代数学・幾何学 B 2003 レポート 2 ・ 4 章：解答

担当：八杉； 配点：１０点

問題 1 連立 1 次方程式 (Eq)：

$$x+2z=2,\ \ x+y-z=3,\ \ 3x+2y=8$$

を考える。

（１） (Eq) の拡大係数行列を求めよ。 （これを B とおく）

（２）B を階段行列に変形せよ。

（３）(Eq) の階数および自由度を求めよ。

（４）(Eq) の解を求めよ。

注 （２）は、途中経過も示す。他は結果のみでよい。

答 (1) x,y,z の係数および等号の右辺の数値を各行に並べた行列。

$$B=\begin{pmatrix}1&0&2&2\\1&1&-1&3\\3&2&0&8\end{pmatrix}$$

(2) B の行変換で r_2-r_1 と r_3-3r_1 を行い、次に r_3-2r_2 を行うと

$$\begin{pmatrix}1&0&2&2\\0&1&-3&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

(3) (2) より $rank=2$、自由度 $=3-2=1$

(4) (2) より、$x+2z=2, y-3z=1$ を解くと、たとえば $x=2-2z, y=1+3z$。すなわち、z に自由度を与える。$z=c$ とおけば、

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$$

問題 2 同次連立 1 次方程式 (Eq*)：

$$x+2z=0,\ \ x+y-z=0,\ \ 3x+2y=0$$

を考える。

（１） (Eq*) の係数行列を求めよ。 （これを C とおく）

（２）C の階段行列を求めよ。

（３）(Eq*) の階数および自由度を求めよ。

（４）(Eq*) の解空間を求めよ。

（５）（４）の解空間を 3 次元空間の中で図示せよ。(手書きでもコンピュータを使ってもよい。)

答 (1) 問題 1 (1) の第 3 列まで (係数のみ) から成る行列。

$$C=\begin{pmatrix}1&0&2\\1&1&-1\\3&2&0\end{pmatrix}$$

(2) 問題 1 (2) の第 3 列まで：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) $rank = 2$、自由度 $= 3 - 2 = 1$

(4) $x + 2z = 0, y - 3z = 0$ を解いて $x = -2z, y = 3z$。$z = t$ とおけば、$x = -2t, y = 3t$。ゆえに任意の実数 t について

$$\begin{pmatrix} -2t \\ 3t \\ t \end{pmatrix}$$

という形のベクトルがすべて解である。解空間はこのようなベクトルの集合なので、

$$W = \{t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} | t \in \mathbf{R}\}$$

(5) 作図は略。$x - y - z$ 空間の座標軸の取り方が分かっていない答案がありました。x 軸を y 軸の方向にまわすときに z 軸 (の正) の方向に進む、「右ねじの法則」を覚えておいてください。なお解空間は原点と点 $(-2, 3, 1)$ を通る直線です。