集合の記法、要素、等号などの例

$$S == \{p | p \text{ は選挙権をもつ京都市民}\} \tag{1}$$

読み方：

S は「選挙権をもつ京都市民の集合」のなまえ；「選挙権をもつ京都市民の集合」を S とおく；S は個体 p の集合で、p は選挙権をもち、また p は京都市民である。

S の要素は選挙権をもつ京都市民の一人一人。

$$BC == \{x | x \text{ は４千万以上の人口をもつ国}\} \tag{2}$$

BC の要素は、国であって、その人口が４千万以上のもの

BC の要素の例：日本（人口１億以上）、中国、米国

$$Japan \in BC; China \in BC$$

BC の要素でない例：シンガポール

$$Singapore \notin BC$$

$$EN == \{n | n \text{ は偶数である正整数}\} \tag{3}$$

EN は正整数（0 でない自然数）であって、偶数である数の集合

$FN = \{n | n \text{ は整数} \wedge n > 0 \wedge n \text{ は } 2 \text{ で割り切れる}\}$　（集合 FN は 2 で割り切れる正整数の集合）

$$6 \in EN, 1002 \in EN, -6 \notin EN, 0 \notin EN, 7 \in EN$$

$$Oyako == \{x | x \text{ は人の対 } \langle p, q \rangle \text{ で}, p \text{ は } q \text{ の親である}\} \tag{4}$$

$Oyako$ は「親子」の対の集合；Anna が Brian の親ならば人の対 $\langle Anna, Brian \rangle$ は $Oyako$ の要素である。

$$\langle Anna, Brian \rangle \in Oyako$$

$$\langle Anna, Silktree \rangle \notin Oyako, Dog \notin Oyako$$

人と木の対は親子関係にない；「犬」は対になっていないので $Oyako$ の要素ではない。

集合のなまえは、その要素を列記したファイル名みたいなものである。したがってなまえはちがっても内容は同じ、ということがある。二つの集合が等しい（$A = B$）とは、その要素が同じことである。なまえや定義の仕方がちがっても要素が同じならば等しい。

いろいろな等号について：$==$ は、左辺を右辺で定義する、の意味。Mathematica の := と同じ。こう書くこともある。$==$ は Z の記法。$=$ は両辺が等しい、の意味。

例：

$$BC == \{x | x \text{ は 4 千万以上の人口をもつ国}\}$$

$$PC == \{Japan, China, USA, \cdots\}$$

（$\cdots$ は、実際に人口 4 千万以上の国を列挙してあるものとする）このとき

$$BC = PC$$

(3) における二つの集合の定義について

$$EN = FN$$

全体集合について：全体集合というのはとくに決まった集合のことではない。なにか作業をするときに「この範囲内で」と決めれば、その範囲を表す。たとえば GCD（二つの数の最大公約数）という関数を定義しようとするとき、入力値を整数に限っておけば、定義もしやすいし、入力もまちがわない。実数を入力するとエラーメッセージが出たり、計算がとまらなくなったりする、ということを防げる。そこで全体集合を整数として、GCD を定義し、それを使ってさらにいろいろな関数を定義することができる。整数の中で、2 で割っても整数になるような数だけ集めたければ、整数という全体集合の中でそのような数を拾ってゆけばよい。

全体集合としてよく使われる集合の記法（これらは一般に使われる記法である。おぼえておくとよい。）：

自然数全体：$\mathbf{N} == \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ (the set of natural numbers)

整数全体：$\mathbf{Z} == \{0, 1, -1, 2, -2, \cdots\} = \{m | m = -n \vee m = n, n \in \mathbf{N}\}$ (the set of integers)

分数（有理数）全体：$\mathbf{Q} == \{\frac{p}{q} | p, q \in \mathbf{Z} \wedge q \neq 0\}$ (the set of quotients)

実数全体：$\mathbf{R}$ (the set of real numbers)

全体集合を使う例

$$EN == \{m \in \mathbf{N} | m \text{ は 2 で割り切れる}\}$$

$AllCountries$ を、（現時点での）世界中の国々の集合とする。

$$AllCountries == \{x | x \text{ は国である}\}$$

これを全体集合とすると

$$BC = \{x \in AllCountries | x \text{ は人口 4 千万以上}\}$$

空集合について :空集合は要素をもたない集合であり、それは全体集合の中で定義される。たとえば

$$K == \{a \in \mathbf{R} | a^2 < 0\}$$

K は全体集合 $\mathbf{R}$ の要素で、$a^2 < 0$ となる a の集まりであるが、そういう a はないので、空集合である。他方

$$L == \{n \in \mathbf{N} | n^2 < 0\}$$

としても L はやはり空集合であるが、これは $\mathbf{N}$ の中で定義されている。このように空集合については、全体集合が異なっても、要素をもたない」という意味では等しくなる。