私が風邪をひく」を X、「私がホットミルクを飲む」を Y、「私がねる」を Z とおきます。前にも説明しましたが、「たら」は「ならば」の意味です。この文章は

$$X \Rightarrow Y \wedge Z$$

と表せます。

「近くで見ると高い」

遠くからではそんなに高く見えなかった浅間山が、近くに行ったらずいぶん高く見えてきました。このままでは文章の作り方がちょっとわかりにくいので、もう少していねいに言いかえてみると

浅間山を近くでみると、浅間山が高く見える

となります。

「浅間山を近くでみる」を X、「浅間山が高くみえる」を Y とおくと、「近くで見ると高い」は

$$X \Rightarrow Y$$

と表されます。

「これって、簡単なことをむつかしくしてるだけじゃない？」って言われそうですね。でも、もっと長い文章のときには、記号で書いたほうがすっきりするのです。だから、こういう作業もやりがいがあるものなのです。

猫は聡明でなければ美しくない

これは、どんな猫でも、という前置きがあるとして読む文です。それで、ある猫についてこの文を記号化してみます。その猫について「聡明である」を X、「美しい」を Y とすれば、

$$\neg X \Rightarrow \neg Y$$

と表せます。

ソックスかハンカチかどっちか買う

は、「ソックスを買う」を X、「ハンカチを買う」を Y とおくと、

$$X \vee Y$$

となります。

ところで「猫は聡明でなければ美しくない」というときには、そういう自分の感じ方を相手に伝えたいから言うわけです。「ソックスかハンカチかどっちか買うの」というときには、本当に買うつもりだから言うわけです。

なにか言ったり書いたりするときには、その文章の内容がなりたつ、あるいはそれが正しい、ということを主張しているのです。ふつうは「正しい」ということばをいちいち付けません。「ソックスかハンカチかどっちか買う」といえば、聞いた人は「本当にどっちか買うつもりなんだ」と納得します。だから $X \vee Y$ と書くだけで「$X \vee Y$ が正しい」と主張していることになります。

「正しくない」ことを主張したいときには、「$\cdots$がなりたたない」とか「$\cdots$が正しくない」とか「$\cdots$ はうそである」などと書けば分かってもらえます。記号では、「$\cdots$でない」を表す$\neg$を最初につけて、$\neg(X \vee Y)$ などと表現します。

少し複雑な文章をあつかいましょう。

「私が人魚ならば、あなたは王子様ではない」
がなりたつとき、
「あなたが王子様でないならば、私は人魚であってあなたは王子様です」
は正しい。

基本的な文章は「私が人魚です」と「あなたが王子様です」の二つだけです。これらをそれぞれ X、Y とおきましょう。「$\cdots$がなりたつとき」は「$\cdots$ ならば」であり、「$\cdots$ は正しい」は単に「$\cdots$」でい

いのです。「であって」は「そして」の意味です。

このように考えて上の文章を書き直してみると、次にようになります。

「私が人魚ならば、あなたは王子様ではない」

ならば、

「あなたが王子様でないならば、私は人魚であってあなたは王子様です。」

これを記号で表せば

$$(X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow (\neg Y \Rightarrow X \wedge Y)$$

となります。

次はどうでしょうか。

「私が人魚ならば、あなたは王子様ではない」

が偽であるとする。このとき

「あなたが王子様でないならば、私は人魚であってあなたは王子様です」

は正しい。

「... が偽である」は「... でない」のことです。「♡♡であるとする。ことのとき◇◇は正しい」は、「♡♡ならば◇◇」と同じです。「...であって」は「...でそして」ということです。というわけで、上の文は次のようにいいかえられます。

「私が人魚ならば、あなたは王子様ではない」

ということでないならば、

「あなたが王子様でないならば、私は人魚であってあなたは王子様です。」

記号で書けば

$$\neg(X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow (\neg Y \Rightarrow X \wedge Y)$$

となります。

下にいくつか練習問題をだしますから、文章の記号化の練習をしてください。

やってみよう！

以下の文章をそれぞれ論理式で表現してください。基本的な文章をどんな文字で置きかえてもかまいません。

１右の道が頂上へ行くならば、左の道は頂上に行かない。

2　彩希は赤いドレスが似合うが、一穂はピンクのドレスが似合う。　3　「私が人魚ならば、私はスフィンクスではない」が偽であるとすると、「私が人魚ならば私はスフィンクスであり、そして私はスフィンクスではない」は正しい。

4　（タマは我が家の庭に住んでいる、のら猫です。）

「タマは庭で昼寝したがる。そして庭で昼寝したがるときには花粉症にかかっている。」このときタマは花粉症にかかっているといえる。

5　淳子が青いドレスを着て彩希が赤いドレスを着るのなら、一穂は黄色いドレスは着ないといっている。このときもし淳子が青い

ドレスを着ないか一穂が黄色いドレスを着たら、彩希は赤いドレスを着る。

答え

答えでは、論理記号についての結びつきの強さの約束事を使って、なるべくかっこの数を少なくしてある。

1　「右の道が頂上へ行く」を X、「左の道が頂上に行く」を Y とおくと、$X \Rightarrow \neg Y$。

2　「彩希は赤いドレスが似合う」を Q、「一穂はピンクのドレスが似合う」を Rとおく。「が」は対比の気持ちを表すもので、論理的には二つの事柄を並べる意味である。答えは $Q \wedge R$

3　「私が人魚である」を P、「私はスフィンクスである」を Q とおくと、$\neg(P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow (P \Rightarrow Q) \wedge \neg Q$

4　「タマは庭で昼寝したがる」を X、「（タマが）花粉症にかかっている」を Zとおくと、$X \wedge (X \Rightarrow Z) \Rightarrow Z$

5　「淳子が青いドレスを着る」を X、「彩希が赤いドレスを着る」を Y、「一穂が黄色いドレスを着る」を Zとおく。答えは

$$(X \wedge Y \Rightarrow \neg Z) \Rightarrow (\neg X \vee Z \Rightarrow Y)$$

2.7　物語りを作る

前の節では、文章の記号化を練習しました。でも、いきなり論理式だけみたら、何を言いたいのかわかりませんね。そういうときには、基本論理式に適当な文章をあてはめて読んでみると面白いです。

アルファベットと記号で書かれた論理式から、自分で物語りを作ってしまうのです。

論理式

$$X \Rightarrow Y \wedge Z$$

を読んでみましょう。Xを「私が風邪をひく」、Yを「私はホットミルクを飲む」、Zを「私は寝る」としてみます。$Y \wedge Z$はひとまとまりですから、「私はホットミルクを飲む、そして私は寝る」となります。全体は

私が風邪をひくならば、私はホットミルクを飲みそして寝る

となります。もう少し自然な日本語に変えると、

風邪をひいたら、ホットミルクを飲んで寝るの

ということになります。「私が」とか「私は」とかは、隠れていますが、内容から分かるでしょう。

でも、$X \Rightarrow Y \wedge Z$の中のXやYにはどんな文章をあてはめてもいいのです。Xを「一穂がピアノの発表会で演奏する」、Yを「彩希が発表会を聞きに行く」、Zを「淳子が発表会を聞きに行く」とすれば、$X \Rightarrow Y \wedge Z$は

一穂がピアノの発表会で演奏するときには、彩希と淳子が聞きに行く

ととなって、仲良し三人ガールズのお話になります。

このように、基本論理式には自由に文章をあてはめることができるので、論理式は決まった文章だけを表すのではないわけです。

「そんないいかげんなことで、役にたつの？」

役にたつんです。論理式の役目は、ある文章が正しいかどうかを、基本的な文章の内容とは無関係に判定することなのです。このとき、基本論理式がどんな論理記号によって、どんな順につながっているか、ということだけが問題になるのです。このことは後で詳しく説明します。

やってみよう！

下の論理式から文章を作る練習です。自分の好きな文章を X, Y などの文字にあてはめてください。最初は基本論理式を論理記号でつないで、文を書いてみてください。その後でもっと自然な日本語に書きかえてください。

1 $X \land \neg Y \Rightarrow \neg Z$

2 $P \Rightarrow Q \lor R$

3 $(X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow (\neg Y \Rightarrow X \lor Y)$

4 $X \land (X \Rightarrow Y) \Rightarrow Y$

答え

以下の答えは一つの例である。

1 Xに「彩希がたまごっちをうまく育てている」、Yに「一穂はたまごっちを育てるのが上手である」、Zに「淳子はたまごっちを欲しい」をあてはめてみる。

彩希はたまごっちをうまく育てているけれど、一穂はたまごっちを育てるのが下手であるならば、淳子はたまごっちを欲しいと思わない。

2　Pに「彩希がソックス売場に行く」、Qに「一穂がハンカチ売場に行く」、Rに「一穂がポーチ売場に行く」をあてはめてみる。

彩希がソックス売場に行くんなら、一穂はハンカチ売場かポーチ売場に行く。

3　Xに「雪の女王がとける」、Yに「ガラスの仮面がこわれる」をあてはめてみる。

雪の女王がとけるならば、ガラスの仮面はこわれないとする。このとき、ガラスの仮面がこわれないならば、雪の女王がとけるかガラスの仮面がこわれる。

4　Xに「雪の女王がとける」、Yに「ガラスの仮面がみつかる」をあてはめてみる。

雪の女王がとけて、しかも雪の女王がとけたときにはガラスの仮面がみつかるものとする。このときガラスの仮面がみつかる。

Chapter 3

文章の○と×

3.1 記号の意味

いままでの論理パズルの例は、「$\cdots$ が正しいか？」という形をしていました。論理パズルにはいろいろあって、こういう形とは限りません。でもこの本ではこういうものだけをあつかいます。

この本に出てくる論理パズルは、論理式で表現できるので、ある論理式が「正しいか、正しくないか」を当てるパズルだといえます。

そこで、論理式が**正しい**または**正しくない**のはどういうときか、を調べていきます。

たとえば $X \vee Y$ が正しいためには、どういう条件があればいいでしょうか。$X \vee Y$ には命題変数 X と Y と、論理記号 $\vee$ しかありません。だから $X \vee Y$ が正しいかどうかは、X と Y のそれぞれが正しい

かどうか、ということと、∨の意味だけで決まるはずです。

論理記号∨は「または」を表す記号なのですから、XかYのどちらかが正しければ$X \vee Y$は正しいわけです。もしXもYも正しくなければ$X \vee Y$は正しくありません。つまり、$X \vee Y$が正しいのは、XかYの少なくとも一方が正しいときです。変数XやYの内容とは関係ありません。ほかの論理記号についても、事情は同じです。

ここでちょっと注意して欲しいのは、$X \vee Y$はXとYの両方が正しいときにも、全体が正しくなることです。ふつうは、「XまたはY」というときには、XとYの一方しかなりたたないことが多いのですが。

たとえば、千円もって買いものに行くとします。一個千円のきれいな箱がたくさんおいてあります。中身はソックスかハンカチです。千円あるからソックかハンカチを買えます。でもソックスを買えば、ハンカチは買えません。反対もいえます。だから「ソックスかハンカチかどっちか買える」は正しいのですが、両方は買えません。「ソックスが買える」をXとおき、「ハンカチが買える」をYとおくと、もちろん$X \vee Y$は正しいのですが、じっさいに正しいのはXとYの片方だけです。

でも、そうでないケースもあります。２千円持って買い物に行けば、このお店でソックスもハンカチも買えます。「ソックスかハンカチかどっちか買える」は正しいですが、本当は両方買うこともできるのです。だから「XかY」は正しいわけですが、この場合にはXもYもオーケーです。

まとめてみると、

$$X \vee Y \text{が正しい}$$

というときには、XだけかYだけが正しいこともあるし、XとYの両方が正しいこともあるのです。それで「XとYの少なくとも一方は正しい」という言い方をします。

では、$X \wedge Y$についてはどうでしょうか。$\wedge$は「そして」を表しますから、$X \wedge Y$は「Xが正しくそしてYも正しい」ということを表します。これはXとYの両方が正しいときにだけなりたちます。Xが正しくてもYが正しくなければ、全体は正しくなりません。整理すると、

$$X \wedge Y\text{が正しい}$$

は

$$X\text{と}Y\text{の両方が正しい}$$

ということを表しています。

「りすはねずみの仲間で、くるみを食べる」を論理式で表すとどうなるでしょうか。詳しく書くと「りすはねずみの仲間である。そしてりすはくるみを食べる」となります。「りすはねずみの仲間である」をX、「りすはくるみを食べる」をYとおけば、この文は$X \wedge Y$という論理式で表現されます。りすは本当にねずみの仲間です。また、りすはくるみを食べます。このようにXもYも正しいので、$X \wedge Y$は正しい文章を表しています。

$X \wedge Y$が「りすは蝶の仲間で、くるみを食べる」を表すときには、Xは「りすは蝶の仲間である」を表します。りすはほ乳類だし、蝶は虫ですから、ちょっと仲間とはいえません。このときはXが正しくないので、$X \wedge Y$も正しくありません。

次に$\neg$について考えましょう。$\neg$は「$\cdots$でない」というふうに使われます。

「淳子はピアノを習っていない」は「淳子はピアノを習っている」の反対です。全体の文章は「淳子はピアノを習っている」を否定しています。これが正しい、つまり本当は「習っていない」ならば、「習っている」は正しくありません。もし本当は習っているのならば「習っている」が正しく、「習っていない」は正しくありません。どちらにしても、「習っている」と「習っていない」では、一方が正しければ、他方は正しくありません。

「淳子がピアノを習っている」を Xとおくと、「淳子はピアノを習っていない」は$\neg X$となります。これが正しいのは Xが正しくないときで、これが正しくないのは Xが正しいときです。つまり

$\neg X$が正しいことと、Xが正しくないことは同じ

ということです。

では、$\Rightarrow$ はどうでしょうか。

彩希は「きれいな花を見ると嬉しくなるの」と言います。これは本当なのです。きれいな花を見ると、彩希は必ず嬉しそうににっこりします。

「彩希がきれいな花を見る」を X、「彩希が嬉しくなる」を Yとおくと、彩希の言っていることは $X \Rightarrow Y$と表せます。Xが正しいとしましょう。つまり彩希が実際にきれいな花を見るとします。そうすると彩希は嬉しくなるのですから、Yも正しいはずです。彩希は本当に嬉しくなるのです。

このように「XならばY」が正しいのは、Xが正しいときには必ずYも正しくなるときです。

では、彩希がきれいな花を見ていないときには、彩希は嬉しくなるでしょうか？これはわかりませんね。ケーキを食べているときには花は見なくても、嬉しそうです。遠足の日に雨が降ったときには、つまらなそうな顔をしていました。そのときにも花は見ていませんでした。花を見ていないときには、嬉しくなることもつまらなくなることもあるのです。

このように、「きれいな花を見ると嬉しくなるの」は、彩希が本当に花を見たときに嬉しくなれば、正しいのです。彩希が花を見ていないときに嬉しくなっても悲しくなっても、関係ありません。

でも、もしも彩希が花を見ても嬉しくならなかったら、この文章は正しくありません。

このことを論理式 $X \Rightarrow Y$にあてはめて説明します。Xが正しいときにYも正しいならば、実際にXが正しいかそうでないかには関係なく、$X \Rightarrow Y$は正しいことになります。Xが正しいのにYが正しくないときにだけ、$X \Rightarrow Y$は正しくありません。まとめて書くと

$$X \Rightarrow Y \text{が正しい}$$

ことと

$$X\text{が正しいときには必ず}\,Y\text{も正しい}$$

ことは同じです。

$\Rightarrow$ というのは、どうも分かりにくいですね。後で論理記号の意味のまとめをしますから、そこでおぼえてしまってください。使っているうちにわかってきます。

3.2 文章の真と偽

「正しい」という代わりに少し固く**真である**ともいいます。そうすると「$\cdots$ は正しいか？」という問いは、「$\cdots$ は真か？」と言いかえられます。真でない、つまり正しくない文章は、うそだ、ということになります。「うそ」という代わりに**偽である**といいます。

このようにして、パズルの問題の「正しい」と「正しくない」を、それぞれ「真である」と「偽である」で置きかえて読むことができます。

真とか偽とかいうことばを使うと、この本に出てくる論理パズルは、ある論理式が「真であるか偽であるか」を当てるパズルだといえます。

論理式が**真である**または**偽である**ということは、論理式に**真**か**偽**かどちらかの値をあてはめることだと考えられます。そのために、**真**と**偽**を論理式の**真理値**と呼びます。

前に扱った例のいくつかを、真理値を使って読み直してみましょう。

ソックスかハンカチかどっちか買う

は、実際にソックスを買うかハンカチを買えば正しい、つまり真になります。これは「ソックスを買う」かまたは「ハンカチを買う」の少なくとも一方が真であるときです。

この例を参考にすれば、$X \vee Y$ は X と Y のどちらかが真のときに、真になります。もし X も Y も真でない、つまり両方とも偽であるならば、$X \vee Y$ は真ではない、つまり偽になります。

りすはねずみの仲間で、くるみを食べる

は、「りすはねずみの仲間である。そしてりすはくるみを食べる」ということでした。「りすはねずみの仲間である」は事実ですから、真です。「りすはくるみを食べる」も事実ですから、真です。このとき「りすはねずみの仲間で、くるみを食べる」は真です。

「りすは蝶の仲間である」は事実に反しますから、偽です。このとき

りすは蝶の仲間で、くるみを食べる

は最初の文が偽ですから、全体として偽になります。

同じように $X \wedge Y$ は、X と Y の両方が真のときには真で、少なくとも、一方が偽のときには偽になります。

彩希がきれいな花を見ると必ず嬉しそうににっこりします。このとき彩希が「私、きれいな花を見ると嬉しくなるの」
と言ったら、彩希のいうことは真です。

もしも彩希が、きれいな花を見てもきげんが悪いのに
「私、きれいな花を見ると嬉しくなるの」
と言ったら、
「それってうそじゃない？」
と言いたくなりますね。このとき彩希の言うことはうそ、つまり偽です。

このことから $X \Rightarrow Y$ は、X が真のときに Y も必ず真であれば、真になります。もし X が真なのに Y が偽ならば、全体は偽です。

これらのことを整理して、論理式の真理値の決まり方の一覧表を作りましょう。**論理式の真理値**と名付けられた、表 1 を見てくださ

い。第１列には、論理記号$\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow$ が並んでいます。第２列には、それらの論理記号を使って作られる合成論理式について、「$\cdots$が真」と書いてあります。第３列には、第２列の論理式が真であるための条件が書いてあります。

たとえば$\neg$の第２列に

$$\neg A \text{ が真}$$

とあり、その右には

$$A \text{ が偽}$$

とあります。これは

$$\neg A \text{ が真であるのはちょうど } A \text{ が偽なときである}$$

という意味です。

論理式の真理値についてまとめておきます。

論理式の真理値

各論理式 A は、真と偽のうちちょうど一つを値としてとる。

各命題変数 $X, Y, \cdots$には真か偽 のどちらか一つをあてはめる。たとえば Xは真、Yは偽、$\cdots$ というようにする。

合成論理式については、表１の第２列がなりたつのは、第３列がなりたつときである。

3.3 ○と×

「. . . が真である」とか、「. . . が偽である」とか繰り返し書くのは大変です。それに真だとか偽だとかいうと、なんだか意味ありげで、敬遠したくなりそうです。それで、もっと親しみやすく、書き方も簡単な○ と× を使うことにします。

「真」を○ 、「偽」を× と書くことにします。試験の答えが正しいときには○ をもらうし、間違ったときには× をもらうでしょう。それと同じです。「いいよ」というときに指で○ を作って「グー」と言ったり、「だめだった」というときに両腕でクロスを作るでしょう。あれと同じです。

○ と× はちょうど反対のことです。間違った答案には○ はつきません。× を見てがっかりしますよね。「一穂のドレス、グーよ」と言いながら腕でクロスはつくりませんね。

○ と× を使って、真と偽の話を書き直しましょう。

彩希が一穂に出会って、

「これからチョコレートかクッキーかどっちか買うの」

と言いながら店にはいります。本当ににチョコレートを買ったら、「買ったよ」というつもりで、指で○ を作って合図します。クッキーを買っても同じことをします。彩希が言ったことは、「チョコレートを買う」が○ か、または「クッキーを買う」が○ のときに、本当だ、つまり○ だということになります。

このとき、チョコレートとクッキーの両方を買ってもいいのです。彩希が

「チョコレートかクッキーか、どっちか**は**買う」

と言えば、分かりやすかったんですね。

論理式では、

$$X \vee Y \text{が〇}$$

なのは

$$X \text{と} Y \text{のどちらかは〇}$$

のときである、ということになります。XとYの両方が× のときには、$X \vee Y$も× です。

淳子が

「りすはねずみの仲間で、くるみを食べるの」

と言います。彩希と一穂は「ほんとかなあ」と、ちょっと淳子を疑うようなふりをします。淳子はむきになって

「だって、りすはねずみの仲間でしょ」

二人は「ピンポーン」といいながら、指で〇 を作ります。

「それに、りすはくるみを食べるでしょ」

二人はまた「ピンポーン」といいながら、指で〇 を作ります。

「じゃあ、私の言ったこと当たってるじゃない、りすはねずみの仲間で、そしてくるみを食べるんだから」

「ピンポーン」

またまた〇 です。

「りすはねずみの仲間である」をXとおき、「りすはくるみを食べる」をYとおけば、淳子の言ったことは$X \wedge Y$と表されます。三人はXもYも〇 だから、$X \wedge Y$が〇 だ、ということを知っていたのです。もし淳子が「りすは蝶の仲間で、くるみを食べるの」と言った

ら、彩希と一穂は「りすは蝶の仲間じゃないよ」と言いながら、腕で× を作ったでしょう。Xが× ならば、$X \wedge Y$が× であることも知っているのです。

$X \Rightarrow Y$は、Xが○ のときにYも必ず○ であれば、○ になります。Xが○ なのにYが× ならば、全体は× です。

これらのことを整理して、論理式の○ × の決まり方の表を作ります。**論理式の○と×**と名付けられた、表２を見てください。前に出てきた**論理式の真理値表**の中で、**真**を○ で置きかえ、**偽**を× で置きかえたものです。二つの表を見くらべてみてください。

たとえば表２の¬の第２列に「$\neg A$ が○ 」とあり、その右には「A が× 」とあります。これは「$\neg A$ が○ であるのはちょうど A が× のときである」を表しています。

論理式の真理値の決まり方を、○と×を使って書き直しておきます。

論理式の真理値：○ と×

各論理式 A は、○ と× のうちちょうど一つを値としてとる。

各命題変数 $X, Y, \cdots$には○ か× のどちらか一つをあてはめる。たとえば Xは○ 、Yは× 、$\cdots$ というようにする。

合成論理式については、表２の第２列の○ × が第３列の条件で決まる。

実際に与えられた論理式の真理値の計算に、表２を応用しましょう。

たとえば論理式 $X \wedge \neg Y \Rightarrow Z$を Cとおきます。

Xが○ で、Yと Zが× のとき、Cの値は次のように順に計算できます。

表 2 の$\neg$で A を Yとすれば、Yが× なので、$\neg Y$は○ です。

次に$\wedge$の A を X、Bを$\neg Y$とすれば、Xも$\neg Y$も○ なので、$X \wedge \neg Y$はやはり○ になります。

さらに$\Rightarrow$ の A を $X \wedge \neg Y$、Bを Zとすれば、$A \Rightarrow B$が与えられた論理式 Cに当たります。A、つまり $X \wedge \neg Y$は○ ですから、$A \Rightarrow B$が○ になるためには Bである Zも○ でなければなりません。ところがいま Zは× としていますから、$A \Rightarrow B$は× です。ということで、最初の論理式 Cの真理値は× です。

Zの真理値だけ○ に変えてみたらどうでしょうか。A に当たる $X \wedge \neg Y$は、前と同じですから、○ です。今度は Bに当たる Zが○ですから、$\Rightarrow$ によって $A \Rightarrow B$、つまり Cは○ です。

$Z \Rightarrow \neg Z$はどうでしょう。Zが○ とすると、$\neg$より$\neg Z$は×です。$\Rightarrow$ より $Z \Rightarrow \neg Z$の値は× です。

Zが× のときには、$\Rightarrow$ の第 3 列では$\neg Z$について何も条件をつけていません。だから $Z \Rightarrow \neg Z$は○ なのです。

どちらの場合にも、$Z \Rightarrow \neg Z$の真理値は、ちょうど Zの真理値の反対になっていますね。$Z \Rightarrow \neg Z$の真理値は$\neg Z$の真理値と同じだ、ともいえます。

最後に $X \vee \neg X$の真理値を計算しましょう。表 2 の$\neg$から、Xが○ならば$\neg X$は×ですが、Xが×ならば$\neg X$は○です。つまり Xか$\neg X$の少なくとも一方が○ です。したがって$\vee$より、$X \vee \neg X$はつねに○です。

やってみよう！

Xが○ 、Yが× 、Zが○ のときに、下の各論理式の真理値を求めてください。

1. $X \Rightarrow \neg Y$
2. $Y \wedge Z$
3. $X \wedge (X \Rightarrow Z) \Rightarrow Z$

答え

１ Yが× であるから、表２の¬より$\neg Y$は○ 。Xが○ で、$\neg Y$が○ であるから、⇒ より全体が○ 。

２　$Y \wedge Z$ が○ であるためには、２行目よりYも Zも○ でなければならない。しかしYは× であるから、全体は× 。

３　これは、なれた人にはつまらないだろう。Zが○ なので、⇒ の意味から全体は○ 。このことに気づかないで、$X \Rightarrow Z$と $X \wedge (X \Rightarrow Z)$ を次々計算しても、もちろんかまわない。後で「しまった、もっと楽ができたのに」と思うだけ。なれないうちは楽は後まわしにして、順に計算してみるのもよい。

さてこの問題では、Zが× の場合も試そう。このときには計算をさぼるわけにはいかない。Xが○ なのにZは× だから、表２の⇒ よりより $X \Rightarrow Z$は× 、したがって∧より　$X \wedge (X \Rightarrow Z)$ の値は× 。⇒ より、全体は○ になる。

実はこの式は X と Z がどんな値の組み合わせをとっても、つねに ○ になる。残ったケースについて確かめてみるのは、容易だろう。

この論理式の形をよく見よう。この式が主張することを順に並べてみる。

（1）1 X

かつ

（2）$X \Rightarrow Z$

ならば

（3）Z

いいかえると、

X でありかつ「X ならば Z」である、とすれば Z である

ということである。これは前に説明した三段論法になっている。

いままでの説明から、三段論法はいつでも正しいことが分かる。だから毎日三段論法を使って暮らしていけるのだ。

3.4 ○×表

論理式の真理値の計算は面倒なだけで、特別難しいことはありません。表１または表２の「論理式の真理値」の四つの規則さえ理解すれば、あとはひたすら計算です。この四つの規則を表にしておくと、見やすくて便利です。このような表を、**真理値表**と呼びます。ここで真理値表の作り方を伝授します。

まず代表的なケースとして、$A \wedge B$ の真理値表を書いてみます。表３をみてください。

表３の読み方は次のとおりです。１列目は、行番号です。２列目と３列目に、論理式 A と論理式 B の真理値の組み合わせが全部並べてあります。たとえば行番号１では、A も B も真理値が○ の組み合わせです。３では、A が× で、B が○ の組み合わせです。４列目にそれぞれの組み合わせについての $A \wedge B$ の真理値が並んでいます。たとえば１の、○と○の組み合わせでは、$A \wedge B$ の値は○ です。３の組み合わせでは、値は× です。

表３が正しいことを、「論理式の○と×の」表にしたがって確かめてみましょう。表２をもう一度見てください。たとえば A も B も○ のときには、$A \wedge B$ は○ です。これは表３の１行目の４列目と同じです。

A が○ で B が× ならば、表２の２行目の第３列の条件に合いません。だから $A \wedge B$ は× です。これは表３の２行目の４列目と同じです。

同じようにほかの論理記号についても、表を作っておきます。合成論理式 $A \vee B$、$A \Rightarrow B$、$\neg A$ の真理値表が、それぞれ表４、表５、表６です。

これらの表の中で、$\neg A$ だけは、ほかの表とちょっと違う形です。$\neg$ が作用する論理式が A 一つだからです。

やってみよう！

真理値表の○ と× が、前の節の表２と合っていることを確かめてください。

答え

いくつかの例をとりあげる。
表３（$A \wedge B$） A が○ 、Bが× のとき、表２の∧における「A も B も○ 」という条件を満たさない。したがって、表３で２行目の第３列目は× になる。
表４（$A \vee B$） A が× 、Bが○ のとき、表２の∨における「A と B の少なくとも一方が○」という条件を満たす。したがって表４において、３行目の第３列目は○ である。
表５（$A \Rightarrow B$） A が○で Bが× のとき、表２の⇒ の「A が○ならば Bも○」という条件に反する。したがって表５の２行目の第４列目は×である。
表６（$\neg Z$） A が×のとき、表２の¬における「A が×」の条件を満たすので、表６において、２行目の第３列目は○である。

3.5 ○×の計算

真理値表を使って、いくつかの論理式の真理値を計算してみましょう。

（１）$\neg A \vee B$の真理値
この論理式の真理値の計算には、まず表６を使って、$\neg A$ を計算します。その結果と∨の表４を組み合わせます。計算結果は下の表７のとおりです。

（２）$\neg X \Rightarrow X$

これは変数が X一つだから、計算は楽です。まず表６で、A を X とおいて書き直してください。そうすると、Xと$\neg X$の真理値はちょ

うど逆になっていることがわかります。次に表５で、A を$\neg X$、BをXとすれば、A と Bの値が逆になっている行だけを調べます。それは行２と３です。その結果が表 3.8 です。

（３）$X \vee \neg X$

Xと$\neg X$がちょうど反対の値になることは、¬の表からすぐわかります。∨の表４の２と３から、全体の真理値は○ です。Xは○ のことも× のこともあります。それでも全体はいつでも○ です。

このような形の論理式を**排中律**と呼びます。排中律はいつでも正しいのです。排中律の真理値表は、下の表になります。

X	$\neg X$	$X \vee \neg X$
○	×	○
×	○	○

やってみよう！

真理値表を応用して、論理式の真理値を計算してください。ただし、Xは× 、Yは○ 、Zは○ とします。

1. $X \Rightarrow \neg X$
2. $X \vee (X \Rightarrow Y)$
3. $Y \vee Z \Rightarrow \neg Y$

答え

??

X	$\neg X$	$X \Rightarrow \neg X$
○	×	×
×	○	○

??

X	Y	$X \Rightarrow Y$	$X \vee (X \Rightarrow Y)$
○	○	○	○
○	×	×	○
×	○	○	○
×	×	○	○

この式はつねに真である。

?? $\vee$の表の１行目により、$Y \vee Z$は○ 。また、$\neg$の表６によりにより$\neg Y$は× である。したがって、$\Rightarrow$ の表５の２から、全体の値は× となる。

3.6 文章の意味と○×

前の節では、表を見ながら論理式の真理値を計算しただけでした。論理式の意味は分からなくても真理値の計算はできる！それが真理値表の便利なところです。

でも論理式といっても、もとは何か文章だったはずです。論理式の真理値と文章の内容には、どんな関係があるのでしょうか。前の節の例で考えてみましょう。前の番号を引用します。

（１）$\neg A \vee B$

表７から第２列を除いてみてください。 $A \Rightarrow B$ の表６と同じに

なるでしょう。A と Bの真理値が何であっても、$A \Rightarrow B$の真理値と$\neg A \vee B$の真理値が等しい、ということです。これは真理値については、$A \Rightarrow B$ と$\neg A \vee B$は区別がつかないということです。

「計算ではそうだけど、意味がわからない」という声が聞こえます。

例で説明しましょう。彩希と一穂が福引きゲームをします。彩希が

「もし一穂がグリーンの球を引いたら、ハンカチをあげるわ」

と言います。ここで注意して欲しいのは、もし一穂の引いたのがグリーンの球でなかったら、彩希は一穂に対して何も約束したことにならない、ということです。気まぐれでハンカチをあげても、何もあげなくても、彩希はうそを言ったことになりません。

一穂が実際にグリーンの球を引いたときに、彩希がちゃんとハンカチをあげたら、彩希は本気で約束したことになります。もしそのときハンカチをあげなかったら、彩希は本気じゃなかった、彩希の言ったことはうそだった、ということになってしまいます。

「一穂がグリーンの球を引く」を A とおき、「彩希が一穂にハンカチをあげる」を Bとおくと、彩希が約束したことは $A \Rightarrow B$と表されます。

ところで今説明したように、一穂がグリーンの球を引かなければ、彩希がハンカチを一穂にあげてもあげなくても、うそをついたことにはなりません。ハンカチをあげれば、一穂が何色の球を引いても、やはり彩希はうそをついたことにはなりません。つまり一穂がグリーンの球を引かないか、または彩希が一穂にハンカチをあげれば、彩希は本当のことを言ったことになります。このことは$\neg A \vee B$で表されます。

このように形の違う論理式が同じ内容を表すことがあります。後

の節で、詳しく説明します。

（２）$\neg X \vee X$

表８の１行目は$\Rightarrow$ の表６の２行目、２行目は$\Rightarrow$ の表の３行目に当たります。この表の第１列、つまり Xの真理値と第３列、つまり $\neg X \Rightarrow X$の真理値をくらべてください。同じですね。真理値については、$\neg X \Rightarrow X$と Xは同じ内容なのです。

またまたわかりにくいですか？でも、これって案外役にたつんですよ。

こんなパズルはどうでしょう。彩希が一穂にリボンをかけた箱をプレゼントします。

「この中に入っているのは、ちょっと変わったプレゼントなの。もしそれがガラスの仮面でなければ、それはガラスの仮面なの」

彩希ってミステリアスですね。さて、プレゼントはガラスの仮面でしょうか？

「それがガラスの仮面である」を Xとおきます。そうすると「それがガラスの仮面でなければ、それはガラスの仮面なの」は$\neg X \Rightarrow X$となります。これはちょうど上の（２）です。（２）の真理値は Xの真理値と同じでした。

だからもし彩希が本当のことを言っているのならば、プレゼントはガラスの仮面です。彩希が一穂をからかってうそを言っているのならば、プレゼントはガラスの仮面ではありません。

（３）$X \vee \neg X$

こういう形の論理式は**排中律**と呼ばれるのでした。

彩希がイヤリングを落としました。「見つかるかなあ」と、ちょっとがっかりしながらいうと、一穂が「うん、まあ、見つかるかもしれ

ないし、見つからないかもしれない」
と冷たいことを言います。彩希がそれを聞いて
「そんな、当たりまえのこといわないでよ」
と怒ってしまいました。

それって本当に当たりまえ？

「見つかるかもしれないし、見つからないかもしれない」を、整理してみると、「見つかるか見つからないかどっちか」ということですね。ここで繰りかえされる「か」は「または」の意味ですから、結局一穂は「見つかるか、または見つからない」と言ったことになります。

「見つかる」を X とおいてみましょう。そうすると一穂が言ったことは $X \vee \neg X$ と表せます。これは排中律ですから、この値はいつも ○ です。だからイヤリングが「見つかるかもしれなし見つからないかもしれない」というのは、本当に見つかるか見つからないかに関係なく、正しいのです。「当たりまえ」なのです。一穂のいうことは正しいけれど、本当に見つかるかどうかについては何も言っていません。それでは彩希の慰めにはなりません。彩希がいらいらするのも無理ありません。友達にはもっとやさしくしましょうね。

排中律という名前は、読んで字のごとく「中間を排除する法則」という意味からつけられました。X であるか $\neg X$ であるか、どちらかで、その間には何もない、という意味です。

表 3.1: 論理式の真理値

$\neg$	$\neg A$ が真	A が偽
$\wedge$	$A \wedge B$が真	A も Bも真
$\vee$	$A \vee B$が真	A が真であるかまたは Bが真
$\Rightarrow$	$A \Rightarrow B$が真	A が真ならば Bも真

表 3.2: 論理式の○ と×

$\neg$	$\neg A$ が○	A が×
$\wedge$	$A \wedge B$が○	A も Bも○
$\vee$	$A \vee B$が○	A が○であるかまたは Bが○
$\Rightarrow$	$A \Rightarrow B$が○	A が○ならば Bも○

表 3.3: $A \wedge B$の真理値表

A	B	$A \wedge B$
○	○	○
○	×	×
×	○	×
×	×	×

表 3.4: $A \vee B$の真理値表

A	B	$A \vee B$
○	○	○
○	×	○
×	○	○
×	×	×

表 3.5: $A \Rightarrow B$の真理値表

A	B	$A \Rightarrow B$
○	○	○
○	×	×
×	○	○
×	×	○

表 3.6: $\neg A$ の真理値表

A	$\neg A$
○	×
×	○

表 3.7: $\neg A \vee B$の真理値表

A	$\neg A$	B	$\neg A \vee B$
○	×	○	○
○	×	×	×
×	○	○	○
×	○	×	○

表 3.8: $\neg X \Rightarrow X$の真理値表

X	$\neg X$	$\neg X \Rightarrow X$
○	×	○
×	○	×

Chapter 4

真理値に関する性質

4.1　便利な等式

前の節で、$A \Rightarrow B$ を$\Rightarrow$ のかわりに$\vee$と$\neg$を使って、$\neg A \vee B$と書きかえられることが分かりました。これらは真理値に関しては同じでした。このことを、$A \Rightarrow B$と$\neg A \vee B$は**同値**である、といいます。

また、同値であることを

$A \Rightarrow B = \neg A \vee B$

と書くことにします。=は $A \Rightarrow B$の○×の組み合わせと$\neg A \vee B$の○×の組み合わせが、いつも同じである、ということを示しています。

ほかにもこういう例はいろいろあります。たとえば$A \wedge B$と$\neg(\neg A \vee \neg B)$ は同値です。式で表せば、

$$A \wedge B = \neg(\neg A \vee \neg V)$$

となります。

同値についてまとめておきましょう。

論理式の同値式

二つの論理式 A と Bについて、それらに現れる命題変数の真理値に関係なく、A と Bの真理値がつねに等しいときに、A と Bは**同値である**といい、

$$A = B$$

という等式で表す。

よく使われる、論理式についての等式を、いくつかあげておきます。

真理値の等式–論理記号の書きかえ

1. $A \wedge B = \neg(\neg A \vee \neg B)$
2. $A \vee B = \neg(\neg A \wedge \neg B) = \neg A \Rightarrow B$
3. $A \Rightarrow B = \neg A \vee B = \neg(A \wedge \neg B)$

これらの等式を見ると、真理値ということだけを考えれば、論理記号として、$\wedge$と$\neg$の二つ、または$\vee$と$\neg$の二つだけあればよいことがわかります。

たとえば$\wedge$と$\neg$があれば、??によって $A \vee B$は$\neg(\neg A \wedge \neg B)$ で代用できます。また、$A \Rightarrow B$は??によって、$\neg(A \wedge \neg B)$ で、代用できます。

二つだけでいいのに、なぜ４個も論理記号を使うのでしょうか？それは、二つだけでは不便だからです。

「来週札幌に行くことになるかなあ。それだったら、飛行機の切符とらなきゃ」
とお父さんがつぶやいています。大事なことだけを抜きだすと、
（１）　札幌に行くのならば、飛行機の予約をする
ということです。「札幌に行く」を A、「飛行機のを予約をする」を B とおくと、（１）は $A \Rightarrow B$の形をしています。これは等式??によって、$\neg A \vee B$と同値です。$\neg A \vee B$を日本語にすると
（２）　札幌に行かないか、または飛行機の予約をする
となります。よく考えればたしかに（１）と（２）は同じ意味ですが、こんなことをいちいち考えていられません。

（１）を聞いていれば、お父さんが本当に札幌に行くことになったとき、「じゃあ、飛行機を予約するんだな」とすぐに納得しますよね。（２）だったら「え？それでどうするの？」といいたくなるでしょう。

毎日の生活や遊びでも、数学やそのほかの勉強をするときにも、なるべくわかりやすい言い方が必要です。

論理記号の書きかえ以外にも、知っていると便利な等式がいろいろあります。それらは、論理記号が互いにどのような関係にあるかを示すものです。一覧表を作っておきます。今すぐわけがわからなくても、いざというときに使えるので便利です。

下の等式のリストで、$F =$ ○などという書き方が出てきます。こ

れは論理式 Fの真理値が○ である、という意味です。論理式と真理値というものを = でつなぐなんて，乱暴な話です。読みやすいようにそうしてありますが、よそではあまりまねをしないでください。

真理値の等式–論理記号間の関係

交換律　$A \vee B = B \vee A \quad A \wedge B = B \wedge A$

結合律　$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$

$A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$

分配律　$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

$\vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

真、偽　$A \vee \neg A = $ ○　$A \wedge \neg A = \times$

$U = \times$のとき　$A \vee U = A$

$U = $ ○のとき　$A \wedge U = A$

吸収律　$A \vee (A \wedge B) = A \quad A \wedge (A \vee B) = A$

ド・モルガンの法則　$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$

$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$

否定　$B = \neg A$、$A \vee B = $ ○ かつ　$A \wedge B = \times$、

$A = \neg B$の三つの等式は、互いに同時になりたつ。

条件文　$A \Rightarrow B = $ ○、$A \wedge B = A$、 $A \vee B = B$の三つの等式は、互いに同時になりたつ。

それぞれの等式に標題がついています。二つの等式をとりあげて、等式と標題の意味を説明します。

交換律　$A \vee B = B \vee A$

$\wedge$と$\vee$については、A と Bの順序を交換しても真理値が同じである。

実際に $A \vee B = B \vee A$ であることは、$\vee$の真理値表からすぐわかります。各行で、A と Bを逆にしてみても、最後の列の真理値が同じになるからです。

お母さんが彩希に

「一穂ちゃんと淳子ちゃんがくるんでしょ。紅茶いれてあげるから、チョコレートかクッキーでも買ってきたら？」

と、声をかけます。彩希は

「うん、クッキーかチョコレートね」

と言いながら出かけます。

チョコレートとクッキーの順序が変わっていても、お母さんはびっくりしませんね。本当は二人が同じことを言っているのは、明らかです。

「チョコレートを買う」を A、「ハンカチを買う」を Bとおけば、お母さんは$A \vee B$と頼み、彩希は$B \vee A$ と答えたことになります。意味を考えれば、$A \vee B = B \vee A$がなりたつことは、納得いくでしょう。

吸収律　$A \vee (A \wedge B) = A$

$A \vee (A \wedge B)$ は Bを吸収してしまって、A となる。

A が○ のとき、$\vee$の真理値表の 1 と 2 より、$A \vee (A \wedge B)$ は○ です。また、A が× のとき、$\wedge$の真理値表の 3 と 4 より、$A \wedge B$は× です。これより、$A \vee (A \wedge B)$ は$\vee$の真理値表の 4 から、× であることがわかります。どちらの場合も、A の真理値と $A \vee (A \wedge B)$ の真理値

は同じになりました。

「真理値は同じかもしれないけれど、$A \vee (A \wedge B)$ には Bっていう論理式が現れるのに、なぜ一つの論理式 A と同値なの？」
不思議ですよね。

彩希と一穂が

「ソックスが入ってるか、ソックスとハンカチが入ってるか、どっちかよ」
と言って、プレゼントの箱を淳子に渡します。

淳子　「それってほんと？うそついてない？」

彩希　「ほんとよ。私たち、うそつくわけないじゃない」

淳子　「じゃあ、ソックスは入ってるわね」

彩希と一穂は顔を見合わせてうなずきます。ソックスが入っているって、どうして分かるのでしょう。

彩希と一穂が本当のことを言っていれば、プレゼントの箱に「ソックスが入っている」か「ソックスとハンカチが入っているか」どっちかです。実際にソックスが入っていれば、「ソックスは入ってるわね」は当たりです。実際にソックスとハンカチが入っているならば、もちろんソックスが入っているわけですから、このときも「ソックスは入ってるわね」は当たりです。

真理値でいえば、「ソックスが入ってるか、ソックスとハンカチが入ってるか、どっちか」が◯ ならば、「ソックスが入ってる」が◯です。

もし、実際にソックスが入っていれば、「どっちか」のうち、最初の「ソックスが入ってる」が◯ なので、「ソックスが入ってるか、ソックスとハンカチが入ってるか、どっちか」は◯ です。

このとき、「ハンカチも入ってる」が本当かどうかは関係ありません。ソックスが入っているかどうか、だけで決まるのです。

「ソックスが入ってる」を X、「ハンカチが入ってる」を Y とおけば、

「ソックスが入ってるか、ソックスとハンカチが入ってる」

は

$$X \vee (X \wedge Y)$$

と表されます。これが X と同値であることが分かったわけです。

やってみよう！

$U = \times$ のとき $A \vee U = A$ がなりたつことを示してください。

答え

$U = \times$ と仮定する。$A \vee U$ の真理値は、$\vee$ の真理値表で B を U とすれば、B の値が× の行だけ調べればよい。それは２と４である。A が○ の２では $A \vee U$ の真理値は○ であり、A が× の４では $A \vee U$ の真理値は× である。どちらの場合にも、A の真理値と $A \vee U$ の真理値は一致する。したがって $A \vee U = A$ がなりたつ。

4.2 「でない」と「または」だけを使う論理式

論理式はいろいろな形をしています。そして見かけ上全然違う式でも真理値は同じことがある、という例がありました。たとえば $A \Rightarrow B$ と $\neg A \vee B$ はそうでした。ください。

これは $A \Rightarrow B$ と $\neg A \vee B$ が文章としてはずいぶんちがうのに、真理値については同じでる、ということでした。前の節には、真理値に関して等しい論理式の一覧表もありました。

もちろん会話をしたり、そのほか情報を伝えあうときには、真理値が同じだからといってどんな論理式を使ってもいいわけではありません。でも、真理値だけが問題ならば、なるべく真理値がわかりやすい形のほうが便利です。そこで考えられたのが、**和積標準形**というものです。

和積標準形は、特別な形をした論理式です。それは**基本和**という、やはり特別な形をした論理式をいくつか、$\wedge$ でつないだものです。この節では、まず基本和について説明します。

最初は例で話を進めましょう。$X \Rightarrow Y$ と $\neg X \vee Y$ は、真理値が同じでした。X と Y が命題変数のとき、$\neg X \vee Y$ は命題変数 X に $\neg$ をつけた $\neg X$ と命題変数 Y を、$\vee$ でつないだものです。論理記号 $\vee$ を**論理和**と呼ぶことがあるので、このように命題変数またはその否定を $\vee$ でつないだ論理式を、**基本和**と呼びます。

基本和ということばを使うと上の例は、

$$X \Rightarrow Y \text{と同値な基本和} \neg X \vee Y \text{がある}$$

といえます。

真理値の計算に基本和を使ってみましょう。$\vee$の真理値表から、$\neg X \vee Y$が○ であるのは、$\neg X$かYのどちらかが○ のときです。$\neg X$が○ であるのは、Xが× のときです。

このことから、$\neg X \vee Y$が○であるのは、Xが×かYが○のときである、ということになります。

このように、命題変数またはその否定が$\vee$でつながれている論理式については、その真理値が○ であるかどうか判定するためには、一つの命題変数が○ であるか、$\neg$のついた一つの命題変数が× であるか、ということさえ調べればいいのです。

Xが○ で、Yが○ としましょう。$\neg X \vee Y$は$\neg X$とYを$\vee$でつないだ論理式です。そのうち、命題変数Yが○ ですから、全体は○ になります。もしXが○ で、Yが× ならば、$\neg$のついたXが× でなく、$\neg$のつかないYが○ でないので、全体は× です。Xが× ならば、$\neg$のついた変数が× なので、全体は○ になります。

もう少し分かりやすいような書き方を工夫しましょう。Xが○ でYが○ のとき、

$\neg$のつく命題変数で真理値が× のもの$\cdots$なし

$\neg$のつかない命題変数で真理値が○ のもの$\cdots Y$

となります。この表から、第２行にYがあるので、全体は○ であることがわかります。

Xが○ でYが× の場合には、

$\neg$のつく命題変数で真理値が× のもの$\cdots$なし

$$\neg\text{のつかない命題変数で真理値が○ のもの}\cdots\text{なし}$$

となり、全体は× です。

Xが×でYが○のとき、

$$\neg\text{のつく命題変数で真理値が× のもの}\cdots X$$

$$\neg\text{のつかない命題変数で真理値が○ のもの}\cdots Y$$

となり、$\neg X \vee Y$は○です。

もっと変数がある場合、たとえば$\neg X \vee Y \vee Z$ではどうでしょうか。この論理式は、正式には$(\neg X \vee Y) \vee Z$ または$\neg X \vee (Y \vee Z)$ですが、結合律によってこの二つは同値でした。$(\neg X \vee Y) \vee Z$を例にとると、これが○ であるのは$(\neg X \vee Y)$が○ であるか、Zが○ であるかどちらかのときです。$(\neg X \vee Y)$が○ であるのは、Xが× であるか、Yが○ のときです。

整理すると、¬がついている変数Xが× で、¬がついていない変数YとZが○ のときに全体が○ です。このことは、$\neg X \vee Y$ の場合にZが加わっただけです。Xが○ 、Yが× 、Zが○ のときに全体の真理値を調べましょう。

$$\neg\text{のつく命題変数で真理値が× のもの}\cdots\text{なし}$$

$$\neg\text{のつかない命題変数で真理値が○ のもの}\cdots Z$$

第２行にZがあるので、全体は○ になります。２行目が空のときにだけ全体が× になります。

変数だけのXや変数の否定$\neg X$なども、基本和の特殊なものとして認められます。∨がゼロ個ある、と考えるのです。

4.3 基本和を作る

$X \Rightarrow Y$は同値な基本和$\neg X \vee Y$でおきかえられました。ほかにも基本和で置きかえられるものがあります。$\neg\neg X$は、$\neg$が二つついているので、基本和とはいえませんが、$\neg\neg X = X$なので、X でおきかえることができます。

$\neg(X \wedge Y)$ は、ド・モルガンの法則によって$\neg X \vee \neg Y$と同値でした。$\neg X \vee \neg Y$は基本和です。

論理式 $X \Rightarrow \neg(X \wedge \neg Y)$ を基本和に変形して、その真理値を求める手続きを、実行してみましょう。

（１）$\Rightarrow$ を除く：$\neg X \vee \neg(Z \wedge \neg Y)$

（２）かっこの外の$\neg$を除く：$\neg X \vee (\neg Z \vee \neg\neg Y)$

（３）二つ続く$\neg$を除く：$\neg X \vee (\neg Z \vee Y)$

（３）は基本和です。Xが○ 、Yが× 、Zが× のときの真理値を求めると、$\neg$がつく× な変数 Zがあるので、○ です。もし Xが○ 、Yが× 、Zが○ ならば、$\neg$がつかない変数で○ なものも、$\neg$がつく変数で× なものもないので、全体は× になります。

日本語の文章を表しているはずの論理式が、基本和という決まった形に変形されて、意味がわからなくなりました。

「文字と記号ばっかりで面白くない！」
と不満な人は、基本和を使っての真理値の計算を、ゲーム感覚で楽しんでください。

やってみよう！

基本和を使って、真理値の計算をしてください。

1. 一穂が淳子に「これがソックスなら、これはソックスじゃないの」と言いながら、プレゼントを渡します。一穂の言うことは、どんなときに正しいでしょうか。

2. 彩希は「一穂のレッスンが終わらなかったら、ショッピングに行けない」と心配しています。彩希の言うことは、どんなときに本当に起こるでしょうか。

3. Xも Yも× のときに、$\neg(X \wedge (X \wedge \neg Y))$ の真理値は何でしょうか。

答え

1「これがソックスである」を Xとおくと、一穂は $X \Rightarrow \neg X$と言っている。$\Rightarrow$ を除いて、$\neg X \vee \neg X$という基本和を得る。$\neg X$が繰り返されているので、一つについてだチェックすればよい。$\neg$がついている変数 Xが× のときに$\neg X$は○ になる。すなわち、プレゼントの中身がソックスでないときに、一穂は正しいことを言っている。

2「一穂のレッスンが終わる」を X、「ショッピングに行ける」を Yとおくと、彩希は$\neg X \Rightarrow \neg Y$と言ったことになる。$\Rightarrow$ を除くと、$\neg\neg X \vee \neg Y$と変形される。2 重の$\neg$を除いて基本和 $X \vee \neg Y$を得る。これが○ であるのは、$\neg$のついていない変数 Xが○ であるか、$\neg$がついている変数 Yが× のときである。すなわち、一穂のレッスンが終わるか、ショッピングに行けないときである。

3 与えられた論理式を、次の順序で変形して行く。

ド・モルガンの法則：$\neg X \vee \neg(X \wedge \neg Y))$

ド・モルガンの法則：$\neg X \vee (\neg X \vee \neg\neg Y)$

２重の$\neg$の除去：$\neg X \vee (\neg X \vee Y)$

$\neg$のついている変数 Xが× なので、もとの論理式は○ 。

4.4 $\wedge\vee$標準形

「一穂のレッスンが終わらなかったらショッピングに行かないし、私の宿題が終わらなければ、やっぱりショッピングには行かないわ」

彩希がつぶやきながら、朝から宿題をしています。その日の午後、一穂はピアノのレッスンを終わったのですが、彩希は宿題が残っています。それでも二人はショッピングに出かけました。彩希が朝つぶやいていたことは、どうなったのでしょうか。

「一穂のレッスンが終わる」を A、「ショッピングに行く」を B、「彩希が宿題を終わる」を Cとおくと、彩希が朝つぶやいたことは

$$(\neg A \Rightarrow \neg B) \wedge (\neg C \Rightarrow \neg B)$$

と表されます。$\wedge$でつないである論理式 $(\neg A \Rightarrow B)$ と $(\neg C \Rightarrow B)$ はそれぞれ基本和 $A \vee \neg B$と $C \vee \neg B$ に変形されます。

一穂のレッスンが終わったので、A は○です。彩希の宿題は終わらなかったのですから、Cは×です。それでもショッピングに行ったのですから、Cは○です。

基本和 $A \vee \neg B$については

$\neg$のつく命題変数で真理値が× のもの$\cdots$なし

$$\neg \text{のつかない命題変数で真理値が○ のもの} \cdots A$$

なので、全体は○です。
基本和 $C \vee \neg B$ については

$$\neg \text{のつく命題変数で真理値が} \times \text{ のもの} \cdots \text{なし}$$

$$\neg \text{のつかない命題変数で真理値が○ のもの} \cdots \text{なし}$$

なので、全体は×です。この二つが∧でつないであるので、彩希がつぶやいたことは×になります。朝には宿題が終わらなかったら出かけない、と決心していたのですが、一穂から「レッスン終わった」と電話がきたら、宿題は放って出かけてしまったのです。朝の決心なんてどこかにとんでしまって、うそになってしまったんですね。でも私は、そんなふうに呑気になってみるのも、たまには良いことだと思っています。

$$(A \vee \neg B) \wedge (C \vee \neg B)$$

は、$(A \vee \neg B)$ という基本和と $(C \vee \neg B)$ という基本和を∧でつないだものですが、こういう形の論理式を「和積標準形」と呼びます。基本和がもとになっているので、「和」ということばがついています。また、∧は「論理積」とも呼ばれるので、「積」ということばがついています。「標準形」というのは、ある決まった形をした論理式、という意味で、どんな論理式もその形の同値な論理式に変えることができる場合に使うことばです。

和積標準形ということばを知っていると便利ですが、堅苦しい感じもします。ここでは見た目でわかりやすく∧∨標準形と呼びましょう。∨が中にあって、∧が外にある形を表しています。記号の形から、「山・谷形」と覚えてもいいです。

∧∨標準形の真理値は、上の例で分かるように、まずそれぞれの基本和の真理値を計算します。その結果の○×の組み合わせによって、∧の真理値表から全体の真理値を求めます。

$A \wedge B$の真理値は、A と Bの両方が○のときに○、どちらか一つでも×のときには×でした。$A \wedge (B \wedge C)$ のように、∧でつながる論理式がたくさんあっても、同じことです。$A \wedge (B \wedge C)$ が正しいのは、A も Bも Cも正しいときですから、A、B、Cのそれぞれが○かどうかチェックすればいいわけです。

この例から分かるように、∧∨標準形の真理値は、下のような一般的なルールで計算できます。

∧∨標準形の真理値∧∨標準形 $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$が○になるのは、次のことがなりたつときである：

A_1、A_2、$\cdots$、A_nのそれぞれが○である。

∧∨標準形は、真理値の簡単な計算方法があって、便利です。では、どんな論理式も、同値な∧∨標準形に変形できるのでしょうか？

「一穂がレッスン終わらないか私が宿題終わらなかったら、ショッピングには行かないわ」

彩希がまたつぶやいています。前のように A、B、Cを決めると、彩希は$\neg A \vee \neg C \Rightarrow \neg B$で表されます。これをなんとか∧∨標準形にし

たいものです。4.1 節の**真理値の等式-論理記号の書きかえ**と**真理値の等式-論理記号間の関係**を使って書きかえていきます。

$\wedge\vee$標準形には$\Rightarrow$ は現れませんから、まず$\Rightarrow$ を除いてみます。結果は$\neg(\neg A \vee \neg C) \vee \neg B$となります。これは$\neg$が $(\neg A \vee \neg C)$ の外にあるので、まだ$\wedge\vee$標準形ではありません。この$\neg(\neg A \vee \neg C)$ の部分をド・モルガンの法則で変形すると、$(A \wedge C) \vee \neg B$となります。これも$\vee$が$\wedge$の外にあるので、まだ$\wedge\vee$標準形ではありません。最後に分配律で $(A \vee \neg B) \wedge (C \vee \neg B)$ に変形すると、やっと$\wedge\vee$標準形になりました。

実は、どんな論理式も同値な$\wedge\vee$標準形に書きかえることができます。例で使った書きかえの手続きを整理しておきます。

標準化の手続き

与えられた論理式を$\wedge\vee$標準形にするには、つぎの手続きで、同値な式に変形していきます。

1. $\neg(A \vee B)$ を$\neg A \wedge \neg B$で置きかえる。
2. $\neg(A \wedge B)$ を$\neg A \vee \neg B$で置きかえる。
3. $A \Rightarrow B$を$\neg A \vee B$で置きかえる。
4. $\neg\neg A$ を A で置きかえる。
5. $A\vee(B\wedge C)$ を $(A\vee B)\wedge(A\vee C)$ で置きかえる。また、$(B\wedge C)\vee A$ を $(B \vee A) \wedge (C \vee A)$ で置きかえる。

6. $A \wedge (B \vee C)$ を $(A \vee B) \wedge (B \vee C)$ で置きかえる。また、$(B \vee C) \wedge A$ を $(B \vee A) \wedge (C \vee A)$ で置きかえる。

変形前と後で真理値が同じであることは、4.1 節の等式を使うと分かります。興味のある人は示してみてください。

一つ練習をしましょう。

$(X \vee Y) \Rightarrow \neg\neg Z$
$(X \vee Y) \Rightarrow Z$ （手続き 4）
$\neg(X \vee Y) \vee Z$ （手続き 3）
$(\neg X \wedge \neg Y) \vee Z$ （手続き 1）
$(\neg X \vee Z) \wedge (\neg Y \vee Z)$ （手続き 5）

最後の論理式は∧∨標準形です。たとえば X が〇、Y が×、Z が×、のときに、真理値はどうなるでしょうか。二つの基本和 $(\neg X \vee Z)$ と $(\neg Y \vee Z)$ について、真理値を調べます。$(\neg X \vee Z)$ は

$\neg$のつく命題変数で真理値が× のもの$\cdots$なし

$\neg$のつかない命題変数で真理値が〇 のもの$\cdots$なし

なので、×です。基本和の一つが×なので、実はこのとき第 2 の基本和 $(\neg Y \vee Z)$ について計算しなくても、全体は×です。念のために真理値を調べると、

$\neg$のつく命題変数で真理値が× のもの$\cdots Y$

なので、$(\neg Y \vee Z)$ は〇です。

複雑なパズルを意味を考えて解くのは大変です。問題を論理式に書いてから、∧∨標準形になおして真理値を調べれば、必ず解けます。

やってみよう！

1. 次の文章を、∧∨標準形で表してください。

   （１）一穂がソックスを買わないならば、淳子は誕生日が楽しくない。

   （２）朝顔が夏に咲かず、タンポポが冬にさくようになったら、人類はほろびる。

2. （１)、（２）それぞれについて、次のような条件がなりたつときに、真理値を計算してください。

   （１）一穂がソックスを買って、淳子が楽しくない。

   （２）朝顔が春に咲いて夏には枯れ、タンポポが冬に咲いた。

答え

1. （１)「一穂がソックスを買う」を X、「淳子が楽しい」を Y とおくと、（１）の文章は $\neg X \Rightarrow \neg Y$ と表される。

4.5 恒真な論理式

3.3 節で、$X \vee \neg X$ という形の論理式はいつも○ で、排中律と呼ばれることを知りました。4.1 節の真理値に関する等式にも出てきました。このように、命題変数にどんな真理値をあてはめても、全体がいつも○ であるときに、その論理式は恒真である、といいます。まさに「恒に真」ということですね。

恒真な論理式はほかにもたくさんあります。たとえば $X \Rightarrow X$ です。$\Rightarrow$ の左右が同じ論理式 X ですから、真理値は左右いつも同じです。Ra の真理値表 3.5 の１行目と４行目を見れば、このとき X が○でも×でも全体の真理値は○になっています。

意味を考えても、$X \Rightarrow X$ が恒真であることは、分かるでしょう。

「宇宙人ってほんとにいるのかなあ」
と淳子がいうと、

「もし宇宙人がいるとすれば、ほんとにいるよ」
と、一穂が答えます。

「それじゃあ、いるかいないかわからないじゃない」

と、淳子が口をとがらします。一穂の答えを詳しく書くと、

「もし、宇宙人がいるならば、ほんとに宇宙人がいる」
となります。もっとスリムにすれば、

「宇宙人がいるならば、宇宙人がいる」
ということです。「いるならば、いる」なんて当たり前ですね。本当にいるかどうかに関係なく、一穂は正しいことを言っています。ただ、淳子の疑問には答えていないのです。

「宇宙人がいる」を X とおけば、一穂の答えはまさに $X \Rightarrow X$ です。X が正しくても正しくなくても、$X \Rightarrow X$ は○です。見方を変えれば、$X \Rightarrow X$ はいつでも正しいので、それから X が正しいかどうかは、わからないのです。恒真な論理式はみんなそういう性質をもっています。

「宇宙人がいるか、いないか、どっちかだと思うな」
と彩希が続けると、

「またあ、そんな当たり前のこと言ったって、ほんとにいるかど

うかわからないじゃない」
と、淳子はまた不満そうです。彩希は $X \vee \neg X$ と言っているわけで、これが前にでてきた排中律ですね。

実は $X \Rightarrow X$ を∧∨標準形に直すと、変形手続き 3 によって $\neg X \vee X$ になります。

文字が X ばかりではつまらないので、もう一つ例をあげましょう。

$$X \Rightarrow (Y \Rightarrow X)$$

X が×のとき、X を A、$(Y \Rightarrow X)$ を B とおけば、$X \Rightarrow (Y \Rightarrow X)$ は $A \Rightarrow B$ と表されます。A が×なのですから、$\Rightarrow$ の真理値表 3.5 によって、$A \Rightarrow B$ は○です。X が○のときには、やはり真理値表 3.5 によって、$(Y \Rightarrow X)$ が○です。つまり B が○です。もう一度真理値表 3.5 を使えば、$A \Rightarrow B$ は○です。A は○か×かどちらかですから、$X \Rightarrow (Y \Rightarrow X)$ はいつでも○であることがわかりました。このとき Y の真理値は関係ありません。

もっともっと複雑な論理式で、恒真なものがたくさんあります。パズルの問題に、そういう例がでてきます。ここでは、ある論理式が恒真かどうかの判定に、前節の∧∨標準形を応用します。

∧∨標準形は、$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$ という形をしていました。ただし $A_1, A_2, \cdots A_n$ のそれぞれは、基本和とします。$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$ の値が○ であるのは、各基本和 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ のそれぞれの値が○ のときでした。基本和の真理値の求め方は 4.2 節で学びました。

この方法を応用すれば、ある論理式が恒真であるかどうか判定する簡単な方法が得られます。

命題変数に〇と×をあてはめたときに、基本和が〇になるかどうか判定する方法は、4.2 節で知ることができました。ここでおさらいしましょう。基本和 A が〇になるのは、¬のつく命題変数で真理値が×のものがあるか、¬のつかない命題変数で真理値が〇 のものがあるときでした。

A に、ある命題変数 Xと$\neg X$の両方が現れるとします。Xは〇か×かどちらかです。Xが〇ならば、

¬のつかない命題変数で真理値が〇 のもの$\cdots X, \cdots$

となるので、A は〇です。

もし Xが×ならば、

¬のつく命題変数で真理値が× のもの$\cdots X, \cdots$

なので、やはり A は〇です。

排中律 $X \vee \neg X$は、まさにこの形です。

$X \Rightarrow (Y \Rightarrow X)$ の∧∨標準形は$\neg X \vee \neg Y \vee X$で、これは基本和です。ここにも Xと$\neg X$が現れます。

では、こういう命題変数が現れない場合は、どうでしょうか。たとえば $X \vee \neg Y \vee X$では、¬のつかない変数は Xで、¬のつく変数はYです。これらは互いに別な変数ですから、それぞれに好きな〇・×を与えることができます。それで Xに×、Yに〇をあてはめれば、全体は×です。

この例のように、基本和 A に、¬がつく命題変数とつかない変数に共通なものがないときには、

$$\neg のつく命題変数の値 \cdots ◯$$

$$\neg のつかない命題変数の値 \cdots \times$$

とすれば、A は×になります。

整理してまとめると、基本和 A について、

$$\neg のつく命題変数とつかない変数に共通なものがある \cdots A は◯$$

$$\neg のつく命題変数とつかない変数に共通部分がない \cdots A は\times$$

$\neg$のつく命題変数とつかない変数に共通部分がない基本和 A については、上の例のように

$$\neg のつく命題変数の値 \cdots ◯$$

$$\neg のつかない命題変数の値 \cdots \times$$

とすれば、A は×になります。

この方法を使えば、論理式の意味や各変数の真理値を考えなくても、見た目だけで恒真かどうか判定できます。恒真でないときには、基本和を×にするように各命題変数に真理値をあてはめる方法も見つけました。では、少し例題で練習してみましょう。

例 2　$(X \vee Z) \wedge (Y \vee Z)$

$v(X) = T, v(Y) = F, v(Z) = F$の場合を考えます。第一の基本和 $X \vee Z$は、値が◯ であるリテラル Xがあるので、◯ です。しかし

第二の基本和 $Y \vee Z$は、リテラル Yと Zの両方の値が× なので、×です。全体は× です。

例３　$\neg X \vee \neg Y$

$v(X) = T, v(Y) = F$とすると、$v(\neg Y) = T$で、$\neg Y$がリテラルですから、この論理式の値は○ です。

例４　$(\neg X \vee X \vee Z) \wedge (\neg X \vee \neg Z \vee Z)$

第一の基本和は、例１と同じように Xの値がどちらでも○ になります。第二の基本和は、Xの代わりに Zを考えれば、同じように○になることがわかります。

上の例で、例１と例４では、Xと$\neg X$というようにある変数とその否定が一つの基本和にあります。こういうときにはほかのリテラルの真理値には無関係に、基本和の値が○ になることがわかりました。この節の最初に触れた排中律が基本和の中にあるわけです。このことが実は、論理式が恒真かどうかの判定方法を与えるのです。その方法をはっきり書いておきましょう。

恒真性の判定方法

論理式 A の$\wedge\vee$標準形が $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$であるとする。ただし $A_1, A_2, \cdots, A_n$のそれぞれは基本和である。このとき

（*）論理式 A が恒真であることと、基本和 $A_1, A_2, \cdots, A_n$のそれぞれにある変数（たとえば X）とその否定（$\neg X$）が両方とも現れることは同じである。

$\wedge\vee$標準形を使って恒真性の判定をするときには、○とか×とか考えなくても、Xと$\neg X$のような組を探せばいいので、計算もいりません。見た目だけで分かるので便利です。

しかもこの方法を使うと、恒真でないときには、論理式 A の値を

× にするような、変数の真理値の組をかんたんにみつけられます。

たとえば $Z \vee Y \vee \neg Z$には Zと$\neg Z$が現れるので、（*）の条件に合います。だから恒真です。

$X \vee \neg Z$は（*）の条件に合わないので、恒真ではありません。この論理式が×になるのは、Xが×で Zが○のときです。また、$Z \vee \neg Y \neg X$については、Zが×、Yと Zが○のときに、×になります。

$(X \vee \neg Z) \wedge (Y \vee Z)$ については、第一の基本和は上のようにすれば× になるので、全体は× になります。このときYの値は何でもいいので、○ か× のどちらでも好きなほうを選んでください。

やってみよう！

1. $(X \Rightarrow Y) \wedge (Y \vee X)$ の∧∨標準形を作って、恒真かどうか判定してください。

2. 一穂「宇宙人がいないとするでしょ。そしたら、もし宇宙人がいたら私は空を飛べるんだ」

   淳子「うそよ、そんなこと。頭おかしいんじゃない？」

   今日は仲良しの様子が変です。宇宙人に化かされているのかな。一穂が何を言っているのかどうもわかりませんが、淳子の言うようにまちがっているのでしょうか？

答え

1. $X \Rightarrow Y$は$\neg X \vee Y$に変形されるので、$(X \Rightarrow Y) \wedge Y$の標準形は $(\neg X \vee Y) \wedge (Y \vee X)$ である。どちらの基本和も（*）の条

件に合わないので、恒真ではない。Xが〇でYが×のとき、最初の基本和が×になる。XもYも×のとき、後の基本和が×になる。

2. 「宇宙人がいる」を X、「私が空を飛べる」をYとおく。一穂は$\neg X \Rightarrow (X \Rightarrow Y)$と言ったことになる。これは次々$\neg X \Rightarrow (\neg X \vee Y)$、$\neg\neg X \vee (\neg X \vee Y)$、$X \vee \neg X \vee Y$と変形されます。最後は$\wedge\vee$標準形で、$X$と$\neg X$が現れるから（*）の条件に合っている。したがって一穂の言ったことは実は恒真なのである。

Chapter 5

恒真性の判定ゲーム

5.1　○の世界と×の世界-シークエント

４章では∧∨標準形の作り方と、その応用として恒真性の判定方法を学びました。ちょっと見たり聞いたりしただけでは本当かどうか分からない話も、∧∨標準形に直せば、人目で正しいかどうか判定できるんですね。これからその∧∨標準形の、もう一つの作り方を伝授します。最初に考えた人の名前にちなんで、ワンのアルゴリズムと呼ばれています。

そのためにまず論理式の分解、ということをします。論理式をばらばらにする、ということです。もちろんでたらめにばらばらにするのではありません。ある規則にしたがってばらすのです。

たとえば 4.4 節で、∧∨標準形 $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$が○かどうかを調べる

ためには、A_1、 A_2、A_3のそれぞれが◯であるかどうかを調べればいいことがわかりました。つまり $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$を A_1, A_2, A_3のように 3 個の論理式に分解して調べることができます。これは $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$の$\wedge$を除いて、$A_1$から A_3を並べたものです。わかりやすいように

$$A_1 \quad A_2 \quad A_3$$

と書きます。間のスペースは「A_1, A_2, A_3のすべてが◯かどうか調べなさい」ということを表しています。これを $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$の$\wedge$–分解と呼びましょう。

つぎに、基本和 $U_1 \vee U_2 \vee U_3$が◯であるかどうかを知るためには、U_1、U_2、U_3 のどれかが◯かどうか調べればいいのでした。つまり $U_1 \vee U_2 \vee U_3$を 3 個の論理式に分解して調べればいいのです。これは $U_1 \vee U_2 \vee U_3$から$\vee$を除いて U_1, U_2, U_3を並べたものです。今度は

$$U_1, U_2, U_3$$

と書きます。コンマが間に入るときには、「このうちのどれかが◯かどうか調べなさい」ということを表しています。これを $U_1 \vee U_2 \vee U_3$の$\vee$-分解と呼びましょう。

ところで U_1, U_2, U_3のそれぞれは、ある変数 Xであるか、またはその否定$\neg X$の形をしています。この区別をするために$\rightarrow$を使って、変数だけのときには$\rightarrow$の右側に、変数に$\neg$がついているときには、その変数を$\rightarrow$の左側に書くことにします。たとえば $X, \neg Y, Z, \neg W$は

$$Y, W \ \rightarrow \ X, Z$$

となります。逆に$Y, W \to X, Z$を見たら$\neg Y$、$\neg W$、X、Z を$\vee$でつないだもののことだとわかります。このとき順序は気にしなくてかまいません。真理値は$\vee$でつなぐ順序に関係なく決まることを思い出してください。たとえば$A \vee B = B \vee A$でした。だから$Y, W \to X, Z$はたとえば$\neg Y, \neg W, X, Z$ の分解だと考えられます。これと $X, \neg Y, Z, \neg W$ とは真理値が同じです。

この考え方は$\wedge\vee$標準形だけでなく、一般の論理式にもあてはまります。

たとえば論理式$A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$について、$A_1, A_2, A_3 \to B_1, B_2, B_3$は$\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \neg A_3 \vee B_1 \vee B_2 \vee B_3$を表すとしましょう。つまり$\to$の左側に並んでいる式 A_1, A_2, A_3は、その前に否定をつけた$\neg A_1, \neg A_2, \neg A_3$を表すものとします。右側に並んでいる式$B_1, B_2, B_3$は、それ自身を表すものとします。これらを$\vee$でどんな順序でつないでも、真理値は同じになります。

$\to$の左側は、$\neg$のついた世界、あるいは×の世界といえます。右側は、$\neg$のつかない世界、あるいは○の世界といえます。

論理式$A \wedge B$は、$\wedge\vee$-標準形と同じように、A と Bの二つの論理式を並べて分解します。このとき A も Bも$\neg$の中にはありませんから、どちらも$\to$の右に置きます。このとき $\to A$ と $\to B$ の二つを並べて書かなければなりません。

$A \Rightarrow B$は$\to$はどうやってばらしたら良いでしょうか。$A \Rightarrow B$は$\neg A \vee B$と同値であったことを思い出してください。$\neg A \vee B$は$\neg A$ とBを$\vee$でつないだものですから、A は$\to$の左側に、Bはその右側に置かれるはずです。つまり $A \Rightarrow B$は $A \to B$ と分解されます。

$A_1, A_2, \cdots, A_m \to B_1, B_2, \cdots, B_n$ のように$\to$の両側に論理式が並

んだものを、シークエントと呼びます。

「え、それって何語？」なんていう声が聞こえそうです。シークエントは sequent と書いて、一応英語なんですけど。辞書を引くと sequent の訳には

順序として起こること、連続、結果

などと書いてあります。でもこれでは $A_1, A_2, \cdots, A_m \to B_1, B_2, \cdots, B_n$ の意味を表しているとは思えません。こういうものをシークエントと呼ぶのは、とても特殊な論理用語なのです。論理語ですね。良い日本語訳をつけようとしたのですが、これが難しいのです。変な漢字をあてはめるよりも、カタカナでシークエントと丸暗記してしまうほうが、すっきりします。シークエンスが列を表すので、ちょっと特殊な列、という感じでシークエントと覚えてしまってください。

論理記号がなくて命題変数だけが並んでいるシークエントについてもう一度考えましょう。たとえば

$$X, Y \to Y, Z$$

は基本和$\neg X \vee \neg Y \vee Y \vee Z$のことでした。命題変数 Xが$\neg Y$と Yという両方の形で現れますから、この基本和は恒真です。シークエントでは$\neg$を探す代わりに、右のボックスと左のボックスにYが入っていることを確かめればいいわけです。

左右のボックスに同じ文字が入っているかどうか調べることは、論理なんて知らなくてもできることです。子供に頼んでもやってくれるし、コンピュータでも簡単に判定できます。

$$X, Y \to Z, W$$

では、左のボックスには X と Y、右のボックスには Z と W が入っていて、左右に同じ文字がありません。

もう一つ、

$$X, Y \rightarrow Z$$

ではどうでしょう。左のボックスには X と Y、右のボックスには Z が入っていて、左右に共通な文字がありません。だからこのシークエントと同じ意味の基本和 $\neg X \vee \neg Y \vee Z$ は恒真ではありません。左のボックスにある X と Y を○、右のボックスにある Z を×、にすれば、この基本和は×になります。

では、論理式を分解していく様子を、例で見ましょう。

（１）　$X \wedge Y \Rightarrow \neg X \wedge Z$

を、順にばらしていきます。

（２）　$X \wedge Y \rightarrow \neg X \wedge Z$

$\Rightarrow$ をはずして、$X \wedge Y$ を×の世界に、$\neg X \wedge Z$ を○の世界におく。

（３）　$X \wedge Y \rightarrow \neg X \quad X \wedge Y \rightarrow Z$

$\neg X \wedge Z$ の $\wedge$ をはずして、$\neg X$ と Z に分け、二つのシークエントを作る。

（４）　$X, Y \rightarrow \neg X \quad X, Y \rightarrow Z$

$X \wedge Y$ の $\wedge$ をはずして、にコンマをいれる。

（５）　$X, X, Y \rightarrow \quad X, Y \rightarrow Z$

○の世界の $\neg X$ の $\neg$ をはずして、X を×の世界に移す。

$X \wedge Y$ が×の世界で X, Y のように分解されることはまだ説明していません。いまはこういう規則だと思ってください。（５）は命題変

数 X, Y, Zがばらばらに×の世界と〇の世界におかれています。論理記号がないので、もうこれ以上分解できません。ここまで来たら、分解は自動的にストップします。

次々分解していったシークエントと最初の論理式との間には、どんな関係があるのでしょうか。

最初の論理式 $X \wedge Y \Rightarrow \neg X \wedge Z$は

$$\neg(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge Z)$$

と同値ですから、$X \wedge Y$は×の世界のもの、$\neg X \wedge Z$ は〇の世界のもの、ということになります。（２）の $X \wedge Y \to \neg X \wedge Z$は、ちょうどそれを表しています。

$\neg X \wedge Z$は$\neg X$と Zの両方ともなり立つということを表しているので、次の

（３） $X \wedge Y \to \neg X \quad X \wedge Y \to Z$

のように、〇の世界が二つに分かれます。

（３）の中で $X \wedge Y$が×の世界にあるということは、$\neg(X \wedge Y)$ がなりたつ、ということを表し、これは$\neg X \vee \neg Y$と同値ですから、Xと Yのそれぞれが×の世界のものです。そのことが

（４） $X, Y \to \neg X \quad X, Y \to Z$

で表されます。

（４）の最初のシークエントにある$\neg X$は、Xが×の世界のものである、ということですから、Xを×の世界に移して、

（５） $X, X, Y \to \quad X, Y \to Z$

を得ることになります。

このようにして、論理式を同値なものに次々分解していったのでした。

最後の（５）では $X, X, Y \to$ と $X, Y \to Z$ という二つのシークエントが並んでいます。これらはそれぞれ基本和

$$\neg X \vee \neg X \vee \neg Y$$

と

$$\neg X \vee \neg Y \vee Z$$

を表しています。（５）は、この二つが両方ともなりたつ、と言っているのですから、∧∨標準形

$$(\neg X \vee \neg X \vee \neg Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee Z)$$

と同じことです。

（５）の第一ののシークエントでは、左のボックスに X と Y が入っていますが、右のボックスは空です。左右のボックスに共通の変数がありませんから、基本和 $(\neg X \vee \neg X \vee \neg Y)$ は恒真ではありません。したがって∧∨標準形

$$(\neg X \vee \neg X \vee \neg Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee Z)$$

は恒真ではありません。第二のシークエントは調べなくても、このことは決まります。

念のために第２のシークエントについても確かめると、左のボックスには X と Y が入っていて、右のボックスには Z が入っています。共通の変数はないので、この場合も恒真ではありません。

第一のシークエントで X と Y に○をあてはめれば、全体は×になります。第二のシークエントでは、X と Y に○をあてはめ、Z に×をあてはめれば、全体が×になります。

5.2 論理式の分解

これから、シークエントを使って論理式を分解し、∧∨標準形にあたるものを求める手続きを説明していきます。

そのためにまず、シークエントとは何か、をきちんと述べておきます。

シークエント

$A_1, A_2, \cdots, A_m, B_1, B_2, \cdots, B_n$ がそれぞれ論理式であるとき

（１）$A_1, A_2, \cdots, A_m \to B_1, B_2, \cdots, B_n$

をシークエントと呼ぶ。ただし m と n は $0, 1, 2, \cdots$ の任意の数である。

$m = 0$ のときは、左のボックスが空、$n = 0$ のときは、右のボックスが空、ということです。

シークエントはさらに $A_1, A_2, \cdots, A_m, B_1, B_2, \cdots, B_n$ のそれぞれから論理記号を除いて、ばらしていくことができます。これから**シークエントの分解**を定義します。前の節で $X \wedge Y \Rightarrow \neg X \wedge Z$ を（１）から（５）の手続きにしたがって分解したのと同じことです。

シークエントの分解

シークエントの分解には、分解される論理記号の名前がつけられる。また、分解される論理式が左のボックスにあるか右のボックスにあるかによって、それぞれ左、右と名前をつける。それぞれの場

合に、あるシークエントを $Downarrow$ の下のシークエントに変形する。見やすいように、左右のボックスにそれぞれ3個の論理式が入っていて、その真ん中の論理式を分解する場合を説明する。もちろん実際には個数は何個でも良い。ボックスが空でもよい。

****

1 ¬左

$$A, \neg B, C \rightarrow D, E, F$$

$$\Downarrow$$

$$A, C \rightarrow D, E, F, B$$

左のボックスにある $\neg C$ という形の論理式の $\neg$ をはずして、C を右のボックスに入れる。

2 ¬右

$$A, B, C \rightarrow D, \neg E, F$$

$$\Downarrow$$

$$E, A, B, C \rightarrow E, F$$

右のボックスにある $\neg E$ という形の論理式の $\neg$ をはずして、E を左のボックスに入れる。

3 ∧左

$$A, B_1 \wedge B_2, C \rightarrow D, E, F$$

$$\Downarrow$$

$$A, B_1, B_2, C \to D, E, F$$

左のボックスにある $B_1 \wedge B_2$ という形の論理式の $\wedge$ をはずして、$B_1 \wedge B_2$ の代わりに B_1, B_2 を左のボックスに入れる。

4 $\wedge$右

$$A, B, C \to D, E_1 \wedge E_2, F$$

$$\Downarrow$$

$$A, B, C \to D, E_1, F \quad A, B, C \to D, E_2, F$$

右のボックスにある $E_1 \wedge E_2$ という形の論理式の $\wedge$ をはずして、E_1 で置き換えたシークエントと E_2 で置き換えたシークエントを並べる。

5 $\vee$左

$$A, B_1 \vee B_2, C \to D, E, F$$

$$\Downarrow$$

$$A, B_1, C \to D, E, F \quad A, B_2, C \to D, E, F$$

左のボックスにある $B_1 \vee B_2$ という形の論理式の vee をはずして、B_1 で置き換えたシークエントと B_2 で置き換えたシークエントを並べる。

6 $\vee$右

$$A, B, C \to D, E_1 \vee E_2, F$$

$$\Downarrow$$

$$A, B, C \to D, E_1, E_2, F$$

右のボックスにある $E_1 \vee E_2$ という形の論理式の $\vee$ をはずして、E_1, E_2 で置きかえる。

7 $\Rightarrow$ 左

$$A, B_1 \Rightarrow B_2, C \to D, E, F$$

$$\Downarrow$$

$$A, B_2, C \to D, E, F \quad A, C \to D, E, F, B_1$$

左のボックスにある $B_1 \Rightarrow B_2$ という形の論理式の Ra をはずして、B_2 で置き換えたシークエントと、右のボックスに B_1 を加えたシークエントを並べる。

8 $\Rightarrow$ 右

$$A, B, C \to D, E_1 \Rightarrow E_2, F$$

$$\Downarrow$$

$$E_1, A, B, C \to D, E_2, F$$

右のボックスにある $E_1 \Rightarrow E_2$ という形の論理式の $\Rightarrow$ をはずして、E_2 で置きかえ、右のボックスに E_1 を加える。

****

分解をする前とした後で真理値が変わらないことを、３の $\wedge$ 左と４の $\wedge$ 右を例にとって、説明します。読みやすいように、論理式を少なくしておきます。

３ $\wedge$ 左

分解する前は

$$A, B_1 \wedge B_2 \to D$$

です。×の世界に $A, B_1 \wedge B_2$、◯の世界に Dがあるので、このシークエントは$\neg A \vee \neg(B_1 \wedge B_2) \vee D$を表します。これが◯であるのは、$A$ か $B_1 \wedge B_2$が×であるか、Dが◯のときです。$B_1 \wedge B_2$が×であるのは、B_1か B_2が×のときです。整理すると、上のシークエントが◯であるのは、
(*) A, B_1, B_2のうち少なくとも一つが×であるか、または Dが◯のときです。

分解した後は

$$A, B_1, B_2 \to D$$

となります。これは

$$\neg A \vee \neg B_1 \vee \neg B_2 \vee D$$

を表します。ここでは×の世界に A, B_1, B_2があり、◯の世界に Dがあるので、全体が◯になる条件がは上の (*) と同じになります。

４　$\wedge$右分解する前は

$$A \to D, E_1 \wedge E_2$$

です。×の世界にあるのは A、◯の世界にあるのは $D, E_1 \wedge E_2$ですから、このシークエントが◯になるのは、A が×であるか、Dか $E_1 \wedge E_2$が◯のときです。$E_1 \wedge E_2$◯になるのは、E_1も E_2も◯のときです。これらをあわせると、分解前のシークエントが◯になるのは、
(**) A が×であるか、Dが◯であるか、E_1と E_2の両方が◯である

ときです。

分解後は

$$A \to D, E_1 \quad A \to D, E_2$$

のように、二つのシークエントに分かれます。この両方がなりたつ、ということです。左のシークエントでは、×の世界に A、◯の世界に D, E_1があるので、全体が◯になる条件は

(***) A が×であるか、Dが◯であるか、E_1が◯である

ときです。

同じようにして、右のシークエントが◯であるのは、

(****) A が×であるか、Dが◯であるか、E_2が◯である

ときです。A と Dについての条件は (***) と (****) で同じです。A が×であるか Dが◯である、というのは、(**) の条件と同じです。もし A が×でなくて Dが◯でないならば、(***) より E_1が◯であり、また (****) より E_2が◯のはずです。つまり E_1と E_2の両方が◯です。これは (**) の条件と同じです。

ほかの論理記号についての分解についても、も同じようにして、分解前と分解後では真理値が同じになることを示すことができます。このように、分解前と分解後のシークエントは同じことを表します。

また、分解後の各シークエントに現れる論理記号の数が、分解前のシークエントに現れる論理記号よりも少なくなっていることに注意してください。

5.3 分解の木

さて、シークエントの分解を続けると、シークエントが下にのびていきます。一回に一つか二つ伸びます。中身を忘れてその伸び具合だけを描いてみると

$$\dfrac{\dfrac{\uparrow}{\nwarrow} \qquad \dfrac{\nwarrow \quad \nearrow}{\nearrow}}{\heartsuit}$$

のような形になります。♡に最初の論理式が置かれ、横線−−のそれぞれには次々分解されたシークエントが置かれます。なんだか♡が根っこで、↑, ↖, ↗が枝みたいでしょう？横線が枝の節という感じです。上下が逆さですけど、この図をひっくり返すと、ちょうど木の形になります。それで、分解を続けてできた図形を「分解の木」と呼びます。

実際の分解をしてみましょう。

$$\dfrac{\dfrac{X \to X \quad X \to Y}{X \to X \land Y}\,\land\text{右}}{X \Rightarrow X \land Y}\,\Rightarrow\text{右}$$

最後のシークエントを調べます。第一のシークエントでは、左右のボックスに同じ変数 Xが現れます。第二のシークエントでは、左のボックスには Xが入っていて、右のボックスには Yが入っています。その結果最初の論理式 $X \Rightarrow X \land Y$ は恒真でないことが分かります。

5.4 判定ゲーム

論理式の分解なんて、意味のないゲームみたいなものですね。でももう少しがまんしてください。これからが本番です。後でパズルを解く楽しい時間になります。

ある論理式 A の分解の木を作って、その最後のシークエントの様子をみて、A の恒真性を判定することを、判定ゲームと呼びましょう。判定ゲームの規則を使えば真理値を考えなくても、ボックスの中の命題変数のマッチングだけで、論理式の恒真性を判定できるのです。

かんたんな例で、判定ゲームをしてみましょう。４章の問題を判定ゲームで解いてみましょう。もう一度問題をだします。

宇宙人

一穂「宇宙人がいないとするでしょ。そしたら、もし宇宙人がいたら私は空を飛べるんだ」
淳子「うそよ、そんなこと。頭おかしいんじゃない？」
彩希「一穂の言ってること変だけど、でもうそじゃないわね」
さあ、淳子と彩希のどっちが合っているでしょうか。

「宇宙人がいる」を X、「私が空を飛べる」を Y とおく。一穂は $\neg X \Rightarrow (X \Rightarrow Y)$ と言ったことになる。この論理式を次々分解する。

$$\neg X \Rightarrow (X \Rightarrow Y)$$

$$\Downarrow$$

$$\neg X \rightarrow X \Rightarrow Y$$

$$\Downarrow$$

$$X, \neg X \to Y$$

$$\Downarrow$$

$$X \to Y, X$$

シークエントの分解は、上から順に⇒ 右、⇒ 右、¬左、のゲーム規則を使っています。最後のシークエントでは、左右のボックスに変数Xが共通に入っていますから、論理式$\neg X \Rightarrow (X \Rightarrow Y)$ は恒真です。F 宙人なんているかどうかわからないし、一穂が空を飛べるなんてうそに決まっているのに、一穂の言ったことはともかく正しいのです。だから彩希の勝ちです。

ケーキ　淳子と一穂が彩希の家に遊びに行くことになりました。
一穂「私ケーキを焼いてもってこうかな。でもうまく焼けるかな」
淳子「一穂がうまくケーキ焼いたら、ばらの花のデコレーションしてあげるし、ハーブティーも持ってっていれるわ。」

彩希の家で、淳子はハーブティーをいれました。一穂はうまくケーキを焼いた、といえるでしょうか？

「淳子がハーブティーをいれる」を X、「淳子がデコレーションする」を Y、「一穂がうまくケーキを焼く」を Zとおく。淳子が言ったのは

$$Z \Rightarrow Y \wedge X$$

淳子が実際にしたのは X。これらから「一穂がうまくケーキを焼いた」が導かれるとすれば

$$(Z \Rightarrow Y \wedge X) \wedge X \Rightarrow Z$$

と表される。この分解をしてみよう。

$$(Z \Rightarrow Y \wedge X) \wedge X \Rightarrow Z$$

$$\Downarrow$$

$$(Z \Rightarrow Y \wedge X) \wedge X \rightarrow Z$$

$$\Downarrow$$

$$(Z \Rightarrow Y \wedge X), X \rightarrow Z$$

$$\Downarrow$$

$$Y \wedge X, X \rightarrow Z \quad X, X \rightarrow Z, Z$$

$$\Downarrow$$

$$Y, X, X \rightarrow Z \quad X \rightarrow Z, Z$$

分解は上から順に$\Rightarrow$ 右、$\wedge$左、$\Rightarrow$ 左、$\wedge$左である。最後のシークエントはどちらも左右のボックスに共通な変数がない。したがって$(Z \Rightarrow Y \wedge X) \wedge X \Rightarrow Z$は恒真でない。つまり淳子の約束と淳子がハーブティーをいれたことから、一穂がケーキをうまく焼いた、とはいえない。

まあ、でも仲良し三人が楽しくハーブティーを飲んでいるのだから、きっと一穂はおいしいケーキを焼いたのでしょうね。「うまく焼いたとはいえない」というのは、論理的に判断しようとすれば、ということです。

Chapter 6

論理パズルの解き方

さあ、これからパズルを解いてみましょう。いままで論理式とか真理値とかシークエントとか、難しいことばっかりで、パズルまで嫌いになりそうだったかな？やっと楽しいパズル解きです。

6.1 論理パズルの解き方–∧∨-標準形の応用–

ソックス：問題　「これがソックスならば、これはソックスじゃないの」が本当ならば、これはソックスでしょうか？

「これがソックスです」を X とおく。問題は

$$(X \Rightarrow \neg X) \Rightarrow X$$

と表される。これを 4.3 節の標準化手続きにしたがって変形する。変形内容の説明をつける。

$$\neg(X \Rightarrow \neg X) \vee X$$

外側の$\Rightarrow$ を除き、$\neg$と$\vee$で表す。

$$\neg(\neg X \vee \neg X) \vee X$$

中の$\Rightarrow$ を除き、$\neg$と$\vee$で表す。

$$(\neg\neg X \wedge \neg\neg X) \vee X$$

$\neg$を中に入れ、$\vee$を$\wedge$で置きかえる。

$$(X \wedge X) \vee X$$

２重否定$\neg\neg$を除く。

$$(X \vee X) \wedge (X \vee X)$$

$\vee$を分配する。

最後の式が標準形で、実際にはXと同じことが分かるので、この論理式の真理値はXの真理値と同じである。Xが×であれば、$\neg(X \Rightarrow \neg X) \vee X$も×なので、**ソックス**の問題は必ず正しいとはいえない。

花と星：問題　「花が露でできているならば、星が降る」とします。このとき、星が降らないならば花は露でできている、といえるでしょうか？

「花が露でできている」をX、「星が降る」をYとおくとこれは

$$(X \Rightarrow Y) \Rightarrow (\neg Y \Rightarrow X)$$

が正しいか？ということです。この∧∨標準形は次のように求められます。

$$\neg(\neg X \vee Y) \vee (\neg\neg Y \vee X)$$

$$(\neg\neg X \wedge \neg Y) \vee (Y \vee X)$$

$$(X \wedge \neg Y) \vee (Y \vee X)$$

$$(X \vee Y \vee X) \wedge (\neg Y \vee Y \vee X)$$

標準化手続きは、Ra をすべて¬と∨で書きかえる、¬を中に入れて∨を∧で置きかえる、２重否定¬¬を除く、∨を分配して∧を外に出す、の順に行う。最後の式が標準形で、最初の基本和には X と Y しか現れないので、$(X \Rightarrow Y) \Rightarrow (\neg Y \Rightarrow X)$ は恒真ではない。

グリーン家盗難事件：問題　これは [?] の中の問題 Q72 です。まず問題を書きます。

エメラルドの宝石が盗まれた知らせをうけて、グリーン家に急行した名探偵のファニーは、そこで執事の証言を得ました。

執事:「私が目撃者なら、メイドのミミが犯人」であるなら、メイドのミミは犯人ではありません。

窓べで腕ぐみをしてしばらく外をながめたあと、ファニーはこう結論をくだしました。

「執事は ”メイドのミミは犯人ではない ”といってるんだわ！」

ファニーの論理は正しい？

「執事が目撃者である」を P、「ミミが犯人である」を Q とおく。問題は $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow \neg Q$ である。∧∨標準形を求める。

$$\neg(\neg(\neg P \vee Q) \vee \neg Q) \vee \neg Q$$

$$(\neg(\neg\neg P \wedge \neg Q) \vee \neg Q) \vee \neg Q$$

$$(\neg(P \wedge \neg Q) \wedge Q) \vee negQ$$

$$((\neg P \vee \neg Q) \wedge Q) \vee \neg Q$$

$$(\neg P \vee Q \vee \neg Q) \wedge (Q \vee \neg Q)$$

次々$\Rightarrow$ を除く、$\neg$を中に入れて$\vee$を$\wedge$でおきかえる、2重否定$\neg\neg$を除く、$\neg$を中に入れる、$\vee$を分配する、という変形を行った。

二つの基本和はそれぞれ Q と$\neg Q$ をもっているので、恒真であることが分かる。したがってこの問題の答えは、イエス。つまりファニーの論理は正しい。

というわけで、ファニーはやっぱり名探偵？でも、∧∨-標準形を使えば、あなたも私もばっちり名探偵！

次の節では、同じパズルを判定ゲームを使って解いてみます。そして最後にパズルをたくさん出します。

6.2 論理パズルの解き方–判定ゲームの応用

前の節と同じ問題を、判定ゲームで解いてみましょう。

ソックス 問題は前と同じです。論理式は

$$(X \Rightarrow \neg X) \Rightarrow X$$

でした。

分解規則にしたがってこの式の分解の木を作る。

$$\to (X \Rightarrow \neg X) \Rightarrow X$$

$$\Downarrow$$

$$X \Rightarrow \neg X \to X$$

$$\Downarrow$$

$$\neg X \to X \quad \to X, X$$

$$\Downarrow$$

$$\to X, X \quad \to X, X$$

分解規則は、順に$\Rightarrow$右、$\Rightarrow$左、第一のシークエントの$\neg$左、である。最後はどのシークエントも同じ$\to X, X$である。変数Xが右のボックスにあるだけなので、論理式$(X \Rightarrow \neg X) \Rightarrow X$は恒真ではない。

ソックスの謎は、正しいとはいえないことがわかりました。

花と星 論理式は

$$(X \Rightarrow Y) \Rightarrow (\neg Y \Rightarrow X)$$

です。

$$(X \Rightarrow Y) \Rightarrow (\neg Y \Rightarrow X)$$

$$\Downarrow$$

$$X \Rightarrow Y \rightarrow \neg Y \Rightarrow X$$

$$\Downarrow$$

$$\neg Y, X \Rightarrow Y \rightarrow X$$

$$\Downarrow$$

$$X \Rightarrow Y \rightarrow X, Y$$

$$\Downarrow$$

$$Y \rightarrow X, Y \quad \rightarrow X, Y, X$$

分解規則は次々$\Rightarrow$ 右、$\Rightarrow$ 右、$\neg$左、$\Rightarrow$ 左、である。第一のシークエントでは両辺に同じ Yがあるが、第二のシークエントでは左のボックスが空である。したがって論理式 $(X \Rightarrow Y) \Rightarrow (\neg Y \Rightarrow X)$ は恒真ではない。

花と星の謎は、正しいとはいえません。

グリーン家盗難事件

$$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow \neg Q$$

の分解の木を作ります。

$$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow \neg Q$$

$$\Downarrow$$

$$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q \to \neg Q$$

$$\Downarrow$$

$$Q, (P \Rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q \to$$

$$\Downarrow$$

$$Q, \neg Q \to \quad Q \to P \Rightarrow Q$$

$$\Downarrow$$

$$Q \to Q \quad P, Q \to Q$$

分解規則は次々⇒ 右、¬右、⇒ 左、第一のシークエントの¬左、第二のシークエントの⇒ 右、である。最後のシークエントは両方とも左右のボックスに Q をもっているので、最初の論理式は恒真である。

判定ゲームを使っても、ファニーは、そしてあなたも私も名探偵!

やってみよう！

次のパズルを、好きな方法で解いてください。

1. **猫の健康**

   「賢い猫は健康だ」と信じている人がいます。つまり、猫について

   （∗）賢ければ、健康である

   ということです。さて、下記の（１)、(２)、(３）のうち、(∗）から導かれるのはどれでしょうか？(これらはすべて猫についての命題です。)

   （１） 健康でないか、または賢い。

   （２） 健康であるか、または賢くない。

   （３） 賢いか、または健康である。

2. **メルヘンの謎**

   彩希「もし私が人魚なら一穂は雪の女王じゃない、っていうのはうそ」

   淳子「それじゃあ、本当は彩希が人魚で一穂が雪の女王ってわけね」

   彩希の言ったことから、淳子の結論はでるでしょうか？

3. **魔女の謎**

   淳子「私が人魚なら彩希は魔女よ」

   一穂「それじゃあ、淳子が人魚で彩希が魔女でない、っていうことはないわけね」

   淳子の言ったことから、彩希の結論はでるでしょうか？

4. **競歩と旅行** [?] $Q20$ 51 ページ

   「女の子は、競歩が好きでないのなら、旅行が好きである」

   これが真実なら、旅行も競歩も好きでない者のなかに、女の子は、

   I いる。

   II いない。

   III いるかもしれないし、いないかもしれない。

5. **スフィンクスの謎** [?] $Q63$ 165 ページ

   ギリシャ神話のスフィンクスは女性の頭と胸をもつ怪物で、彼女は道行く人に謎をかけ、解けなかった者を食い殺しました。その恐ろしいスフィンクスの謎とは次のようなものです。

   「これがマーメイドであるなら、これはスフィンクスである」が偽であるとすると、

   A:「これがスフィンクスなら、これは女性である」

   B:「これがスフィンクスなら、これは女性ではない」

   この二つの文の真偽は？

   1.A は真で、B は偽。

   2.A は偽で、B は真。

   3.A、B どちらも真。

4.A、B どちらも偽。

6. **私は不死身** [?] $Q71$ 209 ページ

   「私が危険を冒すなら、私はケガをする」であるならば、私は危険を冒さない。そして、私は危険を冒す。ゆえに私はケガをしない。この論理はただしい？

7. **理性的？** [?] 7 – 3 171 ページ

   「慎み深い、かつ、快楽主義」ならば懐疑的である。

   慎み深いならば「懐疑的か理性的」である。

   快楽主義であれば理性的である。このとき、次のどれは結論で

   きて、どれは結論できないか？

   - 1 「慎み深い、かつ、快楽主義」であれば理性的である
   - 2 「懐疑的、かつ、快楽主義」であれば理性的である
   - 3 「慎み深い、かつ、懐疑的} であれば理性的である

答え

それぞれ解き方はいろいろある。各問いについて、一通りまたはいくつかの解法を与えておく。

1. **猫の健康**　猫について「賢い」を P、「健康である」を Q とおく。条件（∗）は $P \Rightarrow Q$ と表される。また、（１）、（２）、（３）はそれぞれ$\neg Q \vee P$、$Q \vee \neg P$、$P \vee Q$ と表される。ところで 4.3 節の標準化の手続き 3 により$\neg P \vee Q$ と同じ意味である。これはまた 4.1 節の交換律により $Q \vee \neg P$、すなわち（２）と同値である。したがって（２）は（∗）から導かれる。

   （１）が（∗）から導かれないことは、$v(P) = 1, v(Q) = 0$ としてみれば、（∗）は真なのに（１）は偽になるから分かる。（３）についても同様にチェックできる。もちろん「（∗）⇒（１）」の∧∨標準形を作るか、ワンのアルゴリズムを使っても、結論を得られる。

2. **メルヘンの謎**　「彩希が人魚である」を X、「一穂が雪の女王である」を Y とする。彩希の言ったことは$\neg(X \Rightarrow \neg Y)$、淳子の言ったことは $X \wedge Y$ と表せる。$\neg(X \Rightarrow \neg Y)$ に標準化の手続きとド・モルガンの法則を適用すれば、順次$\neg(\neg X \vee negY)$、$\neg\neg X \wedge \neg\neg Y$、$X \wedge Y$ となって、淳子の結論になる。答えはイエス。

   算術計算でも簡単に答えが出る。

   $$v(\neg(X \Rightarrow \neg Y)) = 1 - max(1 - v(X), 1 - v(Y)) = 1 - (1 - min(v(X), v(Y))) = min(v(X), v(Y)) =$$

   ワンのアルゴリズムを使ってみよう。「彩希の言ったことから淳子の結論が出る」は

   $$\neg(X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow X \wedge Y$$

となる。分解の木は次のようになる。

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{Y, X \to X \quad Y, X \to Y}{Y, X \to X \wedge Y}\wedge\text{右}}{X \to X \wedge Y, \neg Y}\neg\text{左}}{\to X \wedge Y, X \Rightarrow \neg Y}\Rightarrow\text{右}}{\neg(X \Rightarrow \neg Y) \to X \wedge Y}\neg\text{左}}{\neg(X \Rightarrow \neg Y) \Rightarrow X \wedge Y}\Rightarrow\text{右}$$

左のトップ・シークエントは X、右のトップ・シークエントは Yを両辺にもつから、最初の式は恒真である。したがって彩希の言ったことから淳子の結論が出る、ということは正しい。

3. **魔女の謎**　「淳子が人魚」を X、彩希が魔女」を Yとおく。淳子の言ったことは $X \Rightarrow Y$、一穂の言ったことは$\neg(X \wedge \neg Y)$ と表される。「淳子が言ったことが正しければ、一穂の結論が出る」は

$(X \Rightarrow Y) \Rightarrow \neg(X \wedge \neg Y)$

となる。

$\wedge\vee$標準形を使ってみよう。標準化手続きを次々適用して、下記の式を得る。多少途中を省略する。

$\neg(\neg X \vee Y) \vee \neg(X \wedge \neg Y)$

$(X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y)$

$((X \wedge \neg Y) \vee \neg X) \wedge ((X \wedge \neg Y) \vee Y)$

$(X \vee \neg X) \wedge (\neg Y \vee \neg X) \wedge (X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee Y)$

$\neg Y \vee \neg X) \wedge (X \vee Y)$

最後は $X \vee \neg X$という形の基本和は除いてよいことを使った。残った基本和のリテラルは、異なる文字だけで作られているので、恒真ではない。たとえば $v(X) = v(Y) = T$とすれば $v(\neg Y \vee \neg X) = F$ となる。したがって、淳子の言ったことから一穂の結論は出ない。

6.3 論理パズルの作り方

aaaaaaaaaaaaaa

Bibliography

[1] 小野田博一、新作・論理パズル 77(1995), ブルーバックス、講談社

[2] 小野田博一、面白くてやめられない論理パズル (1997)、中経出版

[3] 林晋・八杉満利子, 情報系の数学入門、オーム社、１９９３

[4] ...、トッパン