抽象化の技法　そのIII　:恒真性の判定

担当者　:八杉満利子

平成 14 年 10 月 20 日

1　命題論理への還元

マトリックスの和から作られた和積標準形に Herbrand Universe のいろいろな項を代入した論理式を、A の qf-式とよび、A^{qf} と書こう。もちろんこれは無数にある。(qf は quantifier free、すなわち限量記号のない形、という意味) それが恒真になるかどうか判定する。どのような項を代入したらよいか、は、方程式を解くことによって決定する。(実際の例は次の節で)

定理　:述語論理の論理式 A が恒真　(証明可能) であることと、A のある qf-式で恒真なものがあることは、同値である。

注　:1 . この定理の証明は、次節で例によって説明する。

2 . 定理は、さらに、もっと強い形で述べることができる　:実際に A が恒真ならば、恒真な A^{qf} を自動的に求めることができる。しかもその A^{qf} の証明から、A の証明を自動的に構成することができる。実際にそのようなプログラムは多く作成されている。

2　例

例 1　自明な例

$$A \equiv \forall x(P(x) \Rightarrow \exists y P(y))$$

は恒真である。

$$A^p \equiv \forall x \exists y(P(x) \Rightarrow P(y))$$

$$A^s \equiv \exists y(P(c)) \Rightarrow P(y)$$

$$A^{mm} \equiv P(c) \Rightarrow P(\alpha)$$

c は **U** の項。ゆえに $\alpha = c$ とおいて、

$$A^{qf} \equiv P(c) \Rightarrow P(c)$$

この A^{qf} は $B \Rightarrow B$ の形だから、命題論理の恒真な式である。また、$P(c) \Rightarrow P(c)$ が恒真なことから、$A^s \equiv \exists y(P(c) \Rightarrow P(y))$ が恒真なことがわかる。($y = c$ とすればよい。) したがって、順次遡って、A が恒真なことがいえる。

例 2　自明でない典型的な例

$$A \equiv A^p : \exists x \forall y(P(x) \Rightarrow P(y))$$

$$A^s : \exists x(P(x) \Rightarrow P(f(x)))$$

たとえば x の候補が一つであると推測してみる。

$$P(\alpha) \Rightarrow P(f(\alpha))$$

この式が恒真であるためには、$\alpha \equiv f(\alpha)$ でなければならない。($\equiv$ は、形が同一であることを示す。) しかし、これは不可能。

次に、x の候補が二つあると推測してみる。

$$A^{mm} \equiv (P(\alpha) \Rightarrow P(f(\alpha))) \vee (P(\beta) \Rightarrow P(f(\beta)))$$

これは次の基本和と同じ。

$$\neg P(\alpha) \vee \neg P(\beta) \vee P(f(\alpha)) \vee P(f(\beta))$$

基本和で、$\neg$ がついているリテラルを「負」、ついていないのを「正」とよぶことにする。正なリテラルと負のリテラルの両方に同じ論理式があれば、基本和は恒真である。それが可能かどうか、方程式を解いてみる。

$\alpha = f(\beta)$ と置いてみると、正負両方に $P(f(\beta))$ が出現する。したがってこの A^{mm} は β を適当な項 (たとえば定記号 c) によって、$\beta = c, \alpha = f(c)$ とすれば、恒真になる：

$$\underline{\neg P(f(c))} \vee \neg P(c) \vee P(f(f(c))) \vee \underline{P(f(c))}$$

逆に、これを、論理結合子間の等式によって変形すれば

$$(P(f(c)) \Rightarrow P(f(f(c))))) \vee (P(c) \Rightarrow P(f(c))))$$

は恒真。$(P(f(c)) \Rightarrow P(f(f(c)))))$ が真ならば、$x = f(c)$ とすれば $A^s \equiv \exists x(P(x) \Rightarrow P(f(x)))$ が真。$(P(c) \Rightarrow P(f(c))))$ が真ならば、$x = c$ とすれば、同様の結果が得られる。ゆえに A^s が恒真。