抽象化の技法　そのIV　:練習問題

担当者　:八杉満利子

平成 14 年 10 月 28 日

1　自明でない例の恒真性の証明

$$A \equiv A^p \equiv \exists x \forall u \exists v \forall y (P(x,y) \Rightarrow P(u,v))$$
$$A^s \equiv \exists x \exists v (P(x, f(x,v)) \Rightarrow P(g(x), v))$$

マトリックスの形

$$P(\alpha, f(\alpha,\beta)) \Rightarrow P(g(\alpha),\beta);\ \neg P(\alpha, f(\alpha,\beta)) \vee P(g(\alpha),\beta)$$

個数 1 で試す。負のリテラルは $P(\alpha, f(\alpha,\beta))$、正のリテラルは $P(g(\alpha),\beta)$。
これらが等しいためには

$$\alpha = g(\alpha), f(\alpha,\beta) = \beta$$

解けない。個数 2 で試す。

$$(P(\alpha_1, f(\alpha_1,\beta_1)) \Rightarrow P(g(\alpha_1),\beta_1)) \vee (P(\alpha_2, f(\alpha_2,\beta_2)) \Rightarrow P(g(\alpha_2),\beta_2))$$

$$(\neg P(\alpha_1, f(\alpha_1,\beta_1)) \vee P(g(\alpha_1),\beta_1)) \vee (\neg P(\alpha_2, f(\alpha_2,\beta_2)) \vee P(g(\alpha_2),\beta_2))$$

負のリテラル

$$P(\alpha_1, f(\alpha_1,\beta_1)), P(\alpha_2, f(\alpha_2,\beta_2))$$

正のリテラル

$$P(g(\alpha_1),\beta_1), P(g(\alpha_2),\beta_2)$$

可能性として、

$$P(\alpha_1, f(\alpha_1,\beta_1)) \equiv P(g(\alpha_2),\beta_2); \alpha_1 = g(\alpha_2), \beta_2 = f(\alpha_1,\beta_1)$$

の解 ?たとえば

$$\beta_1 = c, \alpha_2 = d, \alpha_1 = g(d), \beta_2 = f(g(d), c)$$

とすれば、負と正のリテラルが $P(g(d), f(g(d),c))$ となる。したがって

$$(\neg P(g(d), f(g(d),c)) \vee P(g(g(d)),c)) \vee (\neg P(d, f(d, f(g(d),c))) \vee P(g(d), f(g(d),c)))$$

は恒真。順にさかのぼって、A は恒真。

2　練習問題

I.　次の論理式を、順次冠頭標準形、Skolem 標準形、マトリックス、に変形せよ。

1. $\exists x P(x) \wedge \forall y Q(y) \Rightarrow \forall u R(u)$
2. $\neg \exists u X(u) \vee \forall v Y(v)$
3. $\forall x \exists y P(x,y) \Rightarrow \exists x Q(x) \wedge \exists x \exists y P(x,y)$

II. 次の論理式の恒真性を示せ。

1. $\forall x(\forall y P(x,y) \Rightarrow \exists x P(x,x))$
2. $\exists x(\neg P(x) \vee Q) \Rightarrow \neg \forall u P(u) \vee Q$
3. $^*3.$　$\exists x \forall y(\neg P(x) \vee Q(y)) \Rightarrow \neg \forall u P(u) \vee \forall v Q(v)$

解答　答えは一通りではない。これは一例。

I. 1.　$\exists x \forall y(P(x) \wedge Q(y)) \Rightarrow \forall y R(u);\ \forall x \exists y \forall u(P(x) \wedge Q(y) \Rightarrow R(u))$

$$\exists y(P(a) \wedge Q(y) \Rightarrow R(h(y)));\ P(a) \wedge Q(\alpha) \Rightarrow R(h(\alpha))$$

2.　$\forall u \neg X(u) \vee \forall v Y(v);\ \forall u \forall v(\neg X(u) \vee Y(v));\ \neg X(b) \vee Y(c)$

3.　$\exists x \exists u \forall y \exists v(P(x,y) \Rightarrow Q(u) \wedge P(u,v))$

$$\exists x \exists u \exists v(P(x, f(x,u)) \Rightarrow Q(u) \wedge P(u,v))$$

$$P(\alpha, f(\alpha,\beta)) \Rightarrow Q(\beta) \wedge P(\beta,\gamma)$$

II. 1.　$\forall x \exists y \exists u(P(x,y) \Rightarrow P(u,u));\ \exists y \exists u(P(a,y) \Rightarrow P(u,u))$

$$P(a,\beta) \Rightarrow P(\gamma,\gamma);\ \neg P(a,\beta) \vee P(\gamma,\gamma);\ \gamma = \beta = a$$

2. $\exists x(\neg P(x) \vee Q) \Rightarrow \exists u \neg P(u) \vee Q$

$$\exists x(\neg P(x) \vee Q) \Rightarrow \exists u(\neg P(u) \vee Q)$$

これは $A \Rightarrow A$ の形。ゆえに恒真。

$^*3.$　$\exists x \forall y(\neg P(x) \vee Q(y)) \Rightarrow \exists u \neg P(u) \vee \forall v Q(v)$

$$\forall x \exists y \exists u \forall v(\neg P(x) \vee Q(y)) \Rightarrow \exists u \forall v(\neg P(u) \vee Q(v))$$

$$\forall x \exists y \exists u \forall v(\neg P(x) \vee Q(y) \Rightarrow \neg P(u) \vee Q(v))$$

$$\exists y \exists u(\neg P(e) \vee Q(y) \Rightarrow \neg P(u) \vee Q(h(y,u)))$$

$$\neg P(e) \vee Q(\beta) \Rightarrow \neg P(\gamma) \vee Q(h(\beta,\gamma))$$

1 個では解がないことは容易にわかる。 2 個で試してみる。