不連続関数の極限計算可能性–意義と問題点

八杉満利子*

平成 14 年 11 月 27 日

1　序文

本論のテーマは, 連続体（実数）上の関数について, とくに不連続関数について, の計算可能性の問題である. 伝統的には連続関数の計算可能性の理論が提案され, その延長として, 不連続関数の計算可能性の理論がいろいろと提案されてきた.

数学的対象物の計算可能性とは本来, あるアルゴリズム（プログラム）があって, それにしたがえば計算が進み, 有限個のステップで計算が停止し, 正しい答えが出る, ということを意味する.

一般に, 連続体上の計算は有限回では停止しない. したがって, 何をもって計算可能というかということについて, ある程度合意しなければならない. このような場合に「計算可能」とは, 無限精度保証付きの有限近似のアルゴリズムの存在, と考えるのが自然であり, 有益である. 実数の有理数による近似は, どの方法でもこの方針にしたがっている. 実数上の関数については, 連続関数の計算を基本にする. 連続関数については, たとえば有理点上の値で関数全体が決まり, 各点（実数）における関数値を, その点の近傍における有理点での値で近似できるからである. この事実によって連続関数の描画は比較的容易にできる.

しかし不連続関数についても, 我々は計算したり描画をしたりする. したがって不連続関数についての計算可能性という概念も意味をもつはずである. そのための理論がいくつかあり, それぞれ基本的な思想の上に構築されている.

我々の立場は, 解析学の諸理論をアルゴリズムという見地から研究する, というものである. すなわち, 通常の解析学の枠組みの中で広い意味の計算アルゴリズムをもつ対象物または概念は何か, を判明させていくのが研究目的である. その立場からは, たとえばいくつかの点を除いては連続な関数ならば「ほとんど」計算可能とみなせる. その「ほとんど」の尺度を,Pour-El・Richards は Banach 空間のノルムに求めた（[3]）. 鷲原はそれを Fréchet 空間に拡張し, さらにデルタ関数を含む空間にも拡張した（[5], [6]）. 八杉・鷲原・Brattka

---

*京都産業大学・理学部. 部分的に科学研究補助費 12440031 の援助を受けている.

はこれらを基礎にして不連続関数の計算可能性問題を主に Fréchet 空間において扱った（[7], [9]）.

しかし関数空間における関数の計算可能性とは, その関数が関数空間の一点として計算可能という属性を与えられるのであって, 関数の引数への各入力値に対して関数値をどのように計算するか, ということについては不問である. 言い換えると, 不連続点が離散的であるために, 関数空間における対象物としての関数は, 不連続点での値は無視されるのである.

他方人間は, ある種の関数については不連続点における値を苦もなく計算することがある. したがって比較的単純な不連続関数については, 不連続点においてもなんらかの意味で関数値の計算可能性という概念を与えたい. その試みを八杉・Brattka・鷲原は [9] の 4 節において極限計算という方法で実行した. 本稿では, この極限計算に的をしぼる.

ここでは具体的で単純な不連続関数 $g(x) = \frac{1}{2}[x]$（$[x]$ は実数 x の整数部分を値とする関数で, ガウス関数とも呼ばれる）を例にして, その計算過程で生じる極限計算の現象を分析し, その意義・問題点を検証する. $[x]$ でなく $\frac{1}{2}[x]$ を扱う理由は,$[x]$ は整数であり, 整数の性質と実数としての $[x]$ の性質とが区別しにくいからであって,$\frac{1}{2}$ に特別な意味はない.$\frac{1}{2}[x]$ は実際には有理数であり, たとえば $\pi[x]$ とでもすれば有理数でない実数になる. 係数は本質的ではない. 数学的な議論の詳細は [9] の 4 節にある. 本論ではそれらに沿って, 概念の分析を行ってゆく.

不連続関数を含めて, 実数上の関数の計算可能性に関する文献としては上記の関数空間的手法のもの以外に,Weihrauch の Type 2 Turing Machine による基礎付け [8], 一様空間による関数の連続化の手法 [4] のみを挙げておく. なお, 連続体上の計算可能性についての入門としては,Pour-El・Richards の [3] 以外に八杉・鷲原の [11], [12] がクイック・レヴューとして都合よい. 自然数上の再帰的（計算可能）関数およびその整数並びに分数列への拡張についての基本事項の知識は仮定する.

本論の構成は, 実数と実数上の関数の計算可能性の説明（2 節）, 上記 $g(x)$ の計算の試みの解説（3 節）, 計算手続きについての考察（4 節）, 計算手続きの論理的分析（5 節）, 極限計算の導入（6 節）, 極限計算の意義と問題点の検討（7 節）となっている.

2 実数と連続関数の計算可能性–Review

以後「計算する」というときには実際に計算のアルゴリズムがあることをいい, 再帰的関数の存在とほとんど同義語である.「判定する」というときには, コンテクストにより（再帰的に）決定できる場合と, より強い原理に基づいて判定する場合とある. 有理数（自然数を含む）に関する基本的な関係（$<, =$ など）はすべて決定可能である.

まず実数の計算可能性および連続関数の計算可能性の定義を述べる.

実数 x が計算可能とは, x が次の二つの条件を満たしている分数列 $\{r_m\}$ によって近似されることをいう.

（1）$\{r_m\}$ は再帰的な有理数列である.

（2）$\{r_m\}$ の x への近似率 α として, 再帰的関数がとれる. すなわち, 各自然数 p に対して, $m \geq \alpha(p)$ ならば $|x - r_m| \leq \frac{1}{2^p}$ が成立する.

（2）が成り立っているときに, x は $\{r_m\}$ によって実効的に近似される, という. 一般にこれに似た条件が成り立つときに, 「実効的」という表現を使う. 実数 x が（1）,（2）のような $\{r_m\}$ と α で近似されるときに省略的に $x \simeq \langle r_m, \alpha \rangle$ と表す.

「計算可能」の定義は, 有理数の再帰的 2 重列によって, 実数列に拡張できる.

整数, 有理数はすべて計算可能な実数の特別な例であり, また, よく知られている実数 e, π などは有理数でない計算可能実数である.

次に, 実数から実数への連続関数 f が計算可能である, とは, 以下の条件 (i) と (ii) が成り立っていることをいう.

(i)　実数列の計算可能性を保存する. すなわち, $\{x_n\}$ が計算可能な実数列ならば $\{f(x_n)\}$ が計算可能な実数列である.

(ii)　$f(x)$ は実効的に連続である. すなわち, 再帰的関数 β が存在して各 $p = 1, 2, 3, \cdots$ と $x, y \in [-n, n]$ について,

$$|x - y| \leq \frac{1}{\beta(n, p)} \quad \text{ならば} \quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2^p}$$

が成り立つ.β を, 関数 f の連続率とよぶ.

「計算可能性」の定義は関数列にも拡張できる. また, この定義によれば, 計算可能な関数はコンパクト区間では一様連続であり, その一様性が実効的に保証される.

上の定義によれば, 加減乗除やふつう微分積分で扱う実数上の連続関数は計算可能である. これは計算可能性のどの理論でも同じである. 数学では超限的な概念が多いが, 具体的に考えられるものは計算可能なのである。

3　不連続関数の計算–例に導かれて

ガウス関数 $[x]$ または関数 $g(x) = \frac{1}{2}[x]$ は, 非常に簡単な右連続左極限階段関数である. 不連続であるから, 2 節の意味では計算可能ではない. しかし我々は気楽にこの関数を計算し, グラフを描く. 数式処理言語 Mathematica ではガウス関数は Floor という関数で表され, 簡単に描画できる. これは内部で近似計算をし, 不連続点での処理をしているのである. つまりそれが可能なのである. しかし当然あまり複雑な挙動をする関数は, 近似計算も描画も難しいだろう.

$g(x)$ は整数においてジャンプし（不連続である）, 整数間の開区間での挙動が単純な関数である. このような関数についての計算の試みを, $g(x)$ をガイドとして調べてみる. まず $\frac{1}{2}[x]$ の計算を試みよう.

x が計算可能実数で, 再帰的有理数列 $\{r_m\}$ と再帰的近似率 α で近似されている, すなわち $x \simeq \langle r_m, \alpha \rangle$ とする.

以後の操作で基本になるのは, [3] の Proposition 0,Chapter 0, である. すなわち, 計算可能な実数 x, y について, 実際に $x > y$ であるときにはこの事実を再帰的に判定できる. これより,$x \simeq \langle r_m, \alpha \rangle$ であるときに, $x < k$（$k < x$）はある p について $r_{\alpha(p)} < k - \frac{1}{2^p}$（$r_{\alpha(p)} > k + \frac{1}{2^p}$）となることと同値である.

これを使って,$g(x) = \frac{1}{2}[x]$ の計算をするために, 次のような操作を行う.

1　$n < x < n+2$ となる整数 n を計算する：$k = 1, 2, \cdots$ について,$r_{\alpha(p)} < n - \frac{1}{2^p}$ がある $p \leq k$ と $n \leq k$ について成立するかどうかチェックする. 同様に,$n + \frac{1}{2^p} < r_{\alpha(p)}$ をチェックする. k を増加させることによって, やがて $n < x < n+2$ となる n を確定することができる.

2　**1** で求めた整数 n に関して,$x < n+1$ か,$x \geq n+1$ 以上であるか, の近似的推測を表現する再帰的整数列 $\{N_p\}$ を計算する. すなわち,$p = 1, 2, \cdots$ において $N_p = n+1$ ならば $n+1 \geq x$ と推測され,$N_p = n$ ならば $x < n+1$ が確定する：$r_{\alpha(p)} < (n+1) - \frac{1}{2^p}$, $p = 1, 2, \cdots$ が成立するかどうか判定し, 答えが *No* であれば, $N_p = n+1$, 答えが *Yes* であれば, $N_p = n$ とおく.（p において *Yes* となれば, すべての $q \geq p$ に対して $N_q = n$ になる.）

3　**2** で求めた $\{N_p\}$ から,$g(x)$ の有理数による再帰的な近似列 $\{s_p\}$ を構成する：$s_p = \frac{N_p}{2}$ とおけばよい.

1, **2**, **3** により,x の近似 $\langle r_m, \alpha \rangle$ から再帰的関数（数列）$\{N_p\}$ と $\{s_p\}$ が得られた.

注　$n < x < n+1$ が再帰的に判定できれば, ただちに $g(x)$ の値 $\frac{n}{2}$ が計算できる. 問題は $x = n+1$ のときこの事実は再帰的に判定できない. そのために $g(x)$ の値を $n < x < n+2$ である x について一様に求めなければならない.

2 において, すべての p について $N_p = n+1$ である（Case 1）かまたは, ある p について $q < p$ ならば $N_q = n+1$ であり, $q \geq p$ ならば $N_q = n$ である (Case 2) か, どちらかであることを注意しておこう.

有理数列 $\{s_p\}$ は非減少であり, $\frac{n+1}{2}$(Case 1) または $\frac{n}{2}$(Case 2) に収束する. この極限を ξ と呼ぼう. どちらにしても明らかに $\xi = \frac{1}{2}[x]$ である.

Case 1 と Case 2 の場合分けにしたがって,$\{s_p\}$ の極限を調べよう.

Case 1　すべての p について $N_p = n+1$. これは $r_{\alpha(p)} < (n+1) - \frac{1}{2^p}$ が決して生じない, ということである. ゆえに $x \geq n+1$. $x < n+2$ でかつ $x \geq n+1$ であるから, $[x] = n+1$. したがって,$\{s_p\} = \{\frac{n+1}{2}\}$ は $\frac{1}{2}[x]$ に収束する.

Case 2　ある p について $N_p = n$（したがって $q \geq p$ について $N_q = n$). これは $r_{\alpha(p)} < (n+1) - \frac{1}{2^p}$ ということであり, したがって $x < n+1$. $n < x$ で

かつ $x < n+1$ であるから, $[x] = n$ であり,$\{s_p\} = \{\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}, \cdots, \frac{n}{2}, \frac{n}{2}, \cdots\}$. ゆえに,$\{s_p\}$ は $\frac{1}{2}[x]$ に収束する.

いずれにしても再帰的な有理数の単調収束列 $\{s_p\}$ を得, それが計算可能な実数（実際には有理数）$\frac{1}{2}[x]$ に収束する. 極限値が計算可能な実数であることにより, 収束は実効的である（Proposition 2,Chapter 0, [3] による）.

4　計算過程についての考察

3 節の計算手続きで問題になるのは, $g(x)$ の近似列の求め方とその近似率が,Case 1 と Case 2 においてどのように異なるか, ということである. $g(x)$ に特化した計算についていえば, 整数列 $\{N_p\}$ および有理数の近似列 $\{s_p\}$ の求め方は場合分けに依存せず, 各 p における値は再帰的に計算できる. ただし値は場合分けにしたがって異なり, 場合分けのどちらが実際に起こるかは, あらかじめ判定できない（5 節に解説）.

他方,Case 1 と Case 2 のどちらかで計算は進んでいて, 確実に正しい値 $g(x)$ に近づいているのである. このとき再帰的な収束率として, Case 1 の場合には $\beta_1(p) \equiv 1$, Case 2 の場合には $\beta_2(p) \equiv \mu q(r_{\alpha(q)} < (n+1) - \frac{1}{2^q})$ を採用すればよい（μq は最小値作用素）. すなわち一方の内部では計算が進み, 近似率も計算できている.

では, 何が問題か ?上述のように, 最終的にどちらのケースになるかを, 計算の外にいる我々には判定できない, という事態である. すなわち,N_p がいつまでも $n+1$ であるのか（Case 1）, ある時点で n になるのか（Case 2）, それにしたがって s_p の値が不変なのか変化するのか, ということが一般には有限ステップでは判明しないことである. したがって近似率がどれなのか, 認識できないのである.

5　計算の論理的分析

前節の問題点を考慮して, 3 節の計算手続きの論理的な分析をしよう.

論理的構造　3 節の手続きの論理的な構造は次のようになっている. $R(p) \equiv r_{\alpha(p)} < n - \frac{1}{2^p}$ とおくと, $R(p)$ は再帰的な関係である. Case 1 は $\forall p \neg R(p)$, Case 2 は $\exists p R(p)$ と表される. 古典的には $\forall p \neg R(p) \vee \exists p R(p)$ が成り立つが, $\forall p \neg R(p)$ と $\exists p R(p)$ のどちらが成り立つかは, 一般に再帰的に判定できない.

R が再帰的なときに $\forall p \neg R(p) \vee \exists p R(p)$ の形の論理式は Σ^0_1 -排中律と呼ばれる. 4 節の考察をこの排中律を使って表現するならば, 3 節の関数 $g(x) = \frac{1}{2}[x]$ の計算過程は, Σ^0_1 -排中律に相対的に再帰的である, といえる.

入力– 出力の関係　上記の手続きはまた入力, 出力が異なった型のものである, ということができる. すなわち, 入力は $\langle r_m, \alpha \rangle$ の形で,$\{r_m\}$ も α も再帰的

である．出力は再帰的有理数列 $\{s_p\}$ のみである．4 節で得た β_1 と β_2 はどちらも再帰的であるが，そのうちのどちらであるかを決定できないので出力はできない．あえて出力したければ，計算機構として β_1 か β_2 のどちらかを判定する非決定的なアルゴリズムを認めなければならない．その上でならば $\langle s_p,\beta\rangle$ という出力を得ることができる．このとき β は一般に再帰的ではない．ではどのような範疇に入るのであろうか ?その一つの解が以下に述べる極限再帰的汎関数の利用である．

とくに、$g(x)$ に対する上述の β が再帰的ではありえないことは，ガウス関数が列計算可能でないことを示せばよい．すなわち $\{x_n\}$ が計算可能な実数列で,$\{[x_n]\}$ がそうでない例を与えることができる．このことから β が実際に再帰的にはとれないことが容易に示される．反例は Section 1,[9] にあり，典型的な方法であるので，ここでは省略する．

6　極限計算

[1] において Gold は自然数上の関数について極限再帰性（*limiting recursion*）という概念を定義した．すなわち再帰的関数 $h(p,n)$ が n に関してあるところから先定数になるときに，その定数値をとる（部分的）関数 $\eta(p)=\lim_n h(p,n)$ を極限再帰的とよぶ．（$\lim_n h(p,n)=\eta(p)$ は $\exists n\forall m\geq n(h(p,m)=\eta(p))$ を表す．）Gold はさらにこの概念を極限再帰的汎関数に拡張した．

定義 6.1 ([1]:Gold) (1) 数論的関数と自然数を引数にとり，自然数を値として返す（部分的）写像を（部分的）汎関数とよぶ．

簡単のために汎関数 F は引数として関数 ϕ と自然数 p をもつものとする．また，再帰的関数のみを引数 ϕ としてとることにする．汎関数 $F(\phi,p)$ が極限再帰的汎関数であるとは，ある再帰的関数 $h(z,p,n)$ について，次のことが成り立つときである :ϕ と $p\in\mathbf{N}$ について，

$$F(\phi,p)=\lim_n h(\tilde{\phi}(n),p,n).$$

（$\tilde{\phi}(n)$ は有限列 $\langle\phi(0,p),\phi(1,p),\cdots,\phi(n,p)\rangle$ のコードをあらわす．）

上記の等式で定義される F が極限再帰的とは,ϕ の有限情報によって h の値を計算し続けるときに，ある時点から値が定常的になれば，それを極限値とみなす，ということである．

ここでは実際に使う極限再帰的汎関数として Lim のみを例にあげる．
例 (Section 4,[9])

$$Lim(\phi,p)=\lim_n \phi(n,p)$$

ϕ を再帰的関数に限定したとき Lim は極限再帰的汎関数である．

Lim を使って, 実数上の関数 $g(x)$ の計算を続けよう. (Section 4,[9] における $[x]$ の計算に習う.)

最初のように $\langle r_m, \alpha \rangle$ が x を近似するものとする. 3 節の計算手続き **1,2,3** により, $x \simeq \langle r_m, \alpha \rangle$ に対して,$n, \{N_p\}, \{s_p\}$ を得たとする.

4. $\{N_p\}$ の極限値によって,Case 1 であるか Case 2 であるかを判定する: $l = Lim(\{N_p\}) = n+1$ であれば Case 1, したがって $\beta(p) \equiv 1$, $l = Lim(\{N_p\}) = n$ であれば Case 2, したがって $\beta(p) \equiv \mu_q(r_{\alpha(q)} < n+1-\frac{1}{2^q})$, によって関数 β を求める.β は $Lim(\{N_p\})$ に依存して計算される.

5. $\langle s_p, \beta \rangle$ を出力する. これが $g(x) = \frac{1}{2}[x]$ を近似する.

$g(x)$ のような関数を極限計算可能な関数と呼ぶことにする.

注　上の計算手続きは実数列にも同じように適用できる. 詳細は略すが, この事実が成り立って初めて $g(x)$ の計算が (Lim に相対的に) 可能であることが保障される. 1 個の値ではもともと $g(x)$ の値が有理数なので, それが計算可能実数であることは当然なのである. 計算可能とは,x から x における関数値 $g(x)$ を求める一般的な手続きがあることである. (この点が誤解されやすいが, 重要な事項である.) 入力の列 $\{x_i\}$ に対して $\{g(x_i)\}$ の計算手続きがあれば, 入力に対して一様な計算方法があることになる。

極限計算による計算の他の例は Section 4,[9] にある.

7　極限計算の意義と問題点

極限計算による (不連続点における) 関数値の計算は, 素朴な計算手続きにおける (Σ^0_1-排中律による場合分けという論理的な現象のために) 再帰性を超える部分に, 極限における関数 (整数列) の挙動の計算による解釈を与えた, といってよい.

極限計算とは, 数論的関数がある時点から定数値になる場合にその定数値を出力することである. 実際にいつかは定数になる関数であれば出力はあるが, いつその値に到達するか予測できないだけでなく, 今の値がその極限値であるかどうかということも, 一般にはわからない. しかしこのような場合には, 我々は知らずにいても, 正しい値に到達しているのである.

数学的には, 極限計算を実現する関数族の理論 [2] などがあり, 極限計算の理論的意義に問題はない. また, 古典的な立場では、$\{N_p\}$ の極限は必ず存在するのであって, その情報に基づく計算を正当化することにも問題はない. 極限計算により, 分岐する二つの道 (場合分け) のどちらかで計算が進み, 正しい答えに到達する, という現象を, 計算という概念で統一的に表現できることには, 大きな意義がある.

本論ではジャンプ点が整数で, 関数値が整数の半分という簡単な例を扱っているのでその意義が多少見えにくいかもしれない. 一般にはジャンプ点が計算可能な実数列であり, ジャンプ点の間の区間で関数値が変動する場合にも,

極限計算の手法を使って上記と同様に計算を進めることができる. たとえば $\frac{2n+1}{2}\pi < x < \frac{2n+3}{2}\pi$ のとき $\tau(x) = \tan x$，$\tau(\frac{2n+3}{2}) = 0$ によって定義される関数 τ は,Lim によって極限計算ができる（Example 7,Section 4,[9]）.

3 節と 6 節における計算過程の問題点は, たとえば $g(x)$ のようにジャンプ点 k での値（$g(k) = \frac{k}{2}$）を, 人は直接計算できる, という現象を表現できていない. すなわち, 任意の引数 x について一様に計算手続きを与えようとする場合に, x が実際には整数 k であっても, そのことを決定できない.（$x = k$ は一般に再帰的に判定できない.）

この現象の記述のために, 実数空間の位相を変えて一様空間とみなす手法がある. すなわち, 整数と整数間の開区間を分離した位相を定義すると, $g(x)$ のような関数が連続関数になる. したがって $g(x)$ の計算はある種の一様空間における連続関数の計算問題になる（[4] 参照）. 整数と整数でない実数の位相的分離はちょうど整数型と実数型の分離に対応し, 人の素朴な認識にも合致する. ただしそのためには, 実効的一様空間, そこにおける計算可能な要素, および連続関数の計算可能性, という新しい理論を展開しなければならない. 極限計算は素朴な計算手続きで統一できる, という利点がある.

最終コメントとして, 実数上の（不連続）関数について, ある（自然な）制限のもとでは, 極限計算によって点列計算可能（計算可能な実数列の関数値は計算可能な実数列になる）であることと, 対応する一様空間における関数とみたときに点列計算可能になることとは同値になる（[10]）. したがってどちらを採用するか, は, 不連続関数の計算をどの観点から見たいか, という目的による.

謝辞　連続体上の計算可能性問題について, 共同研究およびセミナー等を通して著者を啓発してくださった、基盤研究（B) の研究分担者および Computable-Analysis セミナーの皆様に謝意を表します.

参考文献

[1] E.M. Gold, *Limiting recursion*, JSL, 30-1(1965), 28-48.

[2] M. Nakata and S. Hayashi, *A limiting first order realizability interpretation*, SCMJ Online, vol.5(2001), 421-434.

[3] Marian B. Pour-El and J. Ian Richards, *Computability in Analysis and Physics*, Springer-Verlag(1989).

[4] Yoshiki Tsujii, Mariko Yasugi and Takakazu Mori, *Some properties of the effective uniform topological space*, Computability and Complexity in Analysis, LNCS 2064, (2001), Springer, 336-356.

[5] M. Washihara, *Computability and Fréchetspace*, Mathematica Japonica, 42 (1995), 1-13.

[6] M. Washihara, *Computability and tempered distributions*, ibid., 50, 1 (1999), 1-7.

[7] M. Washihara and M. Yasugi, *Computability and metrics in a Fréchet space*, ibid., 43 (1996), 1-13

[8] K. Weihrauch, *Computable Analysis*, Springer, 2000.

[9] M. Yasugi, V. Brattka and M. Washihara, *Computability aspects of some discontinuous functions*, SCMJ Online, 5(2001),405-419.

[10] M. Yasugi and Y. Tsujii, *Two notions of sequential computability of a function with jumps*, ENTCS 66,No.1(2002), 11 pages: http://www.elsevier.nl/locate/ entcs/volume66.html.

[11] 八杉満利子 ・鷲原雅子解析学における計算可能性構造, 数学 1998.

[12] M.Yasugi and M.Washihara, *Computability structures in analysis*, Sugaku Expositions (AMS), 13(2000), 215-235.