代数学・幾何学Ｂ ６章　固有値と固有ベクトル

八杉　満利子*
京都産業大学・理学部

目 次

1　固有値と固有ベクトル

p.99-103, 6.1

この章では、方程式の解を与える数の体系が（実数でなく）複素数である。このことをまず認識しておいてください。

定義 1.1 （固有値、固有ベクトル、固有方程式）　A を $n \times n$ 行列とする。A について、ある複素数 λ とベクトル $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ があって、次の式が成り立つとする。（p.99 の（6.1）式）

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

このとき、λ を A の固有値、$\mathbf{v}$ を A の λ に対する（λ に属する）固有ベクトル、と呼ぶ。

注　A の各要素は複素数でもよいが、この講義の範囲では A の要素は実数にしている。しかしたとえ A が実数でできていても、λ および $\mathbf{v}$ の要素は複素数になるかもしれない。

(6.1) の式より、(6.2)、すなわち

$$(A - \lambda E)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

が成り立ち、これよりさらに (6.3)、すなわち、

$$det(A - \lambda E) = 0$$

* ２００３年後期

を得る。なぜなら、もし $det(A-\lambda E)\neq 0$ ならば、$(A-\lambda E)^{-1}$ が存在する。したがって (6.2) より $\mathbf{v}=\mathbf{0}$ となって、$\mathbf{v}$ の性質に反する。

定義 1.2 （特性方程式） 式 (6.3) は λ の多項式に関する方程式になる。(6.3) を行列 A の特性方程式、または固有方程式、と呼ぶ。

(6.3) は λ の n 次の多項式 $=0$ の形になる。なぜならば

$$\lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & \cdots & \cdots & \cdot \\ \cdot & \lambda - a_{22} & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix}$$

であるから、左辺（項の順序を入れ替えて）は、

$$\Pi_{i=1}^{n}(\lambda - a_{ii}) = \lambda^n + \cdots$$

であり、λ^n の項は消えない。
例題 (p.100：解のパターン)

[例題 6.1：固有値が互いに異なる実数]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$det(A-\lambda E) = det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$(1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda+1)(\lambda-3) = 0$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 3$$

ここでたとえば $\lambda=-1$ について、$\mathbf{v}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおいて、

$$(A-\lambda_1 E)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

となる $\mathbf{v}$ を求める。

$$\begin{pmatrix} 1-(-1) & 2 \\ 2 & 1-(-1) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2x+2y \\ 2x+2y \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

すなわち $2x+2y=0$、ゆえに $y=-x$。$\alpha\neq 0$ を任意の実数として $x=\alpha$ とおくと、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

以上より、A の一つの固有値 $\lambda_1 = -1$ とそれに属する固有ベクトル $\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を得た。

これは、A によるベクトルの変換に関して、何倍かする（この場合には実数倍なので、回転がない）だけのベクトルの集合の一つはベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を通る直線になり、その際各ベクトルは -1 倍される。

演習 上の A について、固有値 $\lambda_2 = 3$ の固有ベクトルを求め、それが平面でどのような（ベクトルの）集合になるか図示せよ。

[例題 6.2：複素数の固有値をもつ例, p.100]

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$det(A - \lambda E) = det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$(1-\lambda)^2 - (-2) = (\lambda - 1)^2 - (-2) = 0$$

これを解くと、$\lambda = 1 \pm \sqrt{2}i$ を得る。$\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}i, \lambda_2 = 1 - \sqrt{2}i$ とおいて固有ベクトルを求めると、それぞれ

$$\mathbf{v}_1 = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \beta\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

ここで $\alpha, \beta \neq 0$ は任意の複素数。ベクトルの要素を複素数にするのは、今までしてこなかったことなので、イメージしにくいが、複素平面の組（線形空間になる）上のベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ を α, β だけ回転・伸縮したベクトルを通る直線、と考えられる。その際各ベクトルはそれぞれ λ_1, λ_2 分だけ回転・伸縮する。

[例題 6.3：重解の固有値をもつ例（1）,p.101]（例題 6.3 は読んでおく。ここでは 2×2 の例で示す。

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda E| = det\begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 3 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda - 5)(\lambda + 1) + 9 = (\lambda - 2)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2.$$

これより重根を求める：$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = 2$。

$$(A-\lambda E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0; \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

ゆえに、$3x - 3y = 0$、すなわち $y = x$。$\alpha \neq 0$ を任意の実数とするとき、

$$\mathbf{v} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

[例題 6.4：重解の固有値をもつ例（２）p.102] 読んでおくこと。

p.110 の問題 6.1 (1)　$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$　の固有方程式は

$$det\begin{pmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)(1-\lambda) - 6$$

$$\lambda^2 - 6\lambda - 1 = 0$$

これより、固有値は

$$\lambda = 3 \pm \sqrt{10}$$

$\lambda_1 = 3 - \sqrt{10}$ とする。これに属する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 5-(3-\sqrt{10}) & 3 \\ 2 & 1-(3-\sqrt{10}) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解いて、$\mathbf{v}_1 = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2-\sqrt{10} \\ 2 \end{pmatrix}$。

（計算は教室で）

$\lambda_2 = 3 + \sqrt{10}$ に属する固有ベクトル $\mathbf{v}_2$ を計算せよ。

p.110 の他の問題を解いてみる。（固有方程式をたてる；それを解いて固有値を求める；各固有値に対する固有ベクトルを求める。）

2　行列の対角化

p.103, 6.2 行列の対角化（その１）

定理 1　（行列の対角化：定理 6.1,p.103）　前節の例題 6.1 のように固有値がすべて異なる（単根）ときの固有ベクトルを考える。n 次行列の固有方程式が

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\cdots(\lambda - \lambda_n) = 0$$

で、固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$（実数または複素数）がすべて互いに異なるとき、それぞれの固有値に属する固有ベクトルを $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots \quad, \mathbf{v}_n$ とするとき、

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots \mathbf{v}_n \end{pmatrix}$$

とおくと、P^{-1} が存在し、行列 $P^{-1}AP$ は対角行列になる。すなわち

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

なお、上の対角行列を Λ と表す。

この定理は次の補題から導かれる。

補助定理 1 （固有ベクトルの１次独立性）A の互いに異なる固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ に属する固有ベクトル $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$ は１次独立である。

定理の証明,p.104　この補題と系 2.1,p.34　（行列 P の列ベクトルが１次独立ならば、B は正則、すなわち逆行列をもつ。）より、定理の P は逆行列を持つ。次に

$$AP = A\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots \mathbf{v}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\mathbf{v}_1 & A\mathbf{v}_2 & \cdots & A\mathbf{v}_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1\mathbf{v}_1 & \lambda_2\mathbf{v}_2 & \cdots & \lambda_n\mathbf{v}_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots \mathbf{v}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = P\Lambda$$

以上をまとめて

$$AP = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots \mathbf{v}_n \end{pmatrix}\Lambda$$

これより $P^{-1}AP = \Lambda$ を得る。

補題の証明の概要は p.104 にある。講義では省略する。興味があれば、読んでおいてほしい。

例として、固有ベクトルを求めた p.110, 問題 6.1(1) を扱う。

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \lambda = 3 \mp \sqrt{10}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \mp \sqrt{10} \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 2 - \sqrt{10} & 2 + \sqrt{10} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{10} \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda_1 = 3+\sqrt{10} \rightarrow$$

$$A\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 16+5\sqrt{10} \\ 6+2\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 16+5\sqrt{10} \\ 6+2\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{10}} & \frac{1}{5+\sqrt{10}} \\ \frac{1}{2\sqrt{10}} & \frac{1}{20}(5-\sqrt{10}) \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3-\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 3+\sqrt{10} \end{pmatrix}$$