現実的微積分法

八杉満利子

平成10年 6月 9日

1 はじめに

E. Bishop が ”構成的解析学の基礎” を出版してから３０年近く経った。Bishop は自分の数学的な思想を実現するために、解析学を”構成”という立場から再構築した。([2]、[3]、[4] を参照。) 彼が信じた数学的な対象物は、ある特定の規則にしたがって、有理数から構成されるものに限られる。実数列が Cauchy 列である条件も、厳密である。これらの厳密性によって、Cauchy 列の収束やコンパクト集合上の連続関数の上限、下限の存在などが導かれる。

構成的数学のもうひとつの特徴は、証明手段の限定にある。すなわち、排中律を一般的な原理として認めない。この帰結として、存在命題の証明は、存在すべき対象物を実際に明示する。この制限が他の計算可能解析などと異なる点である。

私は Bishop の理論において、実際の構成よりはその結果としての数学的な構造に、興味をもった。そのために、構成的数学を展開するのに十分な事実を公理として採用し、その上で、どのような論理を使って数学を実行できるかを調べたい、と考えた。　この考え方を、いわゆる微分積分の範囲で実行してみた。

私の発想の基本は、実数について構成的に成立する代数的な性質を、公理として仮定することにある。ただし代数的な性質のみからは、極限の概念は導かれない。したがって、数列の極限値や関数値の上限などを、そのまま表現することはできない。この枠組みで可能なことは、”収束する”とか”上限、下限が定義可能である”などのように、極限を対象物としてではなく概念として扱うことである。しかも、これらはすべて有理数で記述できる。この方針で構築された理論を $\mathcal{R}$ と呼ぶ。

実際には定義も命題も、有理数で決定される区間についての命題として言い替えることができる。他方、有理数に関する基本的な演算（+、・など）や関係（=、<など）は、計算（決定）可能である。すなわち、有理数の入力に対して、これらを計算・判定するアルゴリズムを作ることができる。したがって、古典的数学でも構成的数学でも同じである。

種々の”限定された原理で実行する数学”の主題がアルゴリズムであることを考えれば、上記のように、極限の対象物の代わりにその概念を有理数によって表現することは、実り多いものであると予想される。

実数上の関数はすべての実数（構成的である、なしに関係なく）で定義されているべきものであるが、構成的数学で存在を認められるのは、有理数上の値で全体の諸性質が決まるような滑らかな関数のみである。

理論 $\mathcal{R}$ では、各点における値を問題にするのでなく、有理区間で記述できる性質だけに言及する。その意味でも、構成的な思想にそうものである。また、極限を、”限りなく近づく”という無限の動作の終点としてとらえるのではなく、”任意に（区間で）近似できる”とするこの理論は、”現実的”であるといえる。そのために、$\mathcal{R}$ を”現実的”微積分の理論と呼ぶ。

本稿では、文献[6]にそって、この”現実的”微積分法の概説をしつつ、私がもっているある種の数学の見方を、伝えて行く。なお、概念の解説を主題にするので、命題の証明はつけない。引用文献を参考にしてほしい。

まず”実数”の公理を設定し（2節）、それらから直接導かれる事実を挙げる（3節）。さらに連続関数と、その微分（4節）について、理論 $\mathcal{R}$ で特徴的な事柄を解説する。（積分は省略する。）その際折にふれて、Bishop の結果との対比を説明する。全体として、構成的論理およびアルゴリズムなどについての基本的な知識は、仮定する。

最後に、理論全体を”有理区間解析”として再構築するための試みを、提案する（5節）。この着想は8年程前にさかのぼる。そのときに、愛媛大学の山本哲朗氏にいろいろ教えていただいた。大変遅くなったが、ここで謝辞を送る。

構成的数学については、JAIST の石原哉、Waikato 大学の Douglas Bridges の両氏から教示を受けることが多かった。また、京都産業大学の鷲原雅子さんからは、[6]に関していくつかの助言をいただいた。あわせて、感謝の意を表したい。

2　実数の公理

有理数（整数を部分構造として含む）の演算 $+$、$-$、$\cdot$、$/$ は、よく知られているように、計算のアルゴリズムをもつ。また、有理数に関する関係式 $=$ 、$<$ などは、その真偽を判定するアルゴリズムをもつ。したがってたとえば、3 分法　$r < s \vee r = s \vee r > s$　が構成的に成立する。そのために、有理数についての基本的な関係式に対しては、排中律を使うことができる。正確にいえば、見かけ上排中律 $A \vee \neg A$ であっても、実際には A と $\neg A$ のどちらが正しいかを判定できる。このような事情から、有理数の基本的な算術においては、古典的な事実と構成的な事実の区別はない。

Bishop の世界の実数とは、$\forall m \geq 1 \forall n \geq 1(\mid r_m - r_n \mid \leq m^{-1} + n^{-1})$ を満たす有理数列 (r_k) である。有理数 r は $(r、r、r、\cdots)$ と同一視されるので、有理数全体 $\mathbf{Q}$ は、実数全体 $\mathbf{R}$ に埋め込まれる。

基本演算に関する Bishop の定義は [3] にある。$x = (r_n)$、$y = (s_n)$ とおくと、たとえば

$$x = y \Longleftrightarrow \forall n \geq 1(\mid r_n - s_n \mid \leq 2n^{-1})$$

$$x + y \equiv (r_{2n} + s_{2n});\quad -x \equiv (-r_n);\quad x - y = x + (-y)$$

$x \cdot y \equiv (r_{2kn} \cdot s_{2kn})$　ただし　$k = max(K_x, K_y)$　で、

$K_x = \quad \text{the least integer} \quad K(K > |r_1| + 2)$

$$x > 0 \Longleftrightarrow \exists n \geq 1(r_n > n^{-1});\quad x \geq 0 \Longleftrightarrow \forall n \geq 1(r_n > -n^{-1})$$

$$x \neq y \Longleftrightarrow x > y \quad \text{or} \quad y > x$$

$x \neq 0$ とすると、$\forall n \geq \nu(\mid r_n \mid \geq \nu^{-1})$ となるような正整数 ν を計算できる。　$\xi_n \equiv \quad 1/x_{\nu^3}\ (n < \nu);\ \equiv 1/x_{n\nu^2}\ (n \geq \nu)$ とおいて、　$x^{-1} \equiv (\xi_n)$

以上の定義から、実数の演算や関係について、古典的に成立する多くの性質が導かれる。ここでは、それらを公理とする理論 $\mathcal{R}$ を設定する。詳細は [6] の Definition 1.1 と Definition 1.2 にある。

定義 2.1　シンタックス　*1)* ソート*:* N、Q、R

これらはそれぞれ自然数、有理数、実数の集合（ソート）を表わす。

2) 型 ：ソートは原子型であり、それらをベースにして、述語や関数の型を定義できる。たとえば、$N \to R$ は、実数列の型である。

3) 各種の定記号は、通常の数学での使い方にしたがう。また、N の Q への埋め込み関数に対応する記号も仮定する。

4) 各型の項は、変数や定記号から定義される。そのなかには、実数の演算、数列の有限和、ラムダ抽象による関数の定義、などが含まれる。

5) 論理式は、述語記号と項で作られる原子式から、 論理結合子 ：$\wedge$ 、$\vee$ 、$\neg$、 $\supset$ 、$\forall$、$\exists$ を使って定義される。また、A_1、 $\cdots$、$A_m \Rightarrow B$ は $A_1 \wedge \cdots \wedge A_m \supset B$ の省略形、 $A \Leftrightarrow B$ は $(A \supset B) \wedge (B \supset A)$ の省略形とする。$A \Rightarrow$　は　A から矛盾が導かれるとこを表わす。

限量記号 $\forall$、$\exists$ は、原子型をもつ変数にのみ適用される。

変数または定数を表わす文字の慣用は、以下のとおりである。

$k, l, m, n, ...$: ソート N;　$p, q, r, s, \varepsilon, \delta, ...$:　ソート Q

$a, b, c, x, y, z, ...$:　ソート R;　$f, g, h, ...$: 関数型　($R \to R$ など)

定義 2.2 数学的公理

基本的公理として、次のようなものがある。

各 ソートに関する 等式の公理、 $s = t, A(s) \Rightarrow A(t)$　;N についての公理、たとえば　$+$ の結合律、$<$ が全順序関係であることなど　; Q についての公理、 たとえば $\forall r, s(r < s \Rightarrow \exists t(r < t < s))$; N と Q　の関係、たとえば、任意の有理数を超える自然数の存在や有理数が整数の分数で書けることなど

(グループ R) 実数の算術に関する公理　　以下の公理 $(R-1)-(R-3)$ は、*[3]* の *(2. 6)*、 *(2. 11)*、 *(2. 13)* で証明された事実である。

(R-1) $+$、$\cdot$ における交換律、結合律、分配律 ;0、$1, -$ についての算術

(R-2) $<$、 $\leq$　の性質、　たとえば $x < x \Rightarrow$

$x \leq z$、$y \leq u \Rightarrow x + y \leq z + u$;　$x < y \Rightarrow -x > -y$;　$max\{x, y\} \geq x$

$x \leq y$、$y \leq x \Rightarrow x = y$;　$|x| = max\{x, -x\}$

$x \leq y \Rightarrow max\{x, y\} = y$;　$|x| > y \Rightarrow x > y \vee -x > y$

ここで　$x < y \vee x = y \vee x > y$ や $max(x, y) = x \vee max(x, y) = y$　などは、仮定できないことに注意。

(R-3)　$x \neq 0 \Rightarrow xx^{-1} = 1$;　$xu = 1 \Rightarrow u = x^{-1}$

$x > 0 \Rightarrow x^{-1} > 0$;　$x < 0 \Rightarrow x^{-1} < 0$

(グループ Q-R) Q と R の関係

(Q-R-1) Q の R への埋め込みに関する性質 ：$\forall x \exists p \exists q(p < x < q)$ など

(Q-R-2) $a \geq 0 \Rightarrow \forall n(a > -1/n)$;　$a = 0 \Rightarrow \forall n(|a| < 1/n)$

(グループ Σ) 関数 $F(k, x)$ についての $\Sigma_{k=0}^{n} F(k$、$x)$ の性質。

(グループ λ) $(\lambda X f)(g) = f[g/X]$

定義 2.3 体系 $\mathcal{R}$　　われわれの"現実的微積分"を実行するべき体系 $\mathcal{R}$ は、３種類の ソートをもつ構成的述語論理を基礎とし、公理は定義２．２

のものである。ただし、有理数にのみ言及し限量記号のない命題に関しては、古典論理を適用できる。

上記公理群 $(Q-R-2)$ では、たとえば 実際に $a=0$ であるときに $1/n$ で近似できることをいっているだけである。$(Q-R-2)$ の逆、すなわち $\forall n(a>-1/n) \Rightarrow a \geq 0$ と $\forall n(|a|<1/n) \Rightarrow a=0$ は仮定していない。これが" 現実的微積分" のポイントである。これらの欠如のために収束列の収束先は必ずしもわれわれの世界の実体としては存在しない。有理数による近似の理論を展開するようなときには、これはむしろ自然である。

以下の結果はすべて体系 $\mathcal{R}$ で展開できる。この事実の重要さは、そこで存在命題を証明すれば、その対象物が" 構成的" であることは、証明のなかに組み込まれていることにある。したがって、" 構成する" という表現を繰り返すわずらわしさがない。

実数に関するいくつかの事実を、[6] の 2 節と 3 節を参考に説明する。なお、[6] では [3] の 2 章にしたがっている。

上述したように、実数列の極限の存在、または大小関係や等号などの判定を必要とする性質は、一般には成立しない。他方、代数的な諸性質は導かれる。たとえば $|x+y| \leq |x|+|y|;\quad x>y \vee -x>y \Rightarrow |x|>y$。また、各 n について $x_1+\cdots+x_n>0 \Rightarrow \exists i(1 \leq i \leq n \wedge x_i>0)$ が、$(Q\text{-}R\text{-}1)$ から導かれる。この系として、 $y<z \Rightarrow x<z \vee x>y$ を得る。これは見かけ以上に、大変有用な性質である。

定義 2.4 f は実数列、すなわち $N \rightarrow R$ の型をもつ対象物とする。

f は" 収束する"：

$\forall \varepsilon>0\ \exists r_1 \exists r_2(0<r_2-r_1<\varepsilon \wedge \exists m \forall n \geq m(r_1<f(n)<r_2))$

f はコーシー列: $\forall \varepsilon>0\ \exists l \forall m$、$n \geq l(|f(m)-f(n)|<\varepsilon)$

Bishop によれば、f がコーシー列とは、k に対して自然数 M_k が計算できて、 $m, n \geq M_k$ ならば $|r_m-r_n| \leq k^{-1}$ となることである。

" 収束する" という形容詞で表現される性質（概念）は、われわれの理論の特性である。「... へ収束する」という動詞で簡潔する、極限の存在ではない。その意義は、次のふたつの帰結によって説明される。すなわち、（1） 数列 f が" 収束する" ならばその存在範囲が次第にある場所に限られてくる（[6]-Proposition 2.3）；(2） f が" 収束する" ことと f がコーシーであることは、同等である（[6]-Proposition 2.4）。

つぎに、実数の集合がどのように見えるかを調べる。

定義 2.5 $A(x)$ は x についての性質（論理式）、A は、$A(x)$ を満たす x の集合とする。 集合 A が上に有界であることなどは $\exists r \forall x \in A\ x \leq r$ のように、普通のとおりに定義できる。

A の"上限が定義可能"（"下限が定義可能"も同様）：

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists r_1 \exists r_2 (0 < r_2 - r_1 < \varepsilon \wedge \forall a \in A(a < r_2) \wedge \exists a \in A(r_1 < a))$$

"上限（下限）が定義可能"という概念は、極限の存在が保証されないわれわれの理論では、重要な特色である。

現実的理論における概念と通常の概念の関係で、体系 $\mathcal{R}$ で証明されるものをいくつか挙げる。

f が"収束する"ならば、f（の値域）は有界；A の上限が存在するならば、A の"上限が定義可能"；全有界な集合は有界；全有界な集合では、"上限および下限が定義される"；上昇コーシー列（したがって"収束する"）については、"上限が定義される"。

ここで、単にコーシーだけでも、上昇かつ有界だけでも、"上限が定義できる"とは限らない。f がコーシー列であるが上昇列でないときには、$f(k)$（$k < m$）を r_2 と比較しなければならない。これは必ずしも決定可能ではない。

3 関数

定義 3.1 実数上の関数（$R \to R$ の型をもつ）f が閉区間 I で連続：

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x、y \in I(|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

この定義はふつうの一様連続と同じである。各点連続から一様連続性は構成的には導かれない。

命題 3.1 （*[6]-Proposition 4.1*）f が閉区間 I で連続ならば、f の I 上での（値の集合の）"上限および下限は定義可能"である。

Bishop 流でも Pour-El 流でも、このとき f の上限、下限は実数として存在する。

中間値定理は、連続関数に関する最初の特質であり、種々な構成的または計算可能な微積分で多様な結果が成り立つ。たとえば [1] と [5] では、ひとつの関数では、古典的な定理が成立するが、関数列については、反

例がある。これらでは、議論は古典論理で行われるので、”計算可能な中間値が存在するはずである”という証明が認められる。しかし、その値を与えられた関数から”構成”することは必ずしもできない。したがって、関数列については中間値の列を”構成”する一般的な方法はない。Bishop 流では、”加算個”の値以外に対しては、中間値の存在がいえる。[4] の３章、３．３に詳細がある。

　われわれの場合には、これらの議論のうち、極限の存在に依存する部分を除かなければならない。そのために、（有理）区間の間の関係としてとらえる。

命題 3.2 (中間値定理 :*[6]-Proposition 4.2)* $a < b$、f は $I \equiv [a\text{、}b]$ 上の連続関数、$f(a) < f(b)$ とする。このとき $\forall y \in (f(a)\text{、}f(b))\forall\varepsilon > 0\exists p \in (a\text{、}b)|f(p) - y| < \varepsilon$

　これは、次のようにも表現される。

　$\forall y \in (f(a)\text{、}f(b))\forall\varepsilon > 0\exists(r_1\text{、}r_2) \subset (a\text{、}b)\forall x \in (r_1\text{、}r_2)|f(x) - y| < \varepsilon$

　連続関数の導関数の定義は Bishop 流であるが、違いは ε に対して δ を求める関数の構成を明示しないことにある。

定義 3.2 *([3]-(5.1))* f、g が有界閉区間 I 上で連続とする。g が f の I 上での導関数であるとは

$$\forall\varepsilon > 0\exists\delta > 0\forall x\text{、}y \in I(|x-y| < \delta \Rightarrow |f(y)-f(x)-g(x)(y-x)| \leq \varepsilon|y-x|)$$

　g は f' などと書かれる。このような g が存在するとき、f は I 上で微分可能という。

　理論 $\mathcal{R}$ の第２の特色は、ロールの定理、およびその系である平均値定理にみられる。Bishop 流でも Pour-El ー Richards 流でも、これらについては古典的な定理と同じ形の結果が成立する。（[3] の (5.5)、[5] の０章、６。）われわれの場合は、有理区間の命題として述べられる。

命題 3.3 （ロールの定理 :*[6]-Proposition 5.2*） f は $[a\text{、}b]$ 上で微分可能、$f(a) = f(b)$ とするとき $\forall\varepsilon > 0\exists p \in [a\text{、}b](|f'(p)| < \varepsilon)$

　これより特に $\forall\varepsilon > 0\exists(r_1\text{、}r_2)\forall x \in (r_1\text{、}r_2)(|f'(x)| < \varepsilon)$ を得る。

　平均値定理は、上の定理からただちに導かれる（[6]-Proposition 5.3）。

4　近傍による微積分法の提案

先行する節の内容から、実数をその有理数近傍で表現することによって、微積分法から実数を除去して、”近傍微積分法”を構築できることが予想される。ここではそのアイディアの端緒を導入する。さらなる発展はまだ今後の課題である。以下の議論はすべて構成的論理の範囲で行うことができる。

定義 4.1 $r, s, \cdots$ は有理数を、(r_1, r_2) は有理端点をもつ開区間を、表わすものとする。$A \equiv (r_1, r_2), B \equiv (s_1, s_2)$ とおく。($A, B \neq \phi$　とする。)

１）$A \subset B : s_1 \leq r_1 \leq r_2 \leq s_2$

２）　区間の算術

$$A + B = (r_1 + s_1, r_2 + s_2);\quad -B = (-s_2, -s_1)$$

$$A{\cdot}B = (min\{r_1s_1, r_1s_2, r_2s_1, r_2s_2\}, max\{r_1s_1, r_1s_2, r_2s_1, r_2s_2\});\quad 1/B = (1/s_2, 1/s_1)$$

ただし、$s_1 = 0$ ならば $1/s_1 = \infty$ とし、$s_2 = 0$ ならば $1/s_2 = -\infty$。もし $0 \in B$ ならば $1/B$ は定義されない。

$$max(A, B) = (t_1, t_2)$$

ただし、$t_2 = max(r_2, s_2)$。　$t_2 = r_2 > s_2$ ならば $t_1 = r_1$　;$t_2 = s_2 > r_2$ ならば $t_1 = s_1$　;　$r_2 = s_2$ ならば $t_1 = max(r_1, s_1)$。

$$\mid A \mid = max(A, -A)$$

３）　$A = B \Longleftrightarrow r_1 = s_1$　かつ　$r_2 = s_2$

区間の半順序については、いくつかの候補がある。A, B は空でないとする。

定義 4.2

$$A \prec B : r_2 \leq s_1$$

$$A \sqsubseteq B : r_2 \leq s_2$$

$$A < B : r_1 < s_1 \quad \text{かつ} \quad r_2 < s_2$$

系 1　１）区間の算術は、可換であり、また結合律などをみたす。 たとえば

$$A+B=B+A;\quad A+(B+C)=(A+B)+C$$

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$$

２）（半）順序に関しては、いくつかの部分的結果が得られる。

$$A\sqsubseteq B\Rightarrow A+C\sqsubseteq B+C; A<B\Rightarrow A+C<B+C$$

３）$A<B\vee A=B\Rightarrow A\sqsubseteq B$ が成立するが、逆は必ずしも真でない。

４）$max(A,B)=A$ または $max(A,B)=B$

５）$0\in A-A$

４）は、区間の演算では max が古典的な性質をもつことを意味する。

命題 4.1　（メタ-定理）

１）　$*$ は $+,-,\cdot,/$ のひとつ、a,b は （体系 $\mathcal{R}$ における）実数とする。このとき

$$a\in A,b\in B\Rightarrow a*b\in A*B$$

２）　区間の間の演算や関係は、計算（決定）可能である。

３）　$A\bigcap B=\phi,A\bigcap B\neq\phi$ などの関係は、決定可能である。

定義 4.3　１）　$\mathcal{N}$ は有理区間全体の族、$\mathcal{F}$ は $\mathcal{N}$ の任意の部分族とする。$\mathcal{F}$ が”包含に関して閉じている”とは、”$B\subset A\in\mathcal{F}$ ならば$B\in\mathcal{F}$ であること”とする。

２）$\mathcal{F}$ から $\mathcal{N}$ への写像 F は”近傍変換”と呼ぶ。

３）F が ”（包含）単調 ”とは $B\subset A\Rightarrow F(B)\subset F(A)$。

定義 4.4　（メタ-定義）

f は実数上の関数とする。”（包含）単調 ”な近傍変換 F が f の”実現”であるとは、各 A に対して $f(A)\subset F(A)$ が成り立つことである。このとき

$$f(c)\in\bigcap\{F(A);c\in A\}$$

命題 4.2　１）　$+,\cdot$ などは”単調”である。

２）　F が”単調”であるとき、

$$F(A\bigcap B)\subset F(A)\bigcap F(B)$$

定義 4.5 １）$A=(r_1,r_2)$ のとき、$\sigma(A)=r_2-r_1$　（A のサイズ）

２）近傍変換 F が連続であるとは、$A\cup B$ が区間であるときに、$F(A\cup B)=F(A)\cup F(B)$　（和の保存）が成り立ち、さらに $\epsilon-\delta$ 関係が成りたつ。すなわち

$$\forall\epsilon>0\exists\delta>0\forall B(\sigma(B)<\delta\Rightarrow\sigma(F(B))<\epsilon)$$

３）区間列 (A_n) が”収束する”（コーシーである）とは

$$\exists l\forall n,m\geq l(A_n\cap A_m\neq\phi)$$

４）$\mathcal{F}\subset\mathcal{N}$ が”包含関係に関して閉じている”ときに、$\mathcal{F}$ について”A によって上限が定義可能”とは

$$\forall B\in\mathcal{F}(B\sqsubseteq A)\wedge\exists B\in\mathcal{F}(A\cap B\neq\phi)$$

５）$\mathcal{F}$は、ある有理区間に含まれるすべての（有理）区間の族とする。$\mathcal{F}$で $U_1<U_2$ とする。　このとき $[U_1,U_2]\equiv\{U|U_1\sqsubseteq U\sqsubseteq U_2\}$。

６）F,G は $I\equiv[U_1,U_2]$ 上で連続とする。　G が F の導関数であるとは

$$0\in B\Rightarrow\exists C(0\in C\wedge\forall U,V\in I(V-U\subset C\Rightarrow$$

$$(F(V)-F(U)-G(U)\cdot(V-U))\subset B\cdot(V-U)))$$

F の導関数は F' と書く。

”和を保存する”変換は”単調”である。

微積分の定理の、近傍による解釈をふたつだけ挙げておく。

命題 4.3　（中間値定理）F が $I\equiv[U_1,U_2]$ で連続とするとき

$$F(U_1)<0<F(U_2)\wedge\epsilon>0\Rightarrow\exists U\in I(F(U)\subset(-\epsilon,\epsilon))$$

命題 4.4　（ロールの定理）F' が F の導関数であるとき、

$$F(U_1)=F(U_2)\wedge 0\in B\Rightarrow\exists U\in I(F'(U)\cap B\neq\phi)$$

参考文献

[1] Oliver Aberth, *Computable Analysis*, McGraw-Hill(1980)

[2] Errett Bishop, *Foundations of Constructive Analysis*, McGraw-Hill(1967)

[3] Erret Bishop and Douglas S. Bridges, *Constructive Analysis*, Springer-Verlag(1985)

[4] Douglas S. Bridges, *Constructive Functional Analysis*, RNM 28, Pitman(1979)

[5] Marian B. Pour-El and J. Ian Richards, *Computability in Analysis and Physics*, Springer-Verlag(1989)

[6] Mariko Yasugi, *A formal system of feasible constructive calculus*, Acta Hum. et Sci. Univ. Sangio. Kyot., vol.25(1995),30-57