標準形

平成 16 年 7 月 3 日

冠頭標準形（prenex normal form）とは、述語論理の論理式のある標準形で、限量子をすべて先頭（冠頭）に出したもの。

変形規則：以下で、$\longmapsto$ の左の論理式を右のように変形。変数 x などは指示されている場所以外には出現しないものとする。

1 $\Rightarrow$ に関する変形

$$\exists x A(x) \Rightarrow B \longmapsto \forall x(A(x) \Rightarrow B) \tag{1}$$

$$A \Rightarrow \exists x B(x) \longmapsto \exists x(A \Rightarrow B(x)) \tag{2}$$

$$\forall x A(x) \Rightarrow B \longmapsto \exists x(A(x) \Rightarrow B) \tag{3}$$

$$A \Rightarrow \forall x B(x) \longmapsto \forall x(A \Rightarrow B(x)) \tag{4}$$

注：いくつも $\forall$ や $\exists$ があるときに、変形順序は任意である。

冠頭標準形への変形例

$$\exists x A(x) \Rightarrow \exists y B(y)$$

を、(1) と (2) を使って変形。

$$\forall x(A(x) \Rightarrow \exists y B(y))$$

$$\forall x \exists y(A(x) \Rightarrow B(y))$$

同じ論理式から出発して異なる標準形を作ることができる。

$$\exists y \forall x(A(x) \Rightarrow B(y))$$

異なる出現の同じ変数名は変える必要がある。例：

$$\exists x A(x) \Rightarrow \exists x B(x) \longmapsto \forall x \exists y(A(x) \Rightarrow B(y))$$

$\neg$ に関する変形：

$$\neg \forall x A(x) \longmapsto \exists x \neg A(x)$$

$$\neg \exists x A(x) \longmapsto \forall x \neg A(x)$$

2　$\wedge, \vee$ に関する変形

$\wedge, \vee$ については $\forall x, \exists x$ をそのまま外に出せばよい。たとえば

$$\forall x A(x) \wedge \exists y B(y) \longmapsto \forall x \exists y (A(x) \wedge B(y))$$

$$\forall x A(x) \vee \exists y B(y) \longmapsto \forall x \exists y (A(x) \vee B(y))$$

注：$\forall, \exists$ に関しては、そのまま。たとえば

$$\exists z (A(z) \Rightarrow \exists x B(x,z)) \longmapsto \exists z \exists x (A(z) \Rightarrow B(x,z))$$

3　意味の同等性

ある論理式 A と、その冠頭標準形 A^p は同じ意味をもつ。これは変形の各ステップで確認すればよい。（構造帰納法による）難しいのは $\Rightarrow$ の (1),(3) であろう。（教室で説明）

4　演習問題

1. 以下の論理式の冠頭標準形を求めよ。標準形が一通りでないときには、いくつか求めてみる。ただし、$A(x), B(y), P(x), C, \cdots$ は限量子を含まないとする。

$$\exists x A(x) \Rightarrow \neg \exists y B(y)$$

$$\forall x P(x) \wedge (\forall y B(y) \Rightarrow C)$$

$$\forall z (C(z) \Rightarrow \exists x \forall y (D(x,y) \vee B(y,z)))$$

2. $\wedge, \vee$ についての変形規則を、すべての場合について述べよ。

5　Skolem の標準形：$\forall$ の除去

$\forall$ 記号を、論理式の恒真性を変えずに、除去して、冠頭に $\exists$ だけが並ぶ形にする。

例：　$\forall x \exists y \forall z F(x,y,z)$ を $\exists y F(f_0, y, f_1(y))$ に変形。

冠頭標準形の中の $\forall$ をはずす規則

$\cdots \forall x \cdots F(\cdots, x, \cdots)$ の中の $\forall x$ より前（左、または外）に出現する $\forall$ はすでに除去されているとする。したがってその時点で論理式は

$$\exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_n \forall x \cdots F(\cdots, x, \cdots)$$

という形になっている。ただし $n \geq 0$。このとき新しく n 引数の関数記号 f を導入して、上の式を次のように変形する。

$$\exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_n \cdots F(\cdots, f(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots)$$

とくに $n = 0$、すなわち $\forall x$ の前 $\exists$ がなければ、f は 0-引数、つまり定数記号であり、変形結果は

$$\cdots F(\cdots, f, \cdots)$$

となる。なお、新しい関数記号のなまえはなんでもよい。

例

$$\forall x \exists y F(x, y) \mapsto \exists y F(c, y)$$

$$\forall x \exists y \forall z G(x, y, z) \mapsto \exists y G(c, y, f(y))$$

$$\exists x_1 \exists x_2 \forall y \forall z A(x_1, x_2, y, z) \mapsto \exists x_1 \exists x_2 A(x_1, x_2, g(x_1, x_2), h(x_1, x_2))$$

同値：　任意の論理式 A について、A の冠頭標準形 A^p と、それから得られる Skolem 標準形 A^s は恒真性において同値である。すなわち、A^p が恒真であることと A^s が恒真であることとは、同値である。

6　マトリックス：∃の除去

Skolem 標準形から、恒真性を変えないように $\exists$ をはずして命題論理の式にする。これを A のマトリックスといい、A^m と書こう。一つの Skolem 標準形に対してマトリックスは無数に用意する。

まず Skolem 標準形 A^s から $\exists x$ を除去して、$\exists x$ の x の候補を代入できるように、仮の変数で x を置き換える。その結果をマトリックスという。仮の変数として、たとえば $\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ を用意する。添え字が面倒なときには α, β, γ などと略記する。一つの $\exists x$ に対して、無数のマトリックスができる。ただし一つの論理式の中の異なる変数は異なる仮の変数で置き換える。
例

$$\exists y F(c, y) \mapsto F(c, \alpha)$$

$$\exists y F(c, y) \mapsto F(c, \beta)$$

$$\exists y G(c, y, f(y)) \mapsto G(c, \alpha, f(\alpha))$$

$$\exists y G(c, y, f(y)) \mapsto G(c, \gamma, f(\gamma))$$

$$\exists x_1 \exists x_2 A(x_1, x_2, g(x_1, x_2), h(x_1, x_2)) \mapsto A(\beta, \gamma, g(\beta, \gamma), h(\beta, \gamma))$$

$$\exists x_1 \exists x_2 A(x_1, x_2, g(x_1, x_2), h(x_1, x_2)) \mapsto A(\alpha_1, \alpha_2, g(\alpha_1, \alpha_2), h(\alpha_1, \alpha_2))$$

次にマトリックスの和を作る。A^s のマトリックス $A_1^m, A_2^m, \cdots, A_k^m$ から、それらの和

$$A_1^m \vee A_2^m \vee \cdots \vee A_k^m$$

を作る。(これを A^{mm} と書こう。一つの Skolem 標準形に対するマトリックスの任意の和を表す) ここで $A_1^m, A_2^m, \cdots, A_k^m$ のそれぞれは任意の異なるマトリックスであり、その個数 $k \geq 1$ も任意である。

さらに、このマトリックスの和から、和積標準形を作る。これを A^{ws} と書こう。

7 Herbrand Universe

A^{ws} に出現する α や β などに代入するべき項の候補として、1節で導入した関数記号で作られる項を集める。その集合を Herbrand Universe という。$\mathbf{U}$ と書こう。すなわち $\mathbf{U}$ の要素は、次のようなものである。(再帰的な定義)

1. 引数 0 の関数記号 ($c, d, f_0, \cdots$ などと書く)

2. f が引数 $n \geq 1$ の関数記号であり、$t_1, t_2, \cdots, t_n$ がすでに定義された $\mathbf{U}$ の項とするとき、$f(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ は $\mathbf{U}$ の項である。

8 命題論理への還元

マトリックスの和から作られた和積標準形に Herbrand Universe のいろいろな項を代入した論理式を、A の qf-式とよび、A^{qf} と書こう。もちろんこれは無数にある。(qf は quantifier free、すなわち限量記号のない形、という意味) それが恒真になるかどうか判定する。どのような項を代入したらよいか、は、方程式を解くことによって決定する。(実際の例は次の節で)

定理:述語論理の論理式 A が恒真 (証明可能) であることと、A のある qf-式で恒真なものがあることは、同値である。

注:1. この定理の証明は、次節で例によって説明する。

2. 定理は、さらに、もっと強い形で述べることができる:実際に A が恒真ならば、恒真な A^{qf} を自動的に求めることができる。しかもその A^{qf} の証明から、A の証明を自動的に構成することができる。実際にそのようなプログラムは多く作成されている。

9　例

　例１　自明な例

$$A \equiv \forall x(P(x) \Rightarrow \exists y P(y))$$

は恒真である。

$$A^p \equiv \forall x \exists y(P(x) \Rightarrow P(y))$$

$$A^s \equiv \exists y(P(c)) \Rightarrow P(y)$$

$$A^{mm} \equiv P(c) \Rightarrow P(\alpha)$$

c は $\mathbf{U}$ の項。ゆえに $\alpha = c$ とおいて、

$$A^{qf} \equiv P(c) \Rightarrow P(c)$$

この A^{qf} は $B \Rightarrow B$ の形だから、命題論理の恒真な式である。また、$P(c) \Rightarrow P(c)$ が恒真なことから、$A^s \equiv \exists y(P(c) \Rightarrow P(y))$ が恒真なことがわかる。（$y = c$ とすればよい。）したがって、順次遡って、A が恒真なことがいえる。

　例２　自明でない典型的な例

$$A \equiv A^p : \exists x \forall y(P(x) \Rightarrow P(y))$$

$$A^s : \exists x(P(x) \Rightarrow P(f(x)))$$

たとえば x の候補が一つであると推測してみる。

$$P(\alpha) \Rightarrow P(f(\alpha))$$

この式が恒真であるためには、$\alpha \equiv f(\alpha)$ でなければならない。（$\equiv$ は、形が同一であることを示す。）しかし、これは不可能。

　次に、x の候補が二つあると推測してみる。

$$A^{mm} \equiv (P(\alpha) \Rightarrow P(f(\alpha))) \vee (P(\beta) \Rightarrow P(f(\beta)))$$

これは次の基本和と同じ。

$$\neg P(\alpha) \vee \neg P(\beta) \vee P(f(\alpha)) \vee P(f(\beta))$$

基本和で、$\neg$ がついているリテラルを「負」、ついていないのを「正」とよぶことにする。正なリテラルと負のリテラルの両方に同じ論理式があれば、基本和は恒真である。それが可能かどうか、方程式を解いてみる。

　$\alpha = f(\beta)$ と置いてみると、正負両方に $P(f(\beta))$ が出現する。したがってこの A^{mm} は β を適当な項（たとえば定記号 c）によって、$\beta = c, \alpha = f(c)$ とすれば、恒真になる：

$$\underline{\neg P(f(c))} \vee \neg P(c) \vee P(f(f(c))) \vee \underline{P(f(c))}$$

逆に、これを、論理結合子間の等式によって変形すれば

$$(P(f(c)) \Rightarrow P(f(f(c))))) \vee (P(c) \Rightarrow P(f(c))))$$

は恒真。$(P(f(c)) \Rightarrow P(f(f(c)))))$ が真ならば、$x = f(c)$ とすれば $A^s \equiv \exists x(P(x) \Rightarrow P(f(x)))$ が真。$(P(c) \Rightarrow P(f(c)))))$ が真ならば、$x = c$ とすれば、同様の結果が得られる。ゆえに A^s が恒真。

10 自明でない例の恒真性の証明

$$A \equiv A^p \equiv \exists x \forall u \exists v \forall y (P(x, y) \Rightarrow P(u, v))$$

$$A^s \equiv \exists x \exists v (P(x, f(x, v)) \Rightarrow P(g(x), v))$$

マトリックスの形

$$P(\alpha, f(\alpha, \beta)) \Rightarrow P(g(\alpha), \beta);\ \neg P(\alpha, f(\alpha, \beta)) \vee P(g(\alpha), \beta)$$

個数１で試す。負のリテラルは $P(\alpha, f(\alpha, \beta))$、正のリテラルは $P(g(\alpha), \beta)$。これらが等しいためには

$$\alpha = g(\alpha), f(\alpha, \beta) = \beta$$

解けない。個数２で試す。

$$(P(\alpha_1, f(\alpha_1, \beta_1)) \Rightarrow P(g(\alpha_1), \beta_1)) \vee (P(\alpha_2, f(\alpha_2, \beta_2)) \Rightarrow P(g(\alpha_2), \beta_2))$$

$$(\neg P(\alpha_1, f(\alpha_1, \beta_1)) \vee P(g(\alpha_1), \beta_1)) \vee (\neg P(\alpha_2, f(\alpha_2, \beta_2)) \vee P(g(\alpha_2), \beta_2))$$

負のリテラル

$$P(\alpha_1, f(\alpha_1, \beta_1)), P(\alpha_2, f(\alpha_2, \beta_2))$$

正のリテラル

$$P(g(\alpha_1), \beta_1), P(g(\alpha_2), \beta_2)$$

可能性として、

$$P(\alpha_1, f(\alpha_1, \beta_1)) \equiv P(g(\alpha_2), \beta_2); \alpha_1 = g(\alpha_2), \beta_2 = f(\alpha_1, \beta_1)$$

の解？たとえば

$$\beta_1 = c, \alpha_2 = d, \alpha_1 = g(d), \beta_2 = f(g(d), c)$$

とすれば、負と正のリテラルが $P(g(d), f(g(d), c))$ となる。したがって

$$(\neg P(g(d), f(g(d), c)) \vee P(g(g(d)), c)) \vee (\neg P(d, f(d, f(g(d), c))) \vee P(g(d), f(g(d), c)))$$

は恒真。順にさかのぼって、A は恒真。

11 練習問題

I. 次の論理式を、順次冠頭標準形、Skolem 標準形、マトリックス、に変形せよ。

1. $\exists x P(x) \wedge \forall y Q(y) \Rightarrow \forall u R(u)$
2. $\neg \exists u X(u) \vee \forall v Y(v)$
3. $\forall x \exists y P(x,y) \Rightarrow \exists x Q(x) \wedge \exists x \exists y P(x,y)$

II. 次の論理式の恒真性を示せ。

1. $\forall x(\forall y P(x,y) \Rightarrow \exists x P(x,x))$
2. $\exists x(\neg P(x) \vee Q) \Rightarrow \neg \forall u P(u) \vee Q$

*3. $\exists x \forall y(\neg P(x) \vee Q(y)) \Rightarrow \neg \forall u P(u) \vee \forall v Q(v)$

解答 答えは一通りではない。これは一例。

I. 1. $\exists x \forall y(P(x) \wedge Q(y)) \Rightarrow \forall y R(u);\ \forall x \exists y \forall u(P(x) \wedge Q(y) \Rightarrow R(u))$

$$\exists y(P(a) \wedge Q(y) \Rightarrow R(h(y)));\ P(a) \wedge Q(\alpha) \Rightarrow R(h(\alpha))$$

2. $\forall u \neg X(u) \vee \forall v Y(v);\ \forall u \forall v(\neg X(u) \vee Y(v));\ \neg X(b) \vee Y(c)$
3. $\exists x \exists u \forall y \exists v(P(x,y) \Rightarrow Q(u) \wedge P(u,v))$

$$\exists x \exists u \exists v(P(x, f(x,u)) \Rightarrow Q(u) \wedge P(u,v))$$

$$P(\alpha, f(\alpha,\beta)) \Rightarrow Q(\beta) \wedge P(\beta,\gamma)$$

II. 1. $\forall x \exists y \exists u(P(x,y) \Rightarrow P(u,u));\ \exists y \exists u(P(a,y) \Rightarrow P(u,u))$

$$P(a,\beta) \Rightarrow P(\gamma,\gamma);\ \neg P(a,\beta) \vee P(\gamma,\gamma);\ \gamma = \beta = a$$

2. $\exists x(\neg P(x) \vee Q) \Rightarrow \exists u \neg P(u) \vee Q$

$$\exists x(\neg P(x) \vee Q) \Rightarrow \exists u(\neg P(u) \vee Q)$$

これは $A \Rightarrow A$ の形。ゆえに恒真。

*3. $\exists x \forall y(\neg P(x) \vee Q(y)) \Rightarrow \exists u \neg P(u) \vee \forall v Q(v)$

$$\forall x \exists y \exists u \forall v(\neg P(x) \vee Q(y)) \Rightarrow \exists u \forall v(\neg P(u) \vee Q(v))$$

$$\forall x \exists y \exists u \forall v(\neg P(x) \vee Q(y) \Rightarrow \neg P(u) \vee Q(v))$$

$$\exists y \exists u(\neg P(e) \vee Q(y) \Rightarrow \neg P(u) \vee Q(h(y,u)))$$

$$\neg P(e) \vee Q(\beta) \Rightarrow \neg P(\gamma) \vee Q(h(\beta,\gamma))$$

１個では解がないことは容易にわかる。２個で試してみる。