抽象化の技法'99　前期期末試験　問題と解答　八杉満利子

1 以下のそれぞれの論理式の、自然演繹の体系 NK における証明図を書け。どの推論を使ったかも明示せよ。

(1) $\forall y P(y) \Rightarrow \exists x P(x)$

(2) $(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vee B$

(ヒント :(2) では、排中律 $A \vee \neg A$ を使う。)

答え (1)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[1:\forall y P(y)]}{P(x)}\,(\forall E)}{\exists x P(x)}\,(\exists I)}{\forall y P(y) \Rightarrow \exists x P(x))}\,(1)(\Rightarrow I)$$

(2)

$$\dfrac{A \vee \neg A \quad \dfrac{\dfrac{[2:A]}{A \vee B}\,(\vee I) \qquad \dfrac{\dfrac{[1:\neg A \Rightarrow B] \quad [3:\neg A]}{B}\,(\Rightarrow E)}{A \vee B}\,(\vee I)}{A \vee B}\,(2,3)(\vee E)}{(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow A \vee B}\,(1)(\Rightarrow I)$$

2 算術の体系 PA の言語 (定記号 0, 関数記号 S,$+$,*, 述語記号$=$) で次の命題を表現せよ。

(1) 双子素数が存在する。

(2) 双子素数が無数に存在する。

(注 :「n が素数である」は $Prime(n)$ と書く。自然数の対 n と m が 「双子素数」である、とは 「n と m は素数で、$m = n + 1$ という関係にある」ことをいう。)

答え (1) 文章にあるとおりを記号化すればよい。

$$\exists n \exists m(Prime(n) \wedge Prime(m) \wedge m = S(S(n)))$$

または

$$\exists n(Prime(n) \wedge Prime(S(S(n)))$$

($S(S(n))$ を $n + 2$ としても減点はしていない)

(2) (1) と 「素数は無限にある」の論理式を参考にすればできる。

$$\forall l \exists n(n \geq l \wedge Prime(n) \wedge Prime(S(S(n))))$$

3 $A(n)$ は$\sum_{i=1}^{n}(2i + 1) = n(n + 2)$ を表すとする。

(1) $A(n)$ に関する数学的帰納法を、PA の論理式で表せ。

答え　$A(n)$ を$\sum_{i=1}^{n}(2i+1)$ という項だと思った人がいるが、$A(n)$ に関する帰納法、というのだから、$A(n)$ は論理式と理解するのが常識。後は数学的帰納法を論理式で書けばよい。

$$A(1) \wedge \forall n(A(n) \Rightarrow A(S(n))) \Rightarrow \forall n A(n)$$

$A(0)$ から始めてもよい。

(2) 数学的帰納法によってすべての n について $A(n)$ が成り立つことを証明する方法のアウトラインを書け。 (ごくかんたんでよい。)

答え　ふつうに数学の証明をすればよい。数学的帰納法を使っていることが明らかであり、また各ステップの数学的な事実がはっきりしていることがポイント。詳しい計算は不要であるが、かんたんな式の関係くらいは書いてほしい。)

1. $A(1)$ が成り立つことを示す。 (両辺 3 であることに触れる。) なお、$A(0)$ から始める場合、右辺は明らかに 0。左辺は定義によって 0 である。
2. $A(n)$ が成り立つと仮定して、$A(n+1)$ が成り立つことを示す。 ($A(n)$ の左辺に $2(n+1)+1$ をたしたものと、$A(n+1)$ の右辺が等しいことを書く。)
3. 1 と 2 より、すべての n について $A(n)$ が成り立つ。