関数空間と計算可能性

八杉満利子
京都産業大学 理学部
e-mail:yasugi@cc.kyoto-su.ac.jp
http://www.kyoto-su.ac.jp/~yasugi

平成11年 2月 11日

1 序文

数学の各理論をアルゴリズムの観点から再検討することは, 重要であり, また数学的に興味深いことである.

とくに,Minnesota 大学の M. B. Pour-El およびその協力者 I. Richards が開発した（1989 年）計算可能性構造による解析学の研究は, 解析の諸概念とアルゴリズムとの相互関係を明らかにする, という点において, 解析学の新しい見方を提供する.

解析学におけるアルゴリズムの研究では, 「計算可能な実数」を考察のベースにする. ここで実数 x が計算可能とは, x を近似する分数列 $\{r_n\}$ で次の二つの条件を満たすものがあること、をいう。

（1）分数列 $\{r_n\}$ を構成するアルゴリズムが存在する. （各自然数 n に対して r_n を与えるプログラムが書ける.）

（2）近似の精度を計るアルゴリズムが存在する. （各自然数 p に対して, N_p 以上の自然数 m については $|x - r_m| \leq 1/2^p$ となるような自然数 N_p を与えるプログラムが書ける.）

（2）が成り立っているときに, x は $\{r_n\}$ によって実効的（*effective*）に近似される, という. 一般にこれに似た条件が成り立つときに, 「実効的」という表現を使う.

計算可能な実数は, 無限精度保証つきで分数によって近似できる, といってよいだろう.

計算可能な実数列も自然に定義できる. 極限について言及するためには, 実数列の計算可能性が重要なのである. 計算可能な実数列の族を, 実数における計算可能性構造と呼ぶ.

自然数, 分数についての$=, \leq, <$などは決定（計算）可能であるが, 実数については計算可能な a, b についても一般には $a = b$ は決定可能ではない.

Pour-El と Richards は, 上記の基本的なアイディアの上に, 連続関数, 微積分, Banach 空間および Hilbert 空間における計算可能性構造の理論を展開した. その集大成である [?] は大変読みやすい本である.

Pour-El 理論およびその発展である Fréchet 空間と距離空間における計算可能性構造については, 文献 [?] に紹介してある. 関連文献もそこにある. ここでは,Fréchet 空間に関するものと, 最近の文献のいくつかのみをあげておく ([?], [?]~[?], [?])。また, この小論では, 八杉・鷲原による近著 [?] の補足として, その背景を説明する。技術的なことは [?] に譲る。

2 不連続関数の計算可能性とは

実数のコンパクト区間上の連続関数についての計算可能性は, 自然な形で定義できる。いくつかの流派があるが, 基本的にあまり違わない。基本は, (1) 関数が計算可能性を保存する, すなわち計算可能な入力列の出力列も計算可能である, (2) 一様連続性の連続率が自然数上の計算可能 (再帰的) 関数として得られる, の 2 点である。いいかえれば, 関数値の有効な近似計算が区間の中で一様にできる, ということである。

開区間における計算可能性は, 閉区間で開区間を近似し, 連続率が閉区間列に依存して決定できればよい。

他方, 不連続な関数については, 不連続点における有効な近似とは何か, ということから考察を始めなければならない。その考察の方針は一通りではなく, また不連続関数は最初から視野に入れない流派もある。

我々は不連続な関数の計算可能性を種々な観点から考察している。その有効な手段を与えるのが, 関数空間の理論である。そこでは, 不連続関数についても, 連続関数におけるのと類似のいろいろな性質が, それぞれの空間におけるノルムの意味で成り立つからである。Pour-El・Richards は Banach 空間での関数の計算可能性を扱った。鷲原がその理論を Fréchet 空間に拡張し, 森・辻井・八杉は距離空間で同様の研究を行った。また, 鷲原は [?] において, デルタ関数の計算可能性という重要な結果を得ている。

ここではガウス関数という, 非常に単純な不連続関数を例にとって, 不連続関数の計算可能性についての具体的な考察を示す。

ガウス関数をとりあげたきっかけは,Blum-Shub-Smale の力学系アルゴリズム (cf. [?],[?]) では, ガウス関数は簡単な計算アルゴリズムをもつことであった。そこでは実数についての $a \leq b$ が決定 (計算) 可能だからである。しかし一般にたとえ a,b が計算可能であっても, この関係は決定可能ではない。(真の不等式 $a < b$ は決定可能である。) ガウス関数は

$$g(x) = n \quad \text{if} \quad n \leq x < n+1$$

と定義されるので,x が整数でなければ不等号の判定だけで計算できるが、x が整数であれば、$n = x?$は一般には判定できないので、$g(x)$ の値を計算するアルゴリズムも一般にはない。

このような属性をもつ関数について, どのような観点から計算可能性を論じることができるだろうか ？

ここでは, 4通りの数学的観点から検討する。関連する考察は Brattka, Weihrauch らによって行われてきている。（彼らの最近の論文およびそのほかの文献は [?] で見つけることができる。）我々の結果と彼らの結果の正確な関係は, 今後の検討課題である。

3 $[x]$ の計算

任意の計算可能な実数 x について（$x > 0$ の場合を扱う）, $x < n?$を $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$ について順次問う。（実際には x を近似する計算可能な分数列 $\{r_m\}$ を使って計算する。）必ず $n < x < n+2$ となる n が見つかる。もし運良く $n < x < n+1$ となる n にヒットしたら,$[x] = n$ とおけば, 計算は終了する。そうでなければ 分数列（実際には整数列）$\{N_p\}$ を次のように定義する。

$r_{\alpha(p)} < (n+1) - 1/2^p$を $p = 1, 2, \cdots$についてチェックする。（αは計算可能な収束率。）答えが No の間は $N_p = n+1$ とおく。ひとたび Yes がステージ p で達成されれば, $q \geq p$ となるすべての qについて $N_q = n$ とおく。

すべての p について $N_p = n+1$ ならば $\{N_p\}$ の極限は $n+1$ であり, そうでなければ極限は n である。どちらにしても $\{N_p\}$ は $[x]$ を実効的に近似する。

ただし, ここで注意しなければならないのは, 極限が n であるか $n+1$ であるかは, 決定できない。どちらかであり, いずれにしても正しく $[x]$ を近似し, 収束率は計算可能である。この意味で, 計算可能な各点 x については, その値を計算する方法がある, といえる。

しかしこれは, マスタープログラムがあって, 関数 $[x]$ を（任意の計算可能な x について）計算できる, ということではない。実際, ガウス関数は点列計算可能ではない。（計算可能な点列で、その関数値の列は計算可能でないものがある。）反例の作り方は省略するが, 再帰的単射で, その値域（その特性関数）が再帰的でない関数を利用する。

4 値の列としての計算可能性

ガウス関数の一つの見方は, 整数点での値が次の整数点未満まで続く。したがって値の列として見ることができる。実際には $\{n\}_{n=0,\pm1,\pm2,\cdots}$とい

う簡単な列である。そこで整数点がジャンプポイントである関数 fを数列 $\{f(n)\}_{0,\pm1,\pm2,\cdots}$と同一視する。整数インデックスをもつ数列全体の作る空間を $R^{\mathbf{Z}}$とすると, $x=\{\cdots,\xi_{-k},\cdots,\xi_{-1},\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_k,\cdots,\}$ について、セミノルムの列

$$p_m(x)=\max\{|\xi_k|:|k|\leq m\} \tag{1}$$

によって Fréchet 空間になる。

一方実数上の右連続でジャンプポイントが整数である階段関数の族をΣとおくと,

$$q_m(f)=p_m(\{f(k)\}) \tag{2}$$

はセミノルムになる。Σの関数は整数点における値で完全に決定される.

$\langle\Sigma,\{q_m\}\rangle$ が$\left\langle\mathbf{R}^{\mathbf{Z}},\{p_m\}\right\rangle$ と同型であることは明らかである. 後者で計算可能な要素は計算可能な（整数インデックスをもつ）実数列である. したがってΣ-関数はその値の列が計算可能であるときに関数として計算可能, と考えるのが自然である.

ガウス関数は明らかにΣ-関数であり, その値の列 $\{n\}_n$は計算可能な実数（実際には整数）列である. したがって上記の意味で計算可能である.

$x-y$座標で, 整数点で値をマークし, そこから右へ次の整数点まで水平に矢印を描き, 矢印の先は値を表さない, とすれば, この考え方でガウス関数を描画したことになる.

5 局所積分可能な関数としての計算可能性

実数上の関数で, 各正整数 kについて $[-k,k]$ 上で積分可能なもの全体はセミノルム

$$p_k(f)=\int_{[-k,k]}|f|dx$$

によって Fréchet 空間になる. これを $\left\langle L^1_{loc}(\mathbf{R}),\{p_k\}\right\rangle$と記し,$\{\mathcal{L}\}$ と略記する.

空間 $\{\mathcal{L}\}$ の生成元としては, たとえば端点が整数のコンパクトサポートをもち, ジャンプポイントと値が有理数であるような階段関数の族がとれる. しかし, 連続関数による近似という意味では, 有理係数多項式の族がよい. したがって, モノミアルの列 $1,x,x^2,x^3,\cdots,x^n,\cdots$が生成元の列になる.

同様に,$\{\mathcal{L}\}$ で計算可能な関数とは, たとえば有理係数多項式の再帰的数え上げ（有理数のすべての有限列の数え上げ）によって上記のセミノルム列の意味で実効的に近似される関数と考えるのが自然である. したがってモノミアルの列 $1,x,x^2,x^3,\cdots,x^n,\cdots$が実効的な生成元の列になる.

他方, 上記のような階段関数の族も, 関数列として計算可能であり, これを数え上げた列も実効的な生成元の列になる. どちらをベースにとっても計算可能な関数の族は一致する.

ガウス関数がそのような階段関数の部分列で実効的に近似されることは明らかである.

この考えに基づいてガウス関数を描画するときには, 隣り合う2整数の間に水平な線分を引き, 両端に白丸をつけるのが自然であろう. 白丸は, そこでは値を問わない, ということを表す.

6 ほかに

Brattka らは値が確定しないときには値の集合を改めて値として,「計算可能な関数は連続である」という姿勢をとる. ガウス関数も,n か $n+1$ か決定できないときには $\{n, n+1\}$ を値とすることによって,「連続」とできる.

また,$L^1_{loc}(\mathbf{R})$-関数, というかわりに不都合な点（ここでは整数点）を除いて新しい位相を導入すれば, そこでは連続な関数になる. そこではガウス関数は連続関数として計算可能になる.

我々のアプローチと, これらとは本質的に異なるものではないと考えられる。しかし我々はできるだけ「普通の」数学を実行する立場で, 関数の計算可能性を探求したいのであり, そのためには関数空間の理論は, 大変に好都合な道具である.

この小論は八杉のホームページ（日本語版）の「論文集」の中に置き、逐次改良して行く予定である。また計算可能性構造に関連する未解決問題も掲載する予定である。参考にしていただければ幸いである。

参考文献

[1] Lenora Blum, Mike Shub and Steve Smale, *On the theory of computation and complexity over the real numbers: NP-completeness,recursive functions and universal machines*, Bull.of AMS, vol.21(1989), 1-46.

[2] Vasco Brattka, *Feasible Real Random Access Machines*, http://www.informatik.fernuni-hagen.de/ thi1/vasco.brattka/papers/

[3] Marian B. Pour-El and J. Ian Richards, *Computability in Analysis and Physics*, Springer-Verlag(1989).

[4] Masako Washihara, *Computability and Fréchet spaces*, Math. Jap., vol.42(1995), 1-13.

[5] Masako Washihara,*Computability and tempered distribution*, to appear in Math.Jap..

[6] Masako Washihara and Mariko Yasugi, *Computability and metrics in a Fréchet space*,Math. Jap., vol.43(1996), 431-443.

[7] 八杉満利子, 解析におけるアルゴリズム - Pour-El 理論と BSS 理論 -, 電気学会研究会 (情報処理研究会) 資料,I P-97-13-21 (1997), 53-58.

[8] Mariko Yasugi,Takakazu Mori and Yoshiki Tsujii, *Effective Properties of Sets and Functions in Metric Spaces with Computability Structure*, Theoretical Computer Science, Special Issue on CCA'97, to appear.

[9] 八杉満利子・鷲原雅子, 解析学における計算可能性構造, 数学」, 第 50 巻第 2 号 (1998),130-148.

[10] Mariko Yasugi and Masako Washihara, *Computability problem of Gaussian function* Proceedings of CCA'98, Brno, 157-165. (cf. also "Recent Article in http://www.kyoto-su.ac.jp/~yasugi/)