NDK における自然な証明についての考察

京産大理学部　　八杉 満利子 (Mariko Yasugi)
京産大理学研究科　中田 昌宏 (Masahiro Nakata)

本稿は、[1] および [3] で提案された一階の古典論理の体系 NDK における自然な証明についての報告である。その状況は [3] で述べている。

大芝は、[2] において自動証明により得られた証明から、人にとって自然な証明への変換を与えたこれは、cut-free proof から、自然な場合分けによる証明を (元の証明の構造を保存するように) 生成するものである。

また NDK においては、critical な推論と呼ばれる不自然な推論が行なわれることがある。そこで、大芝の着想にもとずく変換により、この様な推論を持つ deduction を自然な deduction へ変換することを目的とする。

1 The system of NDK

構成的論理 NJ の古典論理への 1 つの拡張として NDK を定義する。$A, B, \cdots$で formula を、$\Gamma, \Delta, \cdots$で formula 又は空なものを表す。また、deduction を表す記号として、$P_1, P_2, \cdots$を用いる。

1.1 Disjunctive component

formula A の disjunctive component(d.c.) を次で定義する。

1. A が atomic のとき、A の d.c. は A 自身
2. A が $B \wedge C, B \supset C, \neg B, \forall x B, \exists x B$のとき、$A$ の d.c. は A 自身
3. A が $B \vee C$のとき、A の d.c. は Bの d.c. 及び Cの d.c. 及び A 自身

1.2 Inference rule

NDK の推論規則を、次で与える。(Iは introduction を、Eは elimination を表す。) NDK では前提となる formula の d.c. の 1 つに推論規則を適用することができる。

$$\frac{\begin{array}{cc}\vdots & \vdots\\ \Gamma \vee A \vee \Delta & \Gamma \vee B \vee \Delta\end{array}}{\Gamma \vee (A \wedge B) \vee \Delta}\ \wedge I \qquad \frac{\vdots}{\Gamma \vee (A_1 \wedge A_2) \vee \Delta}\ \wedge E \quad (i = 1, 2)$$

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vee A_i \vee \Delta\end{array}}{\Gamma \vee (A_1 \vee A_2) \vee \Delta}\ \vee I \quad (i = 1, 2)$$

$$\frac{\begin{array}{ccc}\vdots & [A:a] & [B:b]\\ \Gamma \vee (A \vee B) \vee \Delta & \vdots & \vdots\\ & C & C\end{array}}{\Gamma \vee C \vee \Delta}\ (a, b) - \vee E$$

$$\frac{\begin{array}{c}[A:a]\\ \vdots\\ \Gamma \vee B \vee \Delta\end{array}}{\Gamma \vee (A \supset B) \vee \Delta}\ (a) - \supset I \qquad \frac{\begin{array}{cc}\vdots & \vdots\\ \Gamma \vee A \vee \Delta & \Pi \vee (A \supset B) \vee \Lambda\end{array}}{\Gamma \vee \Pi \vee B \vee \Delta \vee \Lambda}\ \supset E$$

$$\frac{\begin{array}{c}[A:a]\\ \vdots\\ \Gamma \vee \Delta\end{array}}{\Gamma \vee \neg A \vee \Delta}\ (a) - \neg I \qquad \frac{\begin{array}{cc}\vdots & \vdots\\ \Gamma \vee A \vee \Delta & \Pi \vee \neg A \vee \Lambda\end{array}}{\Gamma \vee \Pi \vee \Delta \vee \Lambda}\ \neg E$$

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vee A \vee \Delta\end{array}}{\Gamma \vee \forall x A \vee \Delta}\ \forall I \qquad \frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vee \forall x A \vee \Delta\end{array}}{\Gamma \vee A[t/x] \vee \Delta}\ \forall E$$

$(eigenvariable\ condition)$

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vee A[t] \vee \Delta\end{array}}{\Gamma \vee \exists x A \vee \Delta}\ \exists I \qquad \frac{\begin{array}{ccc} & [A:a]\\ \vdots & \vdots\\ \Gamma \vee \exists x A \vee \Delta & B\end{array}}{\Gamma \vee B \vee \Delta}\ (a) - \exists E$$

$(eigenvariable\ condition)$

特に$\Gamma, \Delta, \Pi, \Lambda$の全てが空でない推論を classical な推論と呼ぶ。更に空な前提から任意の formula を導く contradiction rule を加える。

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \hline\end{array}}{A}\ Con$$

この空な前提は classical でない推論$\neg E$によってのみ得られる。

1.3 Eigenvariable

NJ, NK と同様に、推論 $\forall I, \exists E$は次の eigenvariable condition を満たす。$\forall I$において、x は assumption 及びΓ, Δに自由に現れない。$\exists E$において、x は $[A : a]$ 以外 Bへの deduction の assumption 及び Bに自由に現れない。

2 Comparing NDK with NK

本節では、NDK と NK が論理的に同等となることを見る。NK は NDK の部分体系であることは明らかである。 (排中律は$\neg I$を用いて演繹できる。) 以下で、NDK が NK の部分体系となることを見る。

2.1 Lemma

NK において $A \vee B$及び$\neg A$ がそれぞれ assumption の有限集合 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ から演繹されるとき、Bを $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$より排中律を用いずに演繹することができる。

[証明]

$$\dfrac{\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_1 & \dfrac{[A:1] \quad \begin{array}{c}\mathcal{A}_2\\ \vdots\\ \neg A\end{array}}{B} & \\ \vdots & & [B:2] \\ A \vee B & & \end{array}}{B}\ (1,2)$$

2.2 Theorem

NDK は NK の部分体系である。

[証明] NDK-deduction Pの最後の推論 $\mathcal{I}$に関する帰納法で示す。

$\mathcal{I}$が$\wedge I$のとき、Pは

$$\dfrac{\begin{array}{cc} \vdots & \vdots \\ \Gamma \vee A \vee \Delta & \Gamma \vee B \vee \Delta \end{array}}{\Gamma \vee (A \wedge B) \vee \Delta}$$

と表すことができ、これは NK において次のようにできる。

$$\dfrac{\begin{array}{ccc} \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vee A \vee \Delta\end{array} & [\Gamma \vee \Delta : 1] & \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vee B \vee \Delta\end{array} \quad [\Gamma \vee \Delta : 2] \quad \dfrac{[A:3] \quad [B:4]}{A \wedge B} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \Gamma \vee \Delta \vee A & \Gamma \vee (A \wedge B) \vee \Delta & \Gamma \vee \Delta \vee B \quad \Gamma \vee (A \wedge B) \vee \Delta \quad \Gamma \vee (A \wedge B) \vee \Delta \end{array}}{\Gamma \vee (A \wedge B) \vee \Delta}\ (1,3)\ (2,4)$$

$\mathcal{I}$が$\wedge E$のとき、Pは

$$\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vee (A_1 \wedge A_2) \vee \Delta\end{array}}{\Gamma \vee A_i \vee \Delta} \quad (i = 1, 2)$$

と表すことができ、これはNKにおいて次のようにできる。

$$\dfrac{\begin{array}{ccc}\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vee (A_1 \wedge A_2) \vee \Delta\end{array} & [\Gamma \vee \Delta : 1] & \dfrac{[A_1 \wedge A_2 : 2]}{A_i}\\ \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vee \Delta \vee (A_1 \wedge A_2)\end{array} & \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vee A_i \vee \Delta\end{array} & \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vee A_i \vee \Delta\end{array}\end{array}}{\Gamma \vee A_i \vee \Delta}\ (1, 2)$$

$\mathcal{I}$が$\vee E$のとき、Pは

$$\dfrac{\begin{array}{ccc}\Gamma \vee (A \vee B) \vee \Delta & \begin{array}{c}[A : 1]\\ \vdots\\ C\end{array} & \begin{array}{c}[B : 2]\\ \vdots\\ C\end{array}\end{array}}{\Gamma \vee C \vee \Delta}\ (1, 2)$$

と表すことができ、これはNKにおいて次のようにできる。

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vee (A_1 \vee A_2) \vee \Delta\end{array} & [\Gamma \vee \Delta : 3]\\ \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vee \Delta \vee (A_1 \vee A_2)\end{array} & \begin{array}{c}\vdots\\ \Gamma \vee C \vee \Delta\end{array}\end{array} \quad \dfrac{\begin{array}{ccc}[A \vee B : 4] & \begin{array}{c}[A : 1]\\ \vdots\\ \Gamma \vee C \vee \Delta\end{array} & \begin{array}{c}[B : 2]\\ \vdots\\ \Gamma \vee C \vee \Delta\end{array}\end{array}}{\Gamma \vee C \vee \Delta}\ (1, 2)}{\Gamma \vee C \vee \Delta}\ (3, 4)$$

$\mathcal{I}$が$\supset I, \neg I, \forall I$以外のときも同様に行なう。

$\mathcal{I}$が$\neg I$のとき、Pは

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A : 1]\\ \vdots\\ \Gamma \vee \Delta\end{array}}{\Gamma \vee \neg A \vee \Delta}\ (1)$$

と表すことができ、これはNKにおいて排中律を用いることにより次のようにできる。

$$\dfrac{\begin{array}{ccc}A \vee \neg A & \begin{array}{c}[A : 1]\\ \vdots\\ \Gamma \vee \Delta\end{array} & \begin{array}{c}[\neg A : 2]\\ \vdots\\ \Gamma \vee \neg A \vee \Delta\end{array}\end{array}}{\Gamma \vee \neg A \vee \Delta}\ (1, 2)$$

$\mathcal{I}$が$\supset I$のとき、Pは

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A:1]\\ \vdots\\ \Gamma \vee B \vee \Delta\end{array}}{\Gamma \vee (A \supset B) \vee \Delta}\ (1)$$

と表すことができ、これは NK において Lemma 2.1 と排中律を用いることにより次のようにできる。

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\Delta:2]\\ \vdots\\ \Delta \vee \neg\Delta \quad \Gamma \vee (A \supset B) \vee \Delta\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[\Gamma:4]\\ \vdots\\ \Gamma \vee \neg\Gamma \quad \Gamma \vee (A \supset B) \vee \Delta \quad \Pi'\end{array}}{\Gamma \vee (A \supset B) \vee \Delta}\ (4,5)}{\Gamma \vee (A \supset B) \vee \Delta}\ (2,3)$$

ここでΠ'は次の deduction である。

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[A:1]\\ \vdots\\ \Gamma \vee B \vee \Delta\end{array} \quad \begin{array}{c}[\neg\Gamma:5]\\ \vdots\\ B \vee \Delta\end{array}}{\begin{array}{c}\vdots\\ B\\ \hline A \supset B\end{array}\ (1) \qquad [\neg\Delta:3]}}{\Gamma \vee (A \supset B) \vee \Delta}$$

$\mathcal{I}$が$\forall I$のときも同様に行なう。

2.3 Remark

Theorem 2.2 の証明において、classical な$\supset I, \neg I, \forall I$の場合にたいする排中律の使用は本質的である。なぜなら、これらからは、排中律 (又は排中律と同値な命題) を演繹することができる。それ以外の場合には、変形は NJ の推論で行われる。

3 Critical inference

本節では、 5 節以降の為の準備として、NDK-deduction に関するいくつかの定義を与える。

3.1 Predecessor

$C(X)$ で Xを含む component を表す。推論$\mathcal{I}$に関して d.c.A と d.c.Bが次の関係のいずれかを満たすとき、Bは A の predecessor であるという。

1. $\mathcal{I}$が前提が 1 つの推論のとき、すなわち、

$$\frac{\Gamma \vee C(X) \vee \Delta}{\Gamma \vee C(Y) \vee \Delta}\ \mathcal{I}$$

のとき、

   (a) $\mathcal{I}$が$\vee I$で、Bが$\mathcal{I}$で新しく導入される component のとき、Bは predecessor を持たない

   (b) $\mathcal{I}$が$\neg I$で、Bが新しく導入される component のとき、Bは predecessor を持たない

   (c) (a), (b) のいずれでもないとき、

      i. A が $C(X)$ で Bが $C(Y)$

      ii. A, Bはそれぞれ前提、結論のΓ(又はΔ) の同じ位置にある component

2. $\mathcal{I}$が$\wedge I$のとき、すなわち、

$$\frac{\Gamma \vee C(X) \vee \Delta \quad \Gamma \vee C(Y) \vee \Delta}{\Gamma \vee C(X \wedge Y) \vee \Delta}\ \mathcal{I}$$

のとき、

   (a) A が $C(X)$ 又は $C(Y)$ で Bが $C(X \wedge Y)$

   (b) A, Bはそれぞれ前提、結論のΓ(又はΔ) の同じ位置にある component

3. $\mathcal{I}$が$\supset E$のとき、すなわち、

$$\frac{\Gamma \vee X \vee \Delta \quad \Pi \vee X \supset Y \vee \Lambda}{\Gamma \vee \Pi \vee Y \vee \Delta \vee \Lambda}\ \mathcal{I}$$

のとき、

   (a) A が $X \supset Y$で Bが Y

   (b) A, Bはそれぞれ前提、結論の$\Gamma, \Delta, \Pi, \Lambda$の同じ位置にある component。(但し、$B$が$\Gamma$と$\Pi$に重なるとき、$A$ は BのΓに対する component 又はΠに対する component となる。BがΔとΛに重なるときも同様。)

4. $\mathcal{I}$が$\neg E$のとき、すなわち、

$$\frac{\Gamma \vee X \vee \Delta \quad \Pi \vee \neg X \vee \Lambda}{\Gamma \vee \Pi \vee \Delta \vee \Lambda}\ \mathcal{I}$$

のとき、3.(b) と同様に定義する。

5. $\mathcal{I}$が$\vee E$のとき、すなわち、

$$\frac{\Gamma \vee (X \vee Y) \vee \Delta \quad \begin{array}{c}[X]\\ \vdots \\ D\end{array} \quad \begin{array}{c}[Y]\\ \vdots \\ D\end{array}}{\Gamma \vee D \vee \Delta}\ \mathcal{I}$$

のとき、

(a) A, Bはそれぞれ前提、結論のΓ (又はΔ) の同じ位置にある component、もしくはそれぞれ前提、結論の Dである。

(b) A が主前提の $X \vee Y$の X、Bがこの推論 $\mathcal{I}$で discharge される assumption の X。A が Yのときも同様。

(c) BがΓと DとΔの 2 つ以上と重なるとき、A は 3.(b) と同様に定義する。

6. $\mathcal{I}$が $\exists E$のとき、すなわち、

$$\frac{\Gamma \vee \exists x F \vee \Delta \quad \begin{array}{c}[F]\\ \vdots \\ D\end{array}}{\Gamma \vee D \vee \Delta}\ \mathcal{I}$$

のとき、

(a) A, Bはそれぞれ前提、結論のΓ (又はΔ) の同じ位置にある component、もしくはそれぞれ前提、結論の Dである。

(b) A が主前提の$\exists x F$、Bがこの推論$\mathcal{I}$で discharge される assumption の F

(c) BがΓと DとΔの 2 つ以上と重なるとき、A は 3.(b) と同様に定義する。

predecessor を持たない formula を、initial という。

3.2 String and Path

formula A から始まる predecessor の列を、A の string という。最後の formula が initial である string を、path という。また deduction の path を、その deduction の結論から始まる path と定める。

3.3 Ancestor and Desendant

Cの string で Dを含むものがあるとき、Cは Dの desendant、Dは Cの ancestor であるという。

3.4 Irrelevant and Essential component

d.c.Cが irrelevant であるとは、この Cの ancestor の中に$\vee I$で導入される formula があるときをいう。irrelevant でない d.c. を essential と呼ぶ。

3.5 Critical inference

irrelevant component に作用する推論$\supset I, \forall I$を critical という。

4 The system of NDKE

4.1 Negative dual pair

negative dual pair (n.d.p.) を帰納的に定義する。

1. formula$A$ に対して、$(A, \neg A)$ は n.d.p.
2. formula$A$ に対して、$(\neg A, A)$ は n.d.p
3. $(E_i, F_i)(i = 1, 2)$ が n.d.p. のとき、$(E_1 \wedge E_2, F_1 \vee F_2)$ は n.d.p.
4. $(E_i, F_i)(i = 1, 2)$ が n.d.p. のとき、$(E_1 \vee E_2, F_1 \wedge F_2)$ は n.d.p.
5. (E, F) が n.d.p. のとき、$(\forall xE, \exists xF)$ は n.d.p.
6. (E, F) が n.d.p. のとき、$(\exists xE, \forall xF)$ は n.d.p.

(E, F) が n.d.p. のとき、E, Fはそれぞれ F, Eの negative dual であるという。

4.2 Excluded middle type axiom

(E, F) が n.d.p. のとき、$E \vee F$を排中律型公理という ([2] を参照)。

4.3 NDKE and NKE

NDK, NK に排中律型公理を加えてできる体系をそれぞれ NDKE, NKE と呼ぶ。

NDKE, NKE に対しても 3.1 から 3.6 と同様の定義を与えることができる。

4.4 Rank

NDKE-deduction Pにたいして、βを Pの path とするとき、γ_β でβに沿った critical な推論の数を表し、Pの rank を

$$rank(P) = \sum_{\beta:path} \gamma_\beta$$

で定める。

5 Natural reasoning

前節で定義した critical な推論が不自然な推論であり、そのような推論はどのように解釈すれば正当化できるかを、例をもって見ていく。

NDK-deduction

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A:1]}{\exists xA}}{\exists xA \vee C} \vee I \quad \dfrac{[D]}{\exists xA \vee D}}{\dfrac{\exists xA \vee (C \wedge D)}{\exists xA \vee (A \supset C \wedge D)}\ (1) - \supset I}$$

について考える。この deduction において、$[A:1]$ は $\exists xA$ を導く為の assumption であるが、$\exists xA$ とは無関係に$\vee I$で導入された formula Cから演繹される $C \wedge D$にたいして作用している。

この deduction は次の様に考えることができる。

1. A が真ならば、$\exists xA$ は真
2. A が偽ならば、C, Dの真偽に関係なく $A \supset C \wedge D$は真

この推論 1 、 2 を deduction の形で表すと、

$$\dfrac{A \vee \neg A \quad \dfrac{\dfrac{[A:2]}{\exists xA}}{\exists xA \vee (A \supset C \wedge D)} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A:3] \quad [\neg A:4]}{C} \quad [D]}{C \wedge D}}{A \supset C \wedge D}\ (3)}{\exists xA \vee (A \supset C \wedge D)}}{\exists xA \vee (A \supset C \wedge D)}\ (2,4)$$

となる。

こうしてみると、classical な$\supset I, \neg I, \forall I$以外の推論は自然であると考えることができる。

ここで、 NDKE から classical な$\supset$ $I, \neg I, \forall I$を除いて得られる体系をNDKE*とする。このとき、 classical な推論をもつ (NDK-)deduction をNDKE*-deduction へ、なるべくもとの構造を変えない様に変換するアルゴリズムがあり、これを次節で与える。

6 Natural reasoning

本節では、(5 節で考察した) NDK-deduction から不自然な推論 (classical な$\supset$ $I, \neg I, \forall I$) を除くアルゴリズムを与える。(詳細は [3] の 7 節と 8 節参照。)

critical でない$\supset$ $I, \forall I$を除くには、Theorem 2.2 の証明で用いた変換を行なえば良い。

残されたのは、critical な$\supset$ $I, \forall I$を除くことである。それには次の 6.1 から 6.3 で与えられる変換を行なえば良い。

6.1

Pを$\Gamma \vee G \vee \Delta$ (G は irrelevant) への NDKE-deduction とするとき、

1. まず Pから G の path を取り除く。
2. これにより、G の ancestor に適用する critical な$\supset$ Iにより discharge される assumption の集合を $\mathcal{A}$ とすると、$\mathcal{A}$ の元は open assumption である。
3. 1 で得られる図から無駄を除いて、deduction にする。

$$\frac{A}{A \to A}$$

4. $\mathcal{A}$ の元の conjunction $E \equiv \wedge\{A | A \in \mathcal{A}\}$ の universal closure E'を、3 で得られた deduction の open assumption $A \in \mathcal{A}$ の上に次の様に結合させ、得られた deduction を P'とする。

$$\begin{array}{l} \dfrac{E'}{E}\ \forall E \\ \dfrac{}{A}\ \wedge E \end{array}$$
$$\vdots$$
$$\frac{}{A}\ \wedge E$$

この P'に対して、$rank(P') < rank(P)$ が成り立つ。

6.2

Pを$\Gamma \vee G \vee \Delta$　(G は irrelevant) への NDKE-deduction とするとき、

1. 6.1.2 における $A \in \mathcal{A}$ に対して、A が discharge される推論の前提の formula を G_Aとする。
2. $A \in \mathcal{A}$ に対して、次の deduction を P_Aとする。

$$\dfrac{[A:a] \quad [\neg A]}{\dfrac{}{\begin{array}{c} G_A \\ \vdots \\ G \end{array}}}$$

3. 6.1.4 における Eに対して、Eの negative dual$F$を $F \equiv \vee\{\neg A | A \in \mathcal{A}\}$ とする。よって Fと P_Aを用いて、Fから G への deduction P_G^Fを作ることができる。
4. 次の deduction を P''とする。 (但し、F'は Fの existential closure)

$$\dfrac{\begin{array}{c} F' \\ \vdots \\ P_G^F \end{array}}{G}$$

こうして得られた P''は、critical な推論をもたず、結論の G は irrelevant でない。

6.3

途中に$\Gamma \vee G \vee \Delta$　(G は irrelevant) の現れる formula H への deduction P_Hを考える。$\Gamma \vee G \vee \Delta$への subdeduction Pで、$rank(P) > 0$ となるような一番大きいものをとる。これを P_Gとしよう。

1. 6.1 より、次の様な deduction P'_Gを得る

$$\begin{array}{c} [E'] \\ \vdots \\ \Gamma \vee \Delta \end{array}$$

$P_{G'}$から P_Hの一部をコピーして次の deduction P_H^1を得る。

$$\dfrac{\begin{array}{c} [E'] \\ \vdots \\ \Gamma \vee \Delta \end{array}}{\begin{array}{c} \Gamma \vee G \vee \Delta \\ \vdots \\ H \end{array}} \#$$

P_Gの取り方から、上のP^1_Hの#より下におけるGのdesendantには、$\supset I$の適用がない。ゆえに、$rank(P^1_H) < rank(P_H)$、よってP^1_HはNDKE*-deduction P^{1*}_Hに変形できる。

2. 6.1より、次の様なdeduction P''_Gを得る

$$\begin{array}{c}[F'] \\ \vdots \\ G\end{array}$$

P''_Gより、$\vee I$を用いて次のdeduction P^2_Hを得る。

$$\begin{array}{c}[F'] \\ \vdots \\ G \\ \vdots \\ \Gamma \vee G \vee \Delta \\ \vdots \\ H\end{array}$$

このとき、$rank(P^2_H) < rank(P_H)$となり、P^2_HはNDKE*-deduction P^{2*}_Hに変形できる。

3. 次のdeductionをP^*_Hとする。

$$\dfrac{\begin{array}{cc}[E'] & [F'] \\ \vdots\ P^{1*}_H & \vdots\ P^{2*}_H \\ E' \vee F' \quad H & H\end{array}}{H}$$

このP^*_Hは我々の求めるものであり、criticalな推論をもたない。

6.4 Remark

essential componentに適用されたclassicalな$\supset I, \forall I$については、Theorem 2.2の変形を適用する。

6.5 Examples

ここで2つの例をあげる。

(1) P:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A(b):1]}{A(b)\vee A(c)}\vee I}{A(b)\vee(A(b)\supset A(c))}(1)}{(A(a)\supset A(b))\vee(A(b)\supset A(c))}}{(A(a)\supset A(b))\vee\forall y(A(b)\supset A(y))}}{(A(a)\supset A(b))\vee\exists x\forall y(A(x)\supset A(y))}}{\forall y(A(a)\supset A(y))\vee\exists x\forall y(A(x)\supset A(y))}}{\exists x\forall y(A(x)\supset A(y))\vee\exists x\forall y(A(x)\supset A(y))}}{\exists x\forall y(A(x)\supset A(y))}\ Contraction$$

$P^1\equiv P^{1*}$:

$$\dfrac{\dfrac{[\forall zA(z):1]}{P(b)}}{A(a)\supset A(b)}$$
$$\vdots$$
$$\exists x\forall y(A(x)\supset A(y))$$

$P^2\equiv P^{2*}$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg A(b):2]\quad[A(b):3]}{\dfrac{A(c)}{A(b)\supset A(c)}(3)}}{\vdots}}{\dfrac{[\exists z\neg A(z):4]\qquad\exists x\forall y(A(x)\supset A(y))}{\exists x\forall y(A(x)\supset A(y))}(2)}$$

P^*:

$$\dfrac{\forall zA(z)\vee\exists z\neg A(z)\quad\begin{array}{c}[\forall zA(z):1]\\ \vdots\ P^{1*}\\ \exists x\forall y(A(x)\supset A(y))\end{array}\quad\begin{array}{c}[\exists z\neg A(z):4]\\ \vdots\ P^{2*}\\ \exists x\forall y(A(x)\supset A(y))\end{array}}{\exists x\forall y(A(x)\supset A(y))}(1,4)$$

(2) P:

$$\dfrac{\dfrac{[\forall x(F(x)\vee C)]}{F(x)\vee C}}{\forall xF(x)\vee C}$$

P^*:

$$\dfrac{C\vee\neg C\quad\dfrac{[C:2]}{\forall xF(x)\vee C}\qquad\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x(F(x)\vee C)]}{F(x)\vee C}\qquad[\neg C:1]}{\vdots}}{\dfrac{F(x)}{\forall xF(x)}}}{\forall xF(x)\vee C}(2,1)$$

参考文献

[1] M. Yasugi and K. Ryu, *NDK, A New Classical System*, The Bull. of the Inst. of Computer Science of Kyoto Sangyo Univ., vol.11(1994), 1-25.

[2] 大芝 猛, 自動証明における自然な証明生成への一つの近接, 情報処理学会論文誌, 第 35 巻 (1994), 222-231.

[3] M. Yasugi and M.Nakata, *NDK and Natural Reasoning*, MS(1996), submitted.