プレ特研 H：カオス
-理論と Mathematica による実践-

担当者：八杉満利子

平成 17 年 4 月 7 日

目 次

1 序文

テキスト：カオス入門　鈴木著　コロナ社

基本的にこのテキストに沿って進める。Mathematica による実習にはこれが必修である。補足は以下の参考書による。

カオス入門　山口昌哉著　朝倉書店

カオスとフラクタル　山口昌哉著　講談社

他に部分的に参照する場合にはその都度記載する。また、インターネットのサイトにも参考になるものが多い。たとえば

http://ja.wikipedia.org/wiki/

の「カオス理論」など。

フリー百科事典「ウィキペディア (Wikipedia)」によるとカオス理論は以下のように述べることができる。

引用 1 -

決定的な動的システムが、初期状態によって様々な反応を起こすような現象を扱う理論である。多くの場合それはシステムを表現する方程式の非線形性のためであり、非常に一般的なものである。

例：大気、プレートテクトニックス、経済・人口などの社会的なシステム

カオスの存在はウクライナのシャルコフスキーが早くから研究していた。後に E. ローレンツ、B. マンデルブロなどにより研究が盛んになった。

カオスの特徴

- 自己相似
- 単純な数式から、ランダムに見える複雑な振る舞いが発生する
- 初期値のごくわずかなずれが、将来の結果に大きな差を生じる
- 過去の観測データから将来の予測が不可能である

引用１終わり-

以上をカオス入門（山口）により数学的に見てみよう。
-引用２
リー・ヨークの定理と離散力学系
例 $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$, $x_0 \in \mathbf{R}$ は任意、$0 \le a \le 4$ は定数

$$x_{n+1} = 2x_n, (0 \le x_n \le \frac{1}{2});\ 2(1 - x_n), (\frac{1}{2} < x_n \le 1) \tag{1}$$

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n), (0 \le x_n \le 1) \tag{2}$$

(1,2) の $\{x_n\}$ は漸化式による数列といえる。ただし初項は任意の実数。すなわち $\{x_n\}$ は初項に依存した数列をあらわす変数。

このような x_n の軌道（軌跡）を「離散力学系」(discrete dynamical system) と呼ぶ。

(1, 2) は初期値（x_0）の変化に対して敏感（sensitive）であるという。すなわち、x_0 の値のわずかな違いが、大きい n について x_n が大きく違う。

注：上の二つのシステムについて、$0 \le x_n \le 1$ である。

離散力学系の一般的な定義をする。一般に I は実数上の区間（実数全体も含む）、$f : I \to I$ は I から I への連続な写像とする。f により $\{x_n\}$ を定義する。

$$x_0 \in I; x_{n+1} = f(x_n) \quad n = 0, 1, 2, \cdots \tag{3}$$

このとき $\{x_n\} \subset I$。この離散力学系について、次の定理が成り立つ。

なお、一般に $f(f(\cdots f(x)))$、すなわち x に f を k 回作用させたもの、を、$f^k(x)$ と書く。$f^k(x) = x$ のときに、x を k-周期点という。

Theorem 1 (Li-Yorke の定理) 以下の条件 (C) が成り立つとする。

$$a, b, c, d \in I, 0 \le d < a < b < c \le 1, b = f(a), c = f(b), d = f(c) \tag{4}$$

このとき上の力学系 (3) について次の (i),(ii),(iii) が成り立つ。（この事実をリー・ヨークはカオスと呼んだ。）

(i) 任意の自然数 k について、k-周期の軌道がある。

(ii) I の非可算部分集合 S が存在して、$x \in S, y \in S$ であれば、

$$\liminf_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| = 0, \limsup_{n\to\infty} |f^n(x) - f^n(y)| > 0 \tag{5}$$

(iii) (ii) の S について

$$x \in S, k = 0, 1, 2, \cdots, y \quad \text{は} \quad k- \quad \text{周期点}$$

である x, y についても (5) が成り立つ。

注：$d = a$ の場合、(4) は３周期点の存在の仮定になる。（$f^3(a) = d = a$、ゆえに a は３周期）このとき (i) により、周期３は、他のすべての周期軌道の存在を意味する。

-引用２終わり

以上についての補足は教室で。

2　カオスの由来・現象：1.1

テキストの 1.1 に入る。

1.1∼1.5

簡単な説明の後、テキストのプログラムを実行する。必ず実行してみてください。