抽象化の技法　そのＩ：冠頭標準形

担当者：八杉満利子

平成14年10月2日

冠頭標準形（prenex normal form）とは、述語論理の論理式のある標準形で、限量子をすべて先頭（冠頭）に出したもの。

変形規則：以下で、$\longmapsto$の左の論理式を右のように変形。変数xなどは指示されている場所以外には出現しないものとする。

1　$\Rightarrow$に関する変形

$$\exists x A(x) \Rightarrow B \longmapsto \forall x (A(x) \Rightarrow B) \tag{1}$$

$$A \Rightarrow \exists x B(x) \longmapsto \exists x (A \Rightarrow B(x)) \tag{2}$$

$$\forall x A(x) \Rightarrow B \longmapsto \exists x (A(x) \Rightarrow B) \tag{3}$$

$$A \Rightarrow \forall x B(x) \longmapsto \forall x (A \Rightarrow B(x)) \tag{4}$$

注：いくつも$\forall$や$\exists$があるときに、変形順序は任意である。

冠頭標準形への変形例

$$\exists x A(x) \Rightarrow \exists y B(y)$$

を、(1)と(2)を使って変形。

$$\forall x (A(x) \Rightarrow \exists y B(y))$$

$$\forall x \exists y (A(x) \Rightarrow B(y))$$

同じ論理式から出発して異なる標準形を作ることができる。

$$\exists y \forall x (A(x) \Rightarrow B(y))$$

異なる出現の同じ変数名は変える必要がある。例：

$$\exists x A(x) \Rightarrow \exists x B(x) \longmapsto \forall x \exists y (A(x) \Rightarrow B(y))$$

$\neg$に関する変形：

$$\neg \forall x A(x) \longmapsto \exists x \neg A(x)$$

$$\neg \exists x A(x) \longmapsto \forall x \neg A(x)$$

2　$\wedge, \vee$ に関する変形

$\wedge, \vee$ については $\forall x, \exists x$ をそのまま外に出せばよい。たとえば

$$\forall x A(x) \wedge \exists y B(y) \longmapsto \forall x \exists y (A(x) \wedge B(y))$$

$$\forall x A(x) \vee \exists y B(y) \longmapsto \forall x \exists y (A(x) \vee B(y))$$

注　:$\forall, \exists$ に関しては、そのまま。たとえば

$$\exists z (A(z) \Rightarrow \exists x B(x, z)) \longmapsto \exists z \exists x (A(z) \Rightarrow B(x, z))$$

3　意味の同等性

ある論理式 A と、その冠頭標準形 A^p は同じ意味をもつ。これは変形の各ステップで確認すればよい。(構造帰納法による）難しいのは $\Rightarrow$ の (1),(3) であろう。(教室で説明）

4　演習問題

1. 以下の論理式の冠頭標準形を求めよ。標準形が一通りでないときには、いくつか求めてみる。ただし、$A(x), B(y), P(x), C, \cdots$ は限量子を含まないとする。

$$\exists x A(x) \Rightarrow \neg \exists y B(y)$$

$$\forall x P(x) \wedge (\forall y B(y) \Rightarrow C)$$

$$\forall z (C(z) \Rightarrow \exists x \forall y (D(x, y) \vee B(y, z)))$$

2. $\wedge, \vee$ についての変形規則を、すべての場合について述べよ。