抽象化の技法　そのII　:冠頭標準形の変形

担当者　:八杉満利子

平成 14 年 10 月 7 日

1　Skolem の標準形　:$\forall$ の除去

$\forall$ 記号を、論理式の恒真性を変えずに、除去して、冠頭に $\exists$ だけが並ぶ形にする。

例 ：　$\forall x \exists y \forall z F(x, y, z)$ を $\exists y F(f_0, y, f_1(y))$ に変形。

冠頭標準形の中の $\forall$ をはずす規則

$\cdots \forall x \cdots F(\cdots, x, \cdots)$ の中の $\forall x$ より前　(左、または外) に出現する $\forall$ はすでに除去されているとする。したがってその時点で論理式は

$$\exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_n \forall x \cdots F(\cdots, x, \cdots)$$

という形になっている。ただし $n \geq 0$。このとき新しく n 引数の関数記号 f を導入して、上の式を次のように変形する。

$$\exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_n \cdots F(\cdots, f(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots)$$

とくに $n = 0$、すなわち $\forall x$ の前 $\exists$ がなければ、f は 0-引数、つまり定数記号であり、変形結果は

$$\cdots F(\cdots, f, \cdots)$$

となる。なお、新しい関数記号のなまえはなんでもよい。

例

$$\forall x \exists y F(x, y) \mapsto \exists y F(c, y)$$

$$\forall x \exists y \forall z G(x, y, z) \mapsto \exists y G(c, y, f(y))$$

$$\exists x_1 \exists x_2 \forall y \forall z A(x_1, x_2, y, z) \mapsto \exists x_1 \exists x_2 A(x_1, x_2, g(x_1, x_2), h(x_1, x_2))$$

同値 ：　任意の論理式 A について、A の冠頭標準形 A^p と、それから得られる Skolem 標準形 A^s は恒真性において同値である。すなわち、A^p が恒真であることと A^s が恒真であることとは、同値である。

2　マトリックス　:∃の除去

Skolem 標準形から、恒真性を変えないように ∃ をはずして命題論理の式にする。これを A のマトリックスといい、A^m と書こう。一つの Skolem 標準形に対してマトリックスは無数に用意する。

まず Skolem 標準形 A^s から $\exists x$ を除去して、$\exists x$ の x の候補を代入できるように、仮の変数で x を置き換える。その結果をマトリックスという。仮の変数として、たとえば $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ を用意する。添え字が面倒なときには α, β, γ などと略記する。一つの $\exists x$ に対して、無数のマトリックスができる。ただし一つの論理式の中の異なる変数は異なる仮の変数で置き換える。
例

$$\exists y F(c, y) \mapsto F(c, \alpha)$$

$$\exists y F(c, y) \mapsto F(c, \beta)$$

$$\exists y G(c, y, f(y)) \mapsto G(c, \alpha, f(\alpha))$$

$$\exists y G(c, y, f(y)) \mapsto G(c, \gamma, f(\gamma))$$

$$\exists x_1 \exists x_2 A(x_1, x_2, g(x_1, x_2), h(x_1, x_2)) \mapsto A(\beta, \gamma, g(\beta, \gamma), h(\beta, \gamma))$$

$$\exists x_1 \exists x_2 A(x_1, x_2, g(x_1, x_2), h(x_1, x_2)) \mapsto A(\alpha_1, \alpha_2, g(\alpha_1, \alpha_2), h(\alpha_1, \alpha_2))$$

次にマトリックスの和を作る。A^s のマトリックス $A_1^m, A_2^m, \cdots, A_k^m$ から、それらの和

$$A_1^m \vee A_2^m \vee \cdots \vee A_k^m$$

を作る。 (これを A^{mm} と書こう。一つの Skolem 標準形に対するマトリックスの任意の和を表す) ここで $A_1^m, A_2^m, \cdots, A_k^m$ のそれぞれは任意の異なるマトリックスであり、その個数 $k \geq 1$ も任意である。

さらに、このマトリックスの和から、和積標準形を作る。これを A^{ws} と書こう。

3　Herbrand Universe

A^{ws} に出現する α や β などに代入するべき項の候補として、1 節で導入した関数記号で作られる項を集める。その集合を Herbrand Universe という。**U** と書こう。すなわち **U** の要素は、次のようなものである。 (再帰的な定義)

1. 引数 0 の関数記号　($c, d, f_0, \cdots$ などと書く)
2. f が引数 $n \geq 1$ の関数記号であり、$t_1, t_2, \cdots, t_n$ がすでに定義された **U** の項とするとき、$f(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ は **U** の項である。