解析におけるアルゴリズム
–Pour-El 理論と BSS 理論–

八杉 満利子 （京都産業大学）

Algorithms in Analysis–Theories of Pour-El and BSS–

Mariko Yasugi(Kyoto Sangyo University)

Abstract

This is an exposition of a computational system over an ordered ring or field which consists of iterated applications of polynomials and evaluations of inequalities. Its applications to dynamical systems and to computability problems in analysis are also explained.

キーワード：再帰関数、計算可能、実効的、BSS マシン、決定可能
(recursive function、computable、effective、BSS machine、decidable)

1 はじめに

数学をアルゴリズムの見地から構築し直すことは、古くから行われてきた。伝統的には、自然数上の再帰的（計算可能）関数を基本にして、実数や実数上の関数を構成して行くものであった。

M. B. Pour-El はこの考え方を拡張して、解析学の各理論に、計算可能性構造と呼ぶ、アルゴリズムをもつ部分構造を導入した。それによって数学の諸概念とアルゴリズムの相互関係の研究を進めた。

解析学におけるアルゴリズムの研究では、”計算可能な実数”を考察のベースにする。ここで実数 x が計算可能とは、x が次の二つの条件を満たす分数列 $\{r_n\}$ によって近似されることを指す。

（1）分数列 $\{r_n\}$ を構成するアルゴリズムが存在する。（各自然数 n の入力に対して r_n を計算するプログラムが存在する。）

（2）近似の精度を計るアルゴリズムが存在する。（各自然数 p に対して、N_p 以上の自然数 m については $|x - r_m| \leq 1/2^p$ となるような自然数 N_p を与えるプログラムが存在する。）

（2）が成り立っているときに、x は $\{r_n\}$ によって実効的に近似される、という。一般にこれに似た条件が成り立つときに、”実効的”という表現を使う。

実数 x が計算可能であるとは、分数による x の無限精度の近似を与えるプログラムが書ける、ということになる。

上記の定義は、計算可能な実数列にも自然に拡張できる。極限について言及するためには、実数列の計算可能性が必要である。計算可能な実数列の族を、実数における計算可能性構造と呼ぶ。

Pour-Elはこれらの基本的なアイディアの上に、連続関数、微積分、Banach空間およびHilbert空間における計算可能性構造の理論を展開した。そこで得られた結果によれば、計算可能性（アルゴリズムの存在）は、”なめらかさ”の程度の表現であることが分かる。たとえば微分作用素は、C^1関数上では計算可能性を保存しないが、C^2関数上では保存する。また、線形作用素の有界性と計算可能性の保存とは同値である。

計算可能な実数および関数、Banach空間の計算可能性構造、Hilbert空間におけるアルゴリズムの問題などは[?]に詳しく解説されている。読みやすい本である。関数解析の枠組みは、抽象化の実現として構築されたものであるが、それが論理的なものであるために、計算可能性の研究にも都合がよいのである。

Pour-El理論のその後の進展として、Fréchet空間の計算可能性構造（[?]）、Fréchet空間の距離づけと計算可能性問題（[?]）、距離空間の計算可能性構造（[?]）などがある。以上の総合報告として、鷲原・八杉による原稿”解析学における計算可能性構造”がある。また、ユークリッド空間の計算可能な集合に関する議論（[?]）およびその応用（[?]）などもある。

なお、数学におけるアルゴリズムの研究にはいろいろな方向があるが、[?]だけを参考にあげておく。計算可能解析学の基礎付けとしては[?]などがある。Pour-El理論とこれらの間の相互関係は、将来の課題である。

他方[?]においてL.Blum、M.ShubおよびS.Smaleは、順序環（順序体）上の、多項式（有理関数）の繰り返し適用および等式・不等式の判定をベースにした、計算マシンを定義した。（このマシンを仮にBSSマシンと呼ぶ。）BSSマシンでの計算の停止性問題をJulia集合などに応用している。

この方面の研究も進んでいるが、非公式の解説：Root finding algorithmについてのMcMullenの仕事について（小森洋平 1995）が参考になる。

BSSマシンでは実数に関する計算を基礎にするので、従来のアプローチとは異なる。しかしベースとして整数環をとれば、BSSマシンで計算できる関数は本質的に再帰関数（自然数上の計算可能関数）と一致する。したがって本稿ではまずBSSマシンを説明する。その特殊な場合としての再帰関数を使って、Pour-El流の計算可能性を導入する。両理論の関係の解明は興味ある問題であり、今後の課題である。

BSSマシンについては、Julia集合の決定問題にのみ、言及する。また、Pour-El理論に関しては、実数と実数上の連続関数についてのみ、解説する。

2 BSS マシン

以下で Rは単位要素をもつ可換順序環とする。

定義 2.1 R^nは、N個の Rの直和を表す ($n = 1, 2, \cdots$)。$F : R^n \to R^m$が多項式写像であるとは、$f = (f_1, \cdots, f_i, \cdots, f_m)$ で、各 f_iは n 変数多項式 $f_i : R^n \to R$である。とくに Rが体のとき、多項式を有理関数と読み替えた定義が可能である。

上の定義は $n = \infty$ の場合に拡張できる。universal machine を扱うときにはこのケースは重要であるが、煩雑さを避けるために、n が有限の場合に限って話を進める。

定義 2.2 BSS マシン Mとは、R^lからの入力に対して、逐次以下のことを実行するための、規則の集合である。ただし有限個の多項式 (有理関数) 写像が与えられているものとする。

1. 多項式 (有理関数) を適用して計算し、次へ進む。

2. 値が負 (Rにおける順序で) であるか非負であるかを判定し、その結果にしたがって次へ進む。(2 方向に分岐する。)

3. 停止する。

実際の入力に対して、停止する場合もしない場合もあるが、停止したときの値が出力値になる。

マシン Mの作動のプロセスを (Mによる) 計算過程と呼ぶ。

$\Omega_M = \{y|$ 入力 yに対して、Mによる計算過程が停止する $\}$ とおき、Ω_M を Mの停止集合と呼ぶ。

定義 2.3 ϕが $R^l \to R^m$の (部分) 関数であるとき、関数ϕの定義域Ω_ϕは R^lの部分集合である。これに対してある BSS マシン Mが存在して、$\Omega_\phi = \Omega_M$ であるときに、ϕ は R上の部分計算可能関数であるという。とくに$\Omega_\phi = \Omega_M = R^l$ のとき計算可能関数であるという。

命題 2.1 定義 2.3 で Rを整数環 Z、$m = 1$ としたときに、Z上の計算可能関数は、"ふつうの" 意味の再帰関数 (計算可能関数) である。

"ふつうの" 再帰関数は自然数 N上の関数であるが、Zからの調節は容易である。以後再帰関数は自然数上のものとする。

自然数の集合 A が再帰的とは、各要素 n について $n \in A$?の判定が再帰関数によってできることをいう。

数学における計算可能性の研究では、計算不可能性を示すための反例が重要である。反例を作る基礎になるのがつぎの事実である :再帰的単射 a で、その地域 $a(\mathbf{N})$ が再帰的でないものがある。

BSS 理論では、Rが実数の集合 $\mathbf{R}$ の場合が重要である。ある BSS マシン Mに関して $X = \Omega_M$と表される実数の集合 Xを $\mathbf{R}$ 上の枚挙可能集合という。Xもその補集合も枚挙可能であるとき、X （および $\mathbf{R} - X$ ）は $\mathbf{R}$ 上で決定可能である、という。これに関してたとえば、次の事実が示される :”ほとんどの”Julia 集合は枚挙可能でない。これらの補集合は枚挙可能であるが決定可能でない例である。

3 Poue-El 理論における計算可能性

定義 3.1 （計算可能分数列）分数列 $\{r_n\}$ が計算可能とは、再帰関数α 、β、σ を用いて、$r_n = (-1)^{\sigma(n)}\alpha(n)/\beta(n)$ と表されることである。ただし、各 n について$\beta(n) \neq 0$ とする。

定義 3.2 （実効的収束）分数列 $\{r_n\}$ が実数 x に実効的に収束するとは、再帰関数α が存在して、各自然数 p について （$n \geq \alpha(p)$ ならば $|r_n - x| \leq 1/2^p$ ）が成り立つことである。このときα をこの数列の （x への）収束率と呼ぶ。

定義 3.3 （計算可能な実数）実数 x が計算可能とは、x に実効的に収束する計算可能な分数列が存在することである。

定義 3.4 （分数の実効的コーシー列）分数列 $\{r_n\}$ が実効的なコーシー列であるとは、再帰的関数 αが存在して （$n, m \geq \alpha(p)$ ならば $|r_n - r_m| \leq 1/2^p$ ）が成り立つことである。

計算可能な実数は分数列の実効的なコーシー列で表現され、その収束率は再帰的な関数でコントロールされる。

計算可能な実数は、再帰的関数による表現をもつから、可算個しかない。有理数、π, e、自然数の平方根、などは計算可能である。また、計算可能な実数の集合は、四則演算について閉じている。

例えば実数 e について、分数列 $\{\sum_{n=0}^{k} 1/n!\}$ は計算可能であり、かつ再帰的関数 $\alpha(p) = p + 2$ を収束率として、 e に実効的に収束する。

命題 3.1 （順序関係の判定）x を計算可能な実数とする。
$x > 0$ （または $x < 0$ ）ならば、この事実を示す実効的な手続きが存在するが、$x = 0$ の場合、これを示す実効的な手続きは、一般には存在しない。

BSS のように実数についての非負の判定を含む計算は、命題?? によって、本節の意味の計算には相当しない。

計算可能な 2 重分数列を使って定義??と同じように、”計算可能な実数列”を定義できる。

分数の場合と同じように、実数列の実効的収束が定義できる。

極限に関する基本事項は、下記のとおりである。

（極限の計算可能性）実数の2重数列 $\{x_{nk}\}$ が計算可能であり、実数列 $\{x_n\}$ に実効的に収束するならば、数列 $\{x_n\}$ は計算可能である。

（単調列の極限）2重数列 $\{x_{nk}\}$ は計算可能であり k に関して増加列であるとする。また、各 n について $\{x_{nk}\}$ が $\{x_n\}$ に収束するものとする。このとき数列 $\{x_n\}$ が計算可能であることと、収束が実効的であることは同値である。

（反例の作り方）a は再帰的単射で、集合 $A = a(\mathbf{N})$ が非再帰的とする。$s_k = \sum_{m=0}^{k} 1/2^{a(m)}$、 $s = \lim_{k\to\infty} s_k$ とおくと、$\{s_k\}$ の収束は実効的でない。実際にこの s が計算可能でないことが示される。

以下では計算可能な実数を端点とする有界閉区間 で定義された, 実数値関数を考察の対象にする。

定義 3.5　（関数の計算可能性）閉区間 I 上で定義された関数 $f(x)$ が次の条件 (i),(ii) を満たすとき, 計算可能であるという。

(i)　数列の計算可能性を保存する。すなわち, $\{x_n\}$ が計算可能ならば $\{f(x_n)\}$ が計算可能である。

(ii)　$f(x)$ は実効的に一様連続である。すなわち, 再帰的関数 α が存在して

$$|x-y| \le 1/\alpha(p) \quad \text{ならば} \quad |f(x)-f(y)| \le 1/2^p$$

α を, 関数 f の連続率とよぶ。

実数全体 $\mathbf{R}$ および開区間 (a,b) 上の関数の計算可能性も, 同様に定義される。有界閉区間上の場合との違いは, 条件 （ii）が拡張されることである。

関数の計算可能性は、関数の合成、貼り合わせ、拡張、実効的収束 （最大値ノルムによる）および不定積分に関して保存される。計算可能な関数の最大値は計算可能な実数であり、その中間値として計算可能な実数がとれる。

微分は関数の計算可能性を必ずしも保存しないが、かなり滑らかな関数については保存する。

よく知られた関数、たとえば計算可能な係数をもつ多項式、$\max, \exp, \sin$ $\cos, \log, \sqrt{\ }$ などはすべて計算可能である。

下記の命題は、計算可能な関数の特徴付けを示す。

命題 3.2　（Weierstrass 近似定理）$f(x)$ が I 上で定義された計算可能な関数であるとき, I で $f(x)$ に実効的に収束する計算可能な多項式列が存在する。

ここで多項式列 $\{p_n(x)\}$ が計算可能とは, 計算可能な2重分数列 $\{r_{ni}\}$ と再帰的関数 α によって $p_n(x) \equiv \sum_{i=0}^{\alpha(n)} r_{ni}x^i$ で定義されることである。

参考文献

[1] Erret Bishop and Douglas S. Bridges, *Constructive Analysis*, Springer-Verlag(1985).

[2] Lenora Blum, Mike Shub and Steve Smale, *On the theory of computation and complexity over the real numbers: NP-completeness,recursive functions and universal machines*, Bull.of AMS, vol.21(1989),1-46.

[3] Hiroyasu Kamo and Kiko Kawamura, *Computability of Self-similar Sets*,Manuscript(1997).

[4] Takakazu Mori, Yoshiki Tsujii and Mariko Yasugi, *Computability structures on metric spaces*,Combinatorics, Complexity, and Logic (ed.D.S.Bridges et al.), Proceedings of DMTCS'96(1996), 351-362.

[5] Marian B. Pour-El and J. Ian Richards, *Computability in Analysis and Physics*, Springer-Verlag(1989).

[6] Masako Washihara, *Computability and Fréchetspaces*, Math. Jap., vol.42(1995), 1-13.

[7] Masako Washihara and Mariko Yasugi ,*Computability and metrics in a Fréchetspace*,Math. Jap., vol.43(1996), 431-443.

[8] Klaus Weihrauch, *A foundation for computable analysis*, Combinatorics, Complexity, and Logic (ed.D.S.Bridges et al.), Proceedings of DMTCS'96(1996), 66-89.

[9] Qing Zhou, *Recursive open and closed subsets of* $\mathcal{R}^n$, Manuscript(1996).