集合の演算に関する等式

平成 14 年 6 月 15 日

1　集合の和積標準形

集合の演算に関してはふつう「和積標準形」ということばは使わないが、命題論理との類似の変形規則を知っていると便利なので、ここでは臨時に「集合の和積標準形」ということばを使う。

集合の和積標準形は、命題論理の論理式の和積標準形の定義 (pp.108-109) において、$\vee, \wedge, \neg$ をそれぞれ $\cup, \cap, *^c$ で置き換えたものである。したがって、ある集合の表現を和積標準形に変形するには、１１０ページの命題 3.8 においてこのような記号の置き換えをすればよい。ただし集合の場合には $\Rightarrow$ は不要。

例 $(A \cup B)^c$ は $A^c \cap B^c$ に変形；$A \cup (B \cap C)$ は $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ に変形。

和積標準形に直したとき $(X \cup \cdots \cup X^c \cup \cdots)$ の形の基本和があれば、全体集合になるので、これは除くことができる。また、$\cdots \cap X \cdots \cap X^c \cdots$ の形になれば空集合になる。このようにして無駄を省くことができ、二つの集合が等しいかどうかチェックするのが容易になる。

2　問題

1. 全体集合 U の中で考える。次のうちで全体集合になるもの (a)、全体集合ではないが空集合でないもの (b)、空集合 (c) はどれか？
   (1)　$A \cup (B \cap A^c) \cup (B^c \cap A^c)$
   (2)　$((A \cup B)^c \cup A)^c$
   (3)　$A \cap (A \cup B)^c$
2. 次の集合を、できるだけ簡単な形で表せ。
   (1)　$(A^c \cap B^c)^c$
   (2)　$(A^c \cup B^c)^c$
   (3)　$(A^c)^c$
3. 次の等式は正しいか？
   (1)　$(A \cap B^c)^c = A^c \cap B$
   (2)　$X^c \cup (X \cap Y) = X^c \cup Y$

4. 次の集合を和積標準形に変形せよ。
   (1) $((X^c \cup (Y \cap Z)) \cap ((Y^c)^c \cup (X \cap Y)))$
   (2) $((X \cap (X^c \cup Y)) \cup ((X \cap Y)^c \cup Z))^c$

3 解答

1. １０７ページの例 3.4 を参照。
   (1) (a), (2) (b), (3) (c)
2. １０３ページの命題 3.3 を参照。
   (1) $A \cup B$ (2) $A \cap B$ (3) A
3. (1) Yes (2) Yes
4. １１１ページの例 3.6 を参照。
   (1) $(X^c \cup Y) \cap (X^c \cup Z) \cap (Y \cup X) \cap (Y \cup Y)$
   $Y \cup Y$ は Y でよい。
   (2) $(X^c \cup X) \cap (X^c \cup Y^c) \cap X \cap Y \cap Z^c$
   $(X^c \cup X)\cap$ はなくてよい。