集合と論理

八杉満利子
京都産業大学・理学部計算機科学科
http://www.kyoto-su.ac.jp/~ yasugi

1 文章

文章を論理式で書いてみよう。

1. アンナが赤い帽子を買うのならば、私は白い帽子を買う。でもアンナが赤い帽子を買わなければ、私は白い帽子を買わない。
2. 明日雨が降らなければ (私たちは) 遠足に行く。でも明日雨だったら映画に行くかショッピングに行くかコンサートに行く。
3. 自然数の集合も有理数の集合も可算集合であるが、実数の集合は可算集合ではない。

解答

1. 「アンナが赤い帽子を買う」、「私が白い帽子を買う」をそれぞれ P, Q とおくと、
   $(P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q)$
2. 「明日雨が降る」、「遠足に行く」、「映画に行く」、「ショッピングに行く」、「コンサートに行く」をそれぞれ X, Y, Z, U, V とおくと、
   $(\neg X \Rightarrow Y) \wedge (X \Rightarrow Z \vee U \vee V)$
3. 「自然集の集合が可算集合」、「有理数の集合が可算集合」、「実数の集合が可算集合」をそれぞれ P, Q, R とおくと、
   $P \wedge Q \wedge \neg R$

2 パズル

論理パズルの例です。文章を命題論理の論理式として書く演習問題にもなります。

パズルを解くには、ふつうに (何が普通なんだろう ?) 解いてもいいですが、真理値の定義から直接解く、「和積標準形」の応用、あるいはワンのアルゴリズムなどで解いてみてください。

解答は最後に書きますが、最初は自分で考えてください。解答方法は一通りではありません。

なお、「パズルランド」にも論理パズルがありますので、チャレンジしてみてください。

1. (登山) 登山の途中で分岐点にぶつかりました。ふたつの道のうち、少なくとも一方が頂上へ行きます。でもここは平らで、どちらが頂上へ行くのかわかりません。標識にはこう書いてありました。
   「右の道が頂上へ行くならば、左の道も頂上に行きます」
   さて、この標識を便りに頂上へたどりつけるでしょうか。
2. (猫の健康) 「賢い猫は健康だ」と信じている人がいます。つまり、猫について
   (*) 賢ければ、健康である
   ということです。さて、下の (1)、(2)、(3) のうち、(*) から導かれるのはどれでしょうか？(これらはすべて猫についての命題です。)
   (1) 健康でないか、または賢い。
   (2) 健康であるか、または賢くない。
   (3) 賢いか、または健康である。
3. (「論理パズルとパズルの論理」林・八杉著、遊星社 より)
   希実「一穂が人魚なら彩希は天使で、彩希が天使なら一穂は人魚よ」
   一穂「そうかなあ ?私が人魚ならあなたが女神で、あなたが女神なら私が人魚だとは思うけど」
   彩希「二人ともいい加減なことばっかり。希実が女神なら私が天使で、私が天使なら希実が女神なの！」
   伸くん「お姉ちゃんたち、みんなウソを言ってる！」
   さて、伸くんは正しいでしょうか？

解答例

1. 「右の道が頂上に行く」、「左の道が頂上に行く」をそれぞれ P, Q とおく。「ふたつの道のうち少なくともひとつは頂上に行く」は $P \vee Q$ と書ける。これは真である。また、標識の文は $P \Rightarrow Q$ と書ける。これも真である。$v(P \vee Q) = T$ であるのは $v(P) = T$ か $v(Q) = T$ 少なくとも一方がなりたつ。もしも $v(P) = T$ ならば $v(P \Rightarrow Q)$ より $v(Q) = T.$ もし $v(P) = F$ ならば $v(Q) = T$。すなわち、どちらの場合にも $v(Q) = T$ である。したがって右の道がどこへ行くかにかかわらず、左の道を行けばよい。
2. まずは文章を論理式で書いてみよう。基本文は二つ。ある猫について、「賢い」を X、「健康である」を Y とおく。
   1. 「賢ければ健康である」は $X \Rightarrow Y$

2. 「健康でないか、または賢い」は $\neg Y \vee X$
3. 「健康であるか、または賢くない」は $Y \vee \neg X$
4. 「賢いかまたは健康である」は $X \vee Y$

1. を基本和の形で書いてみると $\neg X \vee Y$ となる。これは 3. と同じ（$\vee$ の交換律による）。したがって 1. と 3. は同じ意味である。2. と 4. は 1. と異なることを、たとえば $v(X) = F, v(Y) = T$ とすると、1. と 3. は T であるが、2. は F. $v(X) = v(Y) = F$ とすると、1. と 3. は T であるが、4. は F である。

3. 「一穂が人魚」、「彩希が天使」、「希実が女神」を それぞれ X, Y, Z とおく。一般に、$()A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ を $A \equiv B$ と書く。$v(A \equiv B) = T$ であることと $v(A) = v(B)$ であることは同値である。$\equiv$ を使うと、少女たちの発言は次のように書ける。そのそれぞれを C, D, E とおく。

希実 :$X \equiv Y$

一穂 :$Y \equiv Z$

彩希 :$Z \equiv Y$

伸君 :$\neg C \wedge \neg D \wedge \neg E$

伸君の発言は $\neg(C \vee D \vee E)$ と同値である。

ところでお姉ちゃんたちがみんなウソいっているのならば、$v(C) = v(D) = v(E) = F$ である。つまり $v(X) \neq v(Y)$, $v(Y) \neq v(Z)$, $v(Z) \neq v(X)$。もしも $v(X) = T$ ならば、$v(Y) = F$, $v(Z) = T$、ゆえに $v(X) =$ となって、$v(X)$ は同時に T, F の両方の値をとることになって矛盾。$v(X) = F$ としても同様に矛盾が生じる。ゆえに $v(C), v(D), v(E)$ のどれかは T、すなわちお姉ちゃんの少なくとも一人は真実を言っている。（ただし誰が真実かはわからない。）