自然演繹の体系と古典論理の計算機構

京都産業大学 理学部　　八杉満利子
yasugi@cc.kyoto-su.ac.jp

平成 10 年 6 月 9 日

1　序章

参考文献 [2] で、一階古典述語論理の新しい体系 **NDK** を提案した。それは構成的自然演繹の体系 NJ の拡張で、各推論を和結論の任意の構成要素に適用できるのが特徴である。これにより NDK は古典論理になる。このような体系の導入の目的はいくつかある。

(1) 古典的体系の導入のアルゴリズムの研究には、伝統的な体系 NK のように公理 (排中律) を持つものよりも、推論だけの体系の方が都合が良い。また LK のようなシークェント ・ベースの体系のカット除去では、 「計算」過程がはっきりしないが、自然演繹における縮約は 「計算」を表現する。

(2) 多くのケースで NDK における証明の方が NK や LK よりも簡潔であり、見やすい。

(3) NDK と LK の間には、美しい相互関係がある。NK では、公理の存在のために、直接的な関係が分かりにくい。

(4) NJ に関する理論を自然に NDK に拡張できる。

提案した研究で実際に実行されたこと、継続的なことなどは下記の通りである。

(1) NDK の [2] からの改良

(2) 多くの例について NDK,NK,LK での証明の比較、カット除去と縮約の例

(3) NDK と NK の同値性の証明の改良。これにより、NDK の推論のうち 「自然な推論」と 「不自然な推論」が区別できる。

(4) ワンのアルゴリズムの一般化

(5) NDK における証明の中での、論理式間の関係の定義 (irrelevant な式、critical な推論などの概念)

(6) critical な推論の除去。この結果として定理の自動証明から 「人にとっての自然な証明」を実現できる。これは、[1] における 「大芝プロジェクト」の NDK における実現になっている。すなわち、NDK の証明から 「不自然な」推論を除き、もとの証明の構造を保存し場合分けの証明になっているものを得る変換の手続きを定義した。

(7) NDK のアルゴリズムを実現する項の体系の提案。

(8) NDK 証明に関する諸プログラミング。

今後の課題も多い。

(1) NDK 証明の 「自然化」過程でのカット除去。

(2) NDK での形式化された算術のアルゴリズムと、有限型の計算可能汎関数の直接的対応。

(3) NDK の二階論理への拡張 NDK^2の形式化、及び LK の二階体系 LK^2

と NDK^2の相互関係。
（4 ）LK^2の部分体系で、還元法技術が確立しているものについて対応する NDK^2の部分体系と項体系の直接的関係、これにより、順序数なし証明論を実行できる。

研究活動及び経費活用は下記の通りである。なお経費収支について詳細は別紙の通りである。

コンピュータ、ソフトウェア、周辺機器に関しては、日本語対応 Windows95 の普及を待って購入した。これにより研究ノート及び資料作成、計算、研究連絡などの能率が格段に上った。アルバイトの代謝金により、研究室のコンピュータの環境設備、論文及び報告書入力、資料作成、プログラミングなど多忙中の研究補助を得て、支障なく研究を続行できた。
海外渡航は、当初論理体系と項体系の関連び研究連絡のために、フランスに行く予定であったが、多忙のために双方の都合が合わなかった。
五月に諮問委員を務める「第６回アジア論理会議」が北京で開催された。そこで５０分の招待講演を依頼された。渡航費は、この会議出席に振り替えた。招待講演で本研究を紹介し、好評であった。会議の論文集が World Scientific から出版される予定なので、本研究の成果を投稿する準備をしている。ワークショップとしては５人の講師を逐次招待して、小人数自由討論中心のセミナー形式で行なった。講師、テーマ、本研究への貢献などは、下記の通りである。

平成７年９月１１日　洪 妊植　(日本大学）
解析と論理
論理及びアルゴリズムに関心をもつ解析学者と形式的体系のもつアルゴリズム及び解析学の基礎としての論理体系の構造の研究について討論した。論理学の外の視点からの意見は貴重であった。

平成８年５月８日　古森 雄一　(静岡大学）
パース型の縮約
NJ にパースの公理を加えると、NK と同等になるが、NK におけるパースの公理の証明はかなり複雑で意味を把握しにくい。NDK における証明は、NDK の特性を示す良い例となった。また、パース型の縮約は NDK の縮約及び対応する項体系の定義に具体的な示唆を与えた。

平成８年６月６日　中野 浩　(龍谷大学）
キャッチ＆スローの論理
NJ と同値ではあるが、いくつかの推論規則を加えることによって、LISP に

おけるキャッチとスローを表現できるようにした体系の紹介。これは実質構成的体系ではあるが、証明の多様性をとり入れていれていること、例外処理が実現できること、すべての論理結合子に対応する項体系を設定していることなど研究内容は本研究の参考になることが多い。逆に本研究の理論の特殊な場合として中野氏の理論を扱うことができるのではないかと考える。

平成８年６月２７日　大芝　猛　(椙山女学園大学)
自動証明と自然な証明
大芝氏はLKの枠組みで、「機械的に作りやすい証明から、人にとって自然な証明を、本質を変えることなく得る手続き」をあるメタ定理を使って定義した。本研究では、同様のことをNDKの枠組みで全く手続き的変換を定義している。大芝氏とは、これ以前にも互いに訪問し合って、研究連絡を行なってきた。上記のこと以外にも、いろいろな問題提義を受けた。

平成８年６月２８日　小林　聡　(龍谷大学)様相論理とモナド構成的様相論理のモナドによる解釈、この一年間本研究を支援して下さった財団法人大川情報通信基金に感謝します。構成的論理を超える論理体系の考察は、示唆に富むものであった。とくに論理和の項解釈は、NDKの項の解釈の参考になった。大体同じ方針で扱えると思う。

2 NDK

NDK は、NJ の拡張である。A,B,$\cdots$ は論理式 (式 と 略)、$\Gamma, \Delta, \cdots$ は論理式の有限列 (空列を含む) を表す。式 A の部分式 B が A の disjunctive component とは、A の構成において、B の外に $\vee$ 以外の論理結合子が使用されないことである。

例 $A \equiv (X \vee Y) \vee Z$ の disjunctive components は $A, X \vee Y, X, Y, Z$ である。($Y \vee Z$ は部分式でないから disjunctive component ではない。)
NDK は公理を持たない。推論は、NJ の各推論の一般化である。各論理結合子について導入 (I) と除去 (E) がある。いくつか例を挙げる。なお、ラベル i を持つ assumption の discharge はその推論の横に (i) と書いて示す。

$$\frac{\begin{array}{c}[A:i]\\ \vdots \\ B \vee C \vee D\end{array}}{B \vee (A \supset C) \vee D}\ (i) \supset -I$$

$$\frac{\Gamma \vee A_1 \vee \Delta \quad \Gamma \vee A_2 \vee \Delta}{\Gamma_1 \vee (A_1 \wedge A_2) \vee \Gamma_2}\ \wedge -I$$

$$\frac{\begin{array}{c}[A:i]\\ \vdots \\ \Gamma \vee \Delta\end{array}}{\Gamma \vee \neg A \vee \Delta}\ (i)\neg -I$$

$$\frac{\Delta_1 \vee A \vee \Delta_2 \quad \Gamma_1 \vee \neg A \vee \Gamma_2}{\Delta_1 \vee \Gamma_1 \vee \Delta_2 \vee \Gamma_2}\ \neg -E$$

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots \\ \phi\end{array}}{A}\ Contradiction$$

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots \\ \Gamma \vee F \vee \Delta\end{array}}{\Gamma \vee \forall x F \vee \Delta}\ \forall -I$$

(Eigenvariable Condition)

$$\frac{\Gamma \vee \exists x F \vee \Delta \qquad \begin{array}{c}[F:i]\\ \vdots \\ D\end{array}}{\Gamma \vee D \vee \Delta}\ (i)\exists -E$$

ここで、Contradiction における ϕ の記号は実際には空結論を表す。空結論は、$\neg - E$ で A と $\neg A$ 以外は空である時に得られる。また、$\exists - E$ では、D に x の自由出現がなく、$\forall - I$ では、assumption と Γ, Δ に x の自由出現がない、という固有変数条件を設定する。証明 (演繹) の定義は、NJ の場合と同じである。

NK が NDK の部分体系であることは、

$$\frac{[A:i]}{A \vee \neg A}\ (i)\neg - I$$

によって、NK の公理が導かれるから明らかである。
NDK が NK に翻訳されることを、いくつかの簡単化された例で示す。この方法は、[YR] の Proposition 2 より改良されている。

NDK

$$\frac{A \vee \forall x F}{A \vee F[t/x]}\ \forall - E$$

NK

$$\frac{A \vee \forall x F \quad \dfrac{[A:1]}{A \vee F[t/x]} \quad \dfrac{\dfrac{[\forall x F:2]}{F[t/x]}}{A \vee F[t/x]}}{A \vee F[t/x]}\ (1,2) \vee - E$$

NDK

$$\frac{B \vee A \quad B \vee \neg A}{B}\ \neg - E$$

NK

$$\frac{B \vee \neg A \quad \dfrac{B \vee A \quad [B:3] \quad \dfrac{[A:1] \quad [\neg A:2]}{\dfrac{\phi}{B}}\ \neg - E}{[B:4] \quad B}\ (3,1) \vee - E}{B}\ (4,2) \vee - E$$

NDK

$$\frac{\begin{array}{c}[A:1] \\ \vdots \\ C \vee B\end{array}}{C \vee (A \supset B)}\ (1) \supset - I$$

一般に

$$\begin{array}{cc} X \vee B & \neg X \\ \vdots & \\ B & \end{array}$$

が、NK で (排中律なしで) 導かれる。

$$\dfrac{X \vee B \quad \begin{array}{c}[B:2]\\ \vdots \\ B\end{array} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[X:1]\\ \vdots \\ \phi\end{array} \quad \neg X}{B}}{B}\ (1,2)$$

これを使って、上の証明を NK で行なう。

$$\dfrac{C \vee \neg C \quad \dfrac{[C:3]}{C \vee (A \supset B)} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}[A:1]\\ \vdots \\ C \vee B\end{array} \quad \begin{array}{c}[\neg C:2]\\ \vdots \\ B\end{array}}{A \supset B}\ (1)\ \supset -I}{C \vee (A \supset B)}\ (3,2)\ \vee -E$$

C に関する排中律を使っていることに注意。
$\forall - I$ の場合も同様である。
正確には、$\supset -I$ と $\forall - I$ の変換には排中律を必要とするが、他の推論については排中律は不要である。後者の各推論は、NDK における形式化そのものが、「自然」である。したがって、「人にとって自然な」証明への変換というとき、これらは変換せずに残すことにする。

3　証明の比較の例

NDK における証明の記法の簡略化のために、$\dfrac{A \vee A \quad [A][A]}{A}$ を補助推論 Contraction で置き換える。

$$\frac{A \vee A}{A}\ Contraction$$

例 1 パースの公理

Peirce Axiom

$$((A \supset B) \supset A) \supset A$$

NDK

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A:1]}{A \vee B}}{A \vee (A \supset B)}\ (1) \quad [(A \supset B) \supset A : 1]}{\dfrac{A \vee A}{A}\ Contraction}\ \supset -E$$

NK

$$\dfrac{A \vee \neg A \quad \dfrac{\dfrac{[A:4] \quad [\neg A:5]}{\dfrac{\dfrac{\phi}{B}}{A \supset B}}}{A \vee (A \supset B)}\ (4) \quad \dfrac{\dfrac{[A:1]}{A \vee B} \quad \dfrac{[A:2]}{A \vee (A \supset B)} \quad \dfrac{\dfrac{[B:3]}{A \supset B}}{A \vee (A \supset B)}\ (2,3)}{A \vee (A \supset B)}\ (5,1)}{A \vee (A \supset B)}$$

Π

$$\dfrac{A \vee (A \supset B) \quad [A:7] \quad \dfrac{[A \supset B : 6] \quad [(A \supset B) \supset A : 8]}{A}\ (7,6)}{A}$$

例 2

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A:1]}{A \vee \neg A}\,(1)}{\exists x A \vee \neg A}}{\exists x A \vee \exists x \neg A}$$

$$\dfrac{A \vee \neg A \qquad \dfrac{\dfrac{[A:1]}{\exists x A}}{\exists x A \vee \exists x \neg A} \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg A:2]}{\exists x \neg A}}{\exists x A \vee \exists x \neg A}\,(1,2)}{\exists x A \vee \exists x \neg A}$$

例 3

パースの公理の LK における証明

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{1 \quad A \Rightarrow A}{A \Rightarrow A, B}}{\Rightarrow A, A \supset B} \qquad (A \supset B) \supset A, \quad \begin{array}{c}\vdots\\ A \supset B \Rightarrow A\end{array}}{(A \supset B) \supset A \Rightarrow A, A}}{(A \supset B) \supset A \Rightarrow A}\; cut(A \supset B)$$

カットを除去した結果。

cut-free

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{1 \quad A \Rightarrow A}{A \Rightarrow A, B}}{\Rightarrow A, A \supset B} \qquad A \Rightarrow A}{(A \supset B) \supset A \Rightarrow A, A}}{(A \supset B) \supset A \Rightarrow A}$$

これを NDK 戻すと、例 1 の証明になる。

4　ワンのアルゴリズム

NDK におけるワンのアルゴリズムは [YR] の 4 節で扱われているが、命題を次のように一般化された形で述べることが出来る。

$$\frac{[B_1]\cdots[B_n]}{F}$$

という図形をシークエントと呼ぶことにする。ここで $[B_1]\cdots[B_n]$ を assumption, F を conclusion という。一つのシークエントから始めて分解を適用し、分解の木を作ることが出来る。分解の木の各枝の終端 シークエントが、assumption と conclusion の disjunctive component に変数を共有するか どうかで、最初のシークエントの恒真性が判定できる。恒真なときは assumption から conclusion を得る証明を作ることが出来る。
例

Tree-forming

$$\frac{[\neg(\neg A\wedge\neg B):1]}{A\vee B}\Longrightarrow\overline{(A\vee B)\vee(\neg A\wedge\neg B)}\ \neg-E$$

$$\Longrightarrow\overline{(A\vee B)\vee\neg A}\ ;\ \overline{(A\vee B)\vee\neg B}$$

$$\frac{\begin{array}{c}[A:2]\\ \Downarrow\\ A\vee B\end{array}}{\neg-I}\qquad\frac{\begin{array}{c}[B:3]\\ \Downarrow\\ A\vee B\end{array}}{\neg-I}$$

これは恒真のケースである。証明は下記のようになる。

Deduction - forming

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A:2]}{A\vee B}}{(A\vee B)\vee\neg A}\ (2)\quad\dfrac{\dfrac{[B:3]}{A\vee B}}{(A\vee B)\vee\neg B}\ (3)}{\dfrac{(A\vee B)\vee(\neg A\wedge\neg B)\quad[\neg(\neg A\wedge\neg B):1]}{A\vee B}}$$

5　排中律型公理と Critical な推論

論理式 E と F が否定双対である, とは、実質 F が E の否定またはその逆になっていることであるが、例えば $\forall x B$ と $\exists x \neg B$ のように否定の同値な変形も認めることにする。このとき $E \vee F$ を、排中律型の公理という。$E \vee F$ はもちろん NK で証明できるが、これ自体が 人にとって自明な恒真式であるから、公理として認めてしまう。というのが [OS] における立場である。我々もこの方針を採用する。NDK に排中律型公理を加えた体系を NDKE と書く。これは実質的に NDK　(したがって NK) と同値である。一つの NDK-証明 P を固定したとき、P の中の disjunctive components の間の祖先-子孫の関係を、自然な論理の流れのつながりとして 定義する。一つの disjunctive component C が irrelevant とは、C の最上部終端の祖先の一つが、$\vee - I$ で新しく導入された component のときである。このような component に $\supset - I$ が適用されるとき、この $\supset - I$ を critical な推論という。($\neg - I$ は常に critical とみなす。)
まずしたいことは、critical な推論の除去である。そのために証明 P の複雑さのスケール rank(P) を定義する。
β を P の中の一つの path, すなわち P の結論の component から祖先へとたどって行き、終端の祖先に到達する論理式の列 とする。r_β は、path β 沿いにある。critical な推論の個数とする。

$$rank(P) := \sum_{\beta : path} r_\beta$$

rank(P) を減少させるような P の変形を定義する。

6　予備変換

まず予備変換として次の状況を考える。
1 型

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathrm{I}\\ [A : n]\\ \vdots\\ \Gamma \vee C \vee \Delta\end{array}}{\Gamma \vee (A \supset C) \vee \Delta}\ (n) \supset -I$$

こしで Γ または Δ および C が ともに irrelevant でないとする。そのような最下段の推論を I とする。
2 型

$$\dfrac{\begin{array}{c}\mathrm{I}\\ \vdots\\ \Gamma \vee F \vee \Delta\end{array}}{\Gamma \vee \forall x F \vee \Delta}$$

1 型と同じ状況とする。

これらの時には セクション 2 の $\supset -I$ の変換と同様のこととする。それぞれが減少し、最終的に これらのケースは除くことが出来る。
以下 1 型、2 型 のない証明を新しく導入されることはない。

7　変換アルゴリズム

critical 推論を除くための補助定理を示す。

補助１、NDKE の証明 P の結論 $\Gamma \vee G\Delta$ において、G が irrelevant component とする。このとき $\Gamma \vee \Delta$ の証明で、次の条件を満たす P^* を構成できる。
(i) P^* の assumption は D の assumption の一部および E である。ただし、E は G の祖先に適用された critical 推論の assumption の論理積にいくつか $\forall x$ を前提にしたものである。
(ii) P^* は P から G の祖先に適用された推論を除き、E に加えて得られる。
したがって $rank(P) > 0$ のとき、

$$rank(P^*) < rank(P)$$

P^* は、$\vee - I$ で導入された G の終端祖先から下の推論の個数に関する帰納法で構成される。

例

$$P$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A(x):1]}{\exists x A(x)} \quad \dfrac{[B(y):2]}{\exists x A(x) \supset B(y)}}{B(y)}}{B(y) \vee C}}{B(y) \vee (B(y) \supset C)}\ (2)}{B(y) \vee \exists y (B(y) \supset C)}}{\forall y B(y) \vee \exists y (B(y) \supset C)}}{\forall y B(y) \vee (A(x) \supset \exists y (B(y) \supset C))}\ (1)$$

$$P^*$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall y (A(x) \wedge B(y)) : 3]}{A(x) \wedge B(y)}}{A(x)}}{\exists x A(x)} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall y (A(x) \wedge B(y)) : 3]}{A(x) \wedge B(y)}}{B(y)}}{\exists x A(x) \supset B(y)}$$

$$\dfrac{B(y)}{\forall y B(y)}$$

critical な推論 I_1 と I_2 が除かれ、discharge されなくなった assumption [A(x)] と [B(y)] の論理積が作られ、固有変数 y について $\forall y$ を前置した $[\forall y(A(x) \wedge B(y)]$ が assumption になっていることに注意。
$\Gamma \vee G \vee \Delta$ が P の中の式であって、G は irrelevant とする。$\Gamma \vee G \vee \Delta$ を結論とする P の部分証明を Q とする。rank(Q) ¿ 0 であるような Q で、$\Gamma \vee G \vee \Delta$ が最下のものをとる。補題 1 より

$$\begin{array}{c} [E] \\ \vdots \\ \Gamma \vee \Delta \end{array}$$

で、条件 (1) と (2) を満たすものがある。$\vee - I$ または contradiction によって G を導入し、P をコピーする。

$$\begin{array}{c} R_1 \\ \\ [E] \\ \vdots \\ \dfrac{\Gamma \vee \Delta}{\Gamma \vee G \vee \Delta} \\ \vdots \\ H \end{array}$$

ただし、H は P の結論である。$\Gamma \vee G \vee \Delta$ の下で、G の子孫は irrelevant でなくなるので、critical 推論はない。 E に自由出現する固有変数を、使用される順序で $x_1, x_2, \cdots, x_m$ とすると、R_1 より

$$\begin{array}{c} P_1 \\ \\ \dfrac{[\forall x_{m-1} \cdots \forall x_1 E : n]}{\forall x_{m-1} \cdots \forall x_1 E}\ \forall - E \\ \vdots \\ E \\ \vdots \\ \dfrac{\Gamma \vee \Delta}{\Gamma \vee G \vee \Delta} \\ \vdots \\ H \end{array}$$

$$rank(P_1) > rank(P)$$

帰納法の仮定により P_1 は critical 推論をもたない P_1^* に変換できる。
補題 2、補題 1 と同じ条件のもとで次のような G の証明 P^{**} を構成できる

(i) P^{**} の assumption は E の双対 E' である。
(ii) P^{**} は P において G を得る。推論を適用して得られる。critical 推論はない。G は irrelevant ではない。
例 前出 の P について

$$P^{**}$$

$$\dfrac{\dfrac{[\neg A(x) \vee \neg B(y) : 8] \quad \dfrac{\dfrac{[A(x) : 4] \quad [\neg A(x) : 5]}{\phi}}{\exists y(B(y) \supset C)}}{A(x) \supset \exists y(B(y) \supset C)}\ (4) \quad \dfrac{\dfrac{[B(y) : 6] \quad [\neg B(y) : 7]}{\dfrac{\phi}{C}}}{B(y) \supset C}\ (6) \quad \vdots \quad A(x) \supset \exists y(B(y) \supset C)}{\dfrac{[\exists y(\neg A(x) \vee \neg B(y)) : 9] \quad A(x) \supset \exists y(B(y) \supset C)}{A(x) \supset \exists y(B(y) \supset C)}\ (8)}$$

補題 2 より

$$\begin{array}{c} \mathrm{Q} \\ [E'] \\ \vdots \\ G \end{array}$$

この下に適宜 component を加えて、 G を含む式への推論の適用を行なう。それ以外の component は最後に導入する。これを

$$\begin{array}{c} R_2 \\ [E'] \\ \vdots \\ G \\ \vdots \\ H \end{array}$$

とする。R_1 と同様に $x_1, x_2, \cdots, x_m$ に着目して、

$$\begin{array}{c} P_2 \\ \vdots \\ [\exists x_m \cdots \exists x_1 E'] \\ \vdots \\ H \end{array}$$

を得る。 $rank(P_2) < rank(P)$ であるから critical 推論を含まない NDKE 証明 P_2^* に変換できる。最後に、

$$\dfrac{\forall x_m \cdots \forall x_1 E \vee \exists x_m \cdots \exists x_1 E' \qquad \begin{array}{c} [\forall x_m \cdots \forall x_1 E] \\ \vdots \\ H \end{array} \qquad \begin{array}{c} P_1^* \\ \\ P_2^* \\ \\ [\exists x_m \cdots \exists x_1 E'] \\ \vdots \\ H \end{array}}{H}$$

を得る。
次に irrelevant な component に $\forall - I$ が適用される場合を考える。
３型

$$\dfrac{\begin{array}{c} \vdots \\ \Gamma \vee F \vee Delta \\ \vdots \end{array}}{\Gamma \vee \forall x F \vee \Delta} \ \forall - I$$

$\forall x F$ の子孫で irrelevant な最下式を$\Gamma' \vee F' \vee \Delta'$ とする。F' が $\forall x F$の子孫とする。補題１により

$$\dfrac{\begin{array}{c} [E] \\ \vdots \\ \Gamma' \vee \Delta' \end{array}}{\Gamma' \vee F' \vee \Delta'}$$

補題２により

$$\begin{array}{c} [E'] \\ \vdots \\ F' \end{array}$$

以下、critical 推論と同様の手続きを実行する。３型が減少し、ここで１型、２型 critical 推論が導入されることはない。

以上で扱われないケースは　自然な」推論と考える。

8　変換例

(1) [OS] の例

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[P(b):1]}{P(b)\supset P(c)}\vee -I}{P(b)\vee(P(b)\supset P(c))}(1)}{(P(a)\supset P(b))\vee(P(b)\supset P(c))}}{(P(a)\supset P(b))\vee\forall y(P(b)\supset P(y))}}{(P(a)\supset P(b))\vee\exists x\forall y(P(x)\supset P(y))}}{\forall y(P(a)\supset P(y))\vee\exists x\forall y(P(x)\supset P(y))}}{\exists x\forall y(P(x)\supset P(y))\vee\exists x\forall y(P(x)\supset P(y))}}{\exists x\forall y(P(x)\supset P(y))}\ Contraction$$

$$\dfrac{\dfrac{[P(b):1]}{P(a)\supset P(b)}\quad\vdots}{\exists x\forall y(P(x)\supset P(y))}\ \Rightarrow\ \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall zP(z):1]}{P(b)}}{P(a)\supset P(b)}\quad\vdots}{\exists x\forall y(P(x)\supset P(y))}$$

$$\dfrac{[\exists z\neg P(z):4]\quad\exists x\forall y(P(x)\supset P(y))}{\exists x\forall y(P(x)\supset P(y))}(2)\qquad\dfrac{\dfrac{[\neg P(b):2]\quad[P(b):3]}{\dfrac{\phi}{P(c)}}}{P(b)\supset P(c)}(3)\ \vdots$$

$$\dfrac{\forall zP(z)\vee\exists z\neg P(z)\qquad\begin{matrix}[\forall zP(z):1]\\ \vdots\\ H\end{matrix}\qquad\begin{matrix}[\exists z\neg P(z):4]\\ \vdots\\ H\end{matrix}}{H}(1,4)$$

$$\dfrac{\dfrac{[\forall x(F(x)\vee C)]}{F(x)\vee C}}{\forall xF(x)\vee C}$$

$$\dfrac{C\vee\neg C\quad\dfrac{[C:2]}{\forall xF(x)\vee C}\qquad\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\forall x(F(x)\vee C)]}{F(x)\vee C}\qquad[\neg C:1]}{F(x)}}{\forall xF(x)}}{\forall xF(x)\vee C}\ \forall xF(x)\vee C}(2,1)$$

9　無効子としての critical な推論

以下のような推論を考える。

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[A:1]\\ \vdots\\ B\end{array}}{B \vee C}}{B \vee (A \supset C)}\ (1)$$

[A : 1] 以外の assumption がないとすると、この説明は「A がもし正しいとすれば、B も正しい ;A がもし正しくないならば、C が何であっても $A \supset C$ は正しい。」ということを表現している。したがって、$A \supset C$ は A が正しくない時のみ有効であるが、そのときには C は矛盾であっても同じことである。すなわち推論 I は C の内容を無効にする、無効子 (annihilator) の役割を果たす。

10 参考文献

(1)T,Oshiba, An Approach to Human Reasoning in Automatic Theorem Proving, Jouhou Shori Gakkaishi (in Japanese), vol.35(1994),222-231

(2)M,Yasugi and K.Ryu, NDK, A New Classical System, The Bull of the Inst of Computer Sciences, vol.11(1994),1-25

(3)M,Yasugi, NDK and Natural Reasoning, Manuscript